

دايرة

فصل نهم

www-kanoon-ir

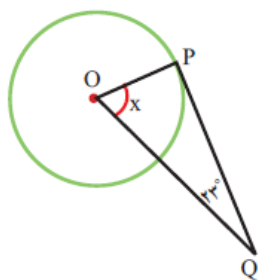
خط و دایره

در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، میگوییم خط بر دایره مماس است.

نکته: فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند.

شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

سوال ۱: در شکل زیر، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



پاسخ:

طبق تعریف بالا که گفته شد شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس در نتیجه زاویه P برابر با ۹۰ درجه می‌باشد. در نتیجه زاویه X بصورت زیر است:

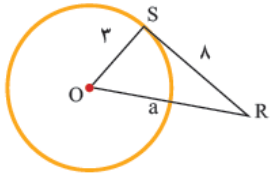
$$x = 90 - 23 \rightarrow x = 67^\circ$$

نکته: پاره خطی که دو نقطه از محیط آن دایره را به هم وصل می‌کند، وتر آن دایره نامیده می‌شود.

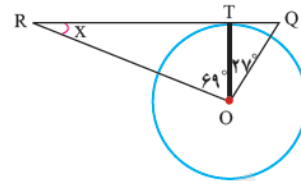
نکته: خطی که از مرکز دایره بر وتری از آن دایره عمود شود، آن وتر را نصف می‌کند. (اثبات از طریق همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد شده.)

و برعکس، پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

سوال ۲: در هر شکل، خطوط بر دایره مماس اند. اندازه مجهولات را بیابید.



(ب)



(الف)

پاسخ :

(الف) چون OT شعاع دایره است و بر RQ عمود است پس داریم :

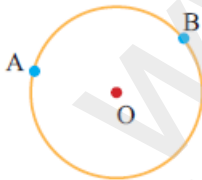
$$x = 90 - 69 \rightarrow x = 21^\circ$$

(ب) از آنجا که OS شعاع دایره است و RS نیز بر دایره مماس است، پس OS بر دایره عمود است :

$$a^2 = r^2 + 3^2 \rightarrow a^2 = 73 \rightarrow a = \sqrt{73}$$

زاویه مرکزی

شکل زیر را در نظر بگیرید، دو نقطه A و B دایره را به دو قسمت تقسیم کرده است که ما قسمت کوچک را کمان \widehat{AB} می‌نامیم.

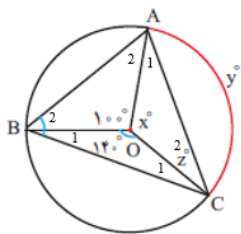
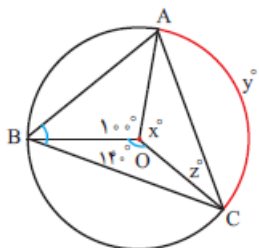


اندازه کمان \widehat{AB} ، با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن برابر است. بنابراین، ممکن است دو کمان با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوتی داشته باشند.

در نتیجه داریم:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{اندازه کمان } AB} = \frac{\text{محیط دایره}}{360^\circ}$$

سوال ۳: اندازه کمان و زاویه‌های مجهول را بیابید.



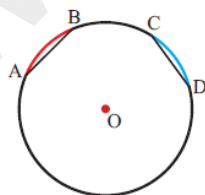
پاسخ:

$$x + 100^\circ + 140^\circ = 360^\circ \rightarrow x = 120^\circ \rightarrow y = 120^\circ$$

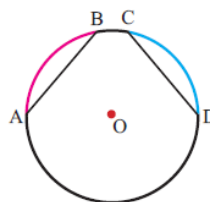
$$Z_1 + A_1 + x = 180^\circ \rightarrow Z_1 + A_1 = 60^\circ \rightarrow Z_1 = A_1 = 30^\circ$$

چون OA و OZ شعاع‌های دایره‌اند پس زاویه A_1 و Z_1 باهم برابرند.

نکته:

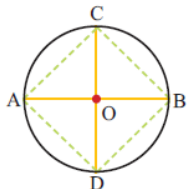


$$\overline{AB} = \overline{CD}$$



$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

- اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، آنگاه دو پاره خط ایجاد شده باهم برابرند.
- بهعکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، دو کمان ایجاد شده نیز با هم برابرند.



سوال ۴: قطرهای AB و CD برهم عمودند.

الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA باهم مساوی‌اند؟

ب) آیا وترهای AC، CB، BD و DA باهم مساوی‌اند؟

پاسخ:

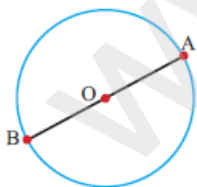
الف) چون دو قطر AB و CD برهم عموداند، پس هر چهار زاویه ایجاد شده 90° درجه می‌باشند، در نتیجه هر چهار کمان ایجاد شده برابر با 90° درجه می‌باشند.

ب) طبق نکته بالا هر زمان اندازه دو کمان برابر باشد، آنگاه دو پاره خط با هم برابرند.

زاویه‌های محاطی

به زاویه‌ای که راس آن روی محیط دایره باشد، زاویه محاطی گویند.

نکته: اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف کمان روبروی خودش است.



سوال ۵: قطر دایره AB را به دو کمان تقسیم کرده‌است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟

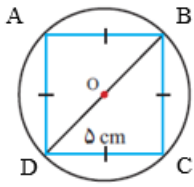
زاویه محاطی مقابل به کمان AB چند درجه است؟

پاسخ:

از آنجایی که زاویه مرکزی O برابر با 180° درجه است، پس در نتیجه دو کمان نیز برابر با 180° درجه هستند.

و اندازه زاویه‌های محاطی رو به رو به کمان AB برابر با 90° درجه می‌باشند.

سوال ۶: در شکل روبه‌رو، همه راس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی متر روی دایره قرار دارد.



الف) چرا این لوزی، مربع است؟

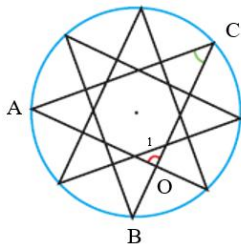
ب) قطر دایره چند سانتی متر است؟

پاسخ:

الف) زاویه محاطی C روبه‌رو به کمان 180 درجه است، پس در نتیجه اندازه این زاویه برابر با 90 درجه می‌باشد. زاویه A نیز به همین ترتیب برابر با 90 درجه است. از آنجا که BC = DC در نتیجه زاویه CBD = CDB = 45 درجه می‌باشند و به همین ترتیب در مثلث ABD می‌توان گفت اندازه دو زاویه دیگر برابر با 45 درجه است. پس در نتیجه زاویه‌های B و D نیز برابر با 45 درجه می‌باشند. پس شکل حاصل مربع است.

$$ب) AB^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow AB = \sqrt{50}$$

سوال ۷: در شکل روبه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده‌است.



الف) شکل چند خط تقارن دارد؟

ب) اندازه دو زاویه مشخص شده در شکل را بنویسید.

پاسخ:

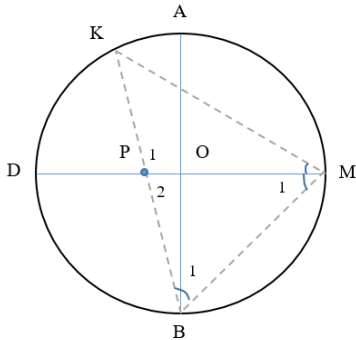
الف) دارای ۸ خط تقارن می‌باشد.

ب) از آنجا که محیط دایره را به ۸ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم، و زاویه C محاطی است و روبروی دو قسمت از این ۸ قسمت می‌باشد، پس داریم:

$$C = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

زاویه $O_1 = 90^\circ$ می‌باشد. دلیل به عهده دانش‌آموز

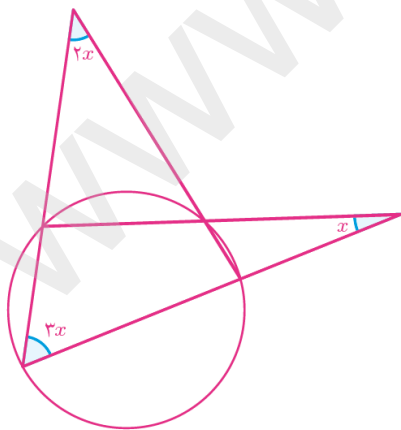
سوال ۸: در دایره C به مرکز O، AB قطر و M وسط کمان AB است. نقطه P روی قطر DM طوری قرار دارد که $MP = MB$. اگر K محل برخورد امتداد BP با دایره باشد، آنگاه اندازه زاویه KMO چقدر است؟



پاسخ: از آنجایی که $MP = MB$ پس در نتیجه $B_1 = P_2$ و همچنین $M_1 = 45^\circ$ (چون زاویه محاطی رو به رو به کمان 90° است). پس در نتیجه $B_1 = P_2 = \frac{180-45}{2} = 67.5^\circ$. پس در نتیجه $P_1 = 112.5^\circ$. از آنجا که K رو به رو به کمان 90° است و خود نیز زاویه محاطی می باشد، پس در نتیجه $K = 45^\circ$. در نتیجه زاویه KMO برابر است با:

$$KMO = 180 - (112.5 + 45) = 22.5^\circ$$

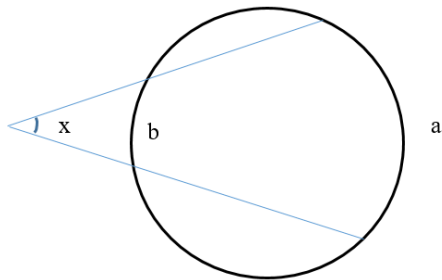
سوال ۹: در شکل زیر مقدار X چقدر است؟



پاسخ:

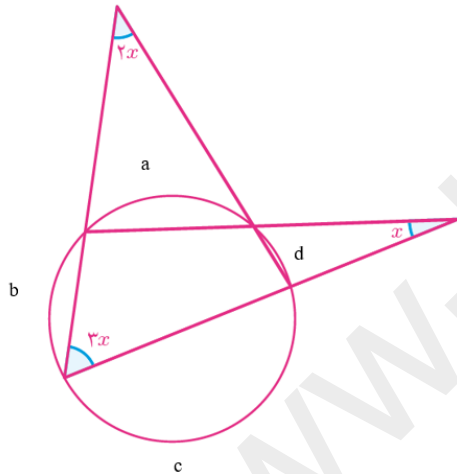
علاوه بر زاویه‌های گفته شده، یک سری زاویه دیگر در دایره وجود دارد که در شکل بالا می‌بینیم؛ به این شکل که راس زاویه خارج از دایره قرار می‌گیرد که اندازه آن‌ها به صورت زیر است.

✓ در شکل زیر اگر a و b بر حسب درجه باشند، رابطه زیر برقرار است:



$$x = \frac{a - b}{2}$$

حالا می‌توانیم به حل سوال بالا بپردازیم:

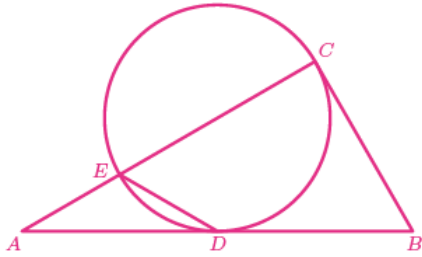


$$x = \frac{b - d}{2} \quad , \quad 2x = \frac{c - a}{2} \quad , \quad 3x = \frac{a + d}{2} \quad , \quad a + b + c + d = 360^\circ$$

$$\begin{cases} b - d = 2x \\ c - a = 4x \\ a + d = 6x \end{cases} \rightarrow c + b = 12x \rightarrow \begin{cases} c + b = 12x \\ a + d = 6x \end{cases} \rightarrow a + b + c + d = 18x$$

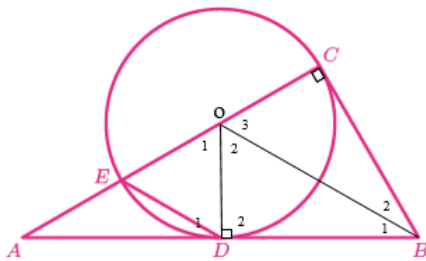
$$\begin{cases} a + b + c + d = 18x \\ a + b + c + d = 360^\circ \end{cases} \rightarrow 18x = 360^\circ \rightarrow x = 20^\circ$$

سوال ۱۰: در شکل زیر، EC قطر دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. اگر کمان ED برابر با ۶۰ درجه باشد، آنگاه اثبات کنید:



$$AD = BC = \frac{1}{2} AB$$

پاسخ:



از آنجایی که کمان ED برابر با ۶۰ درجه می باشد، پس در نتیجه $O_1 = 60^\circ$ (زاویه مرکزی).

همچنین چون خط AB و BC بر دایره مماس اند، و OD و OC شعاع‌های دایره‌اند، پس OD بر AB و OC بر BC عمود است.

برای اثبات اینکه دو مثلث BOD و BOC هم‌نهشت هستند می توان گفت: از آنجایی که OB مشترک بین دو مثلث و وتر دو مثلث است، همچنین $OD = OC$ پس دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت هستند پس در نتیجه زاویه‌های $O_2 = O_3$ و همچنین $BD = BC$.

از آنجایی که $O_1 = 60^\circ$ و $O_2 = O_3$ و همچنین EC قطر دایره است پس می توان گفت: $\widehat{O_2} = \widehat{O_3} = 60^\circ$.

همچنین دو مثلث AOD و BOD هم‌نهشت اند:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \quad \widehat{D_1} = \widehat{D_2} = 90^\circ \quad \text{مشترک } OD$$

پس در نتیجه دو مثلث به حالت ض ض هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $AD = BD = \frac{1}{2} AB$

از آنجایی که $BD = BC$ در نتیجه داریم:

$$AD = BC = \frac{1}{2} AB$$