

اعمال جبری روی توابع:

گام اول: تابع $f = \{(4, 0), (3, -1), (2, -1)\}$ را در نظر بگیرید.

می خواهیم توابعی همچون $2f$ ، $\frac{f}{3}$ و $f - 5$ و ... را محاسبه کنیم.

بر این منظور، کیفیت عمل خواسته شده را روی مؤلفه ها دوم (عرضها) در صورت امکان انجام دهیم. بنابراین:

$$2f = \{(4, 0), (3, -2), (2, -2)\}$$

$$\frac{f}{3} = \{(4, 0), (3, -\frac{1}{3}), (2, -\frac{1}{3})\}$$

$$f - 5 = \{(4, -5), (3, -6), (2, -6)\}$$

مثال: با فرض $f = \{(1, 1), (2, 9), (3, 0), (4, -1)\}$ مطلوب است:

$$\text{الف) } \sqrt{f} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 0), (4, -1)\}$$

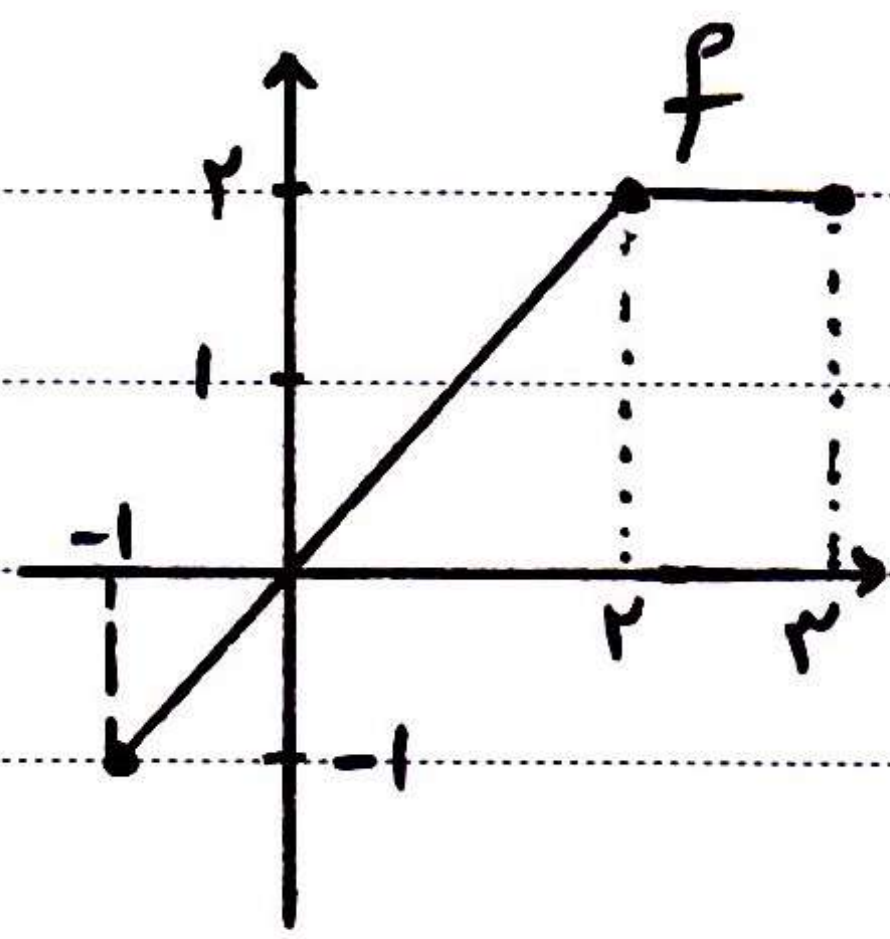
توجه: در حین محاسبه زوج مرتب $(4, -1)$ حذف شد زیرا $\sqrt{-1}$ تعریف نشده است.

$$\text{ب) } f^2 = \{(1, 1), (2, 81), (3, 0), (4, -1)\}$$

$$\text{پ) } \frac{1}{f} = \{(1, 1), (2, -1), (3, 0), (4, -1)\}$$

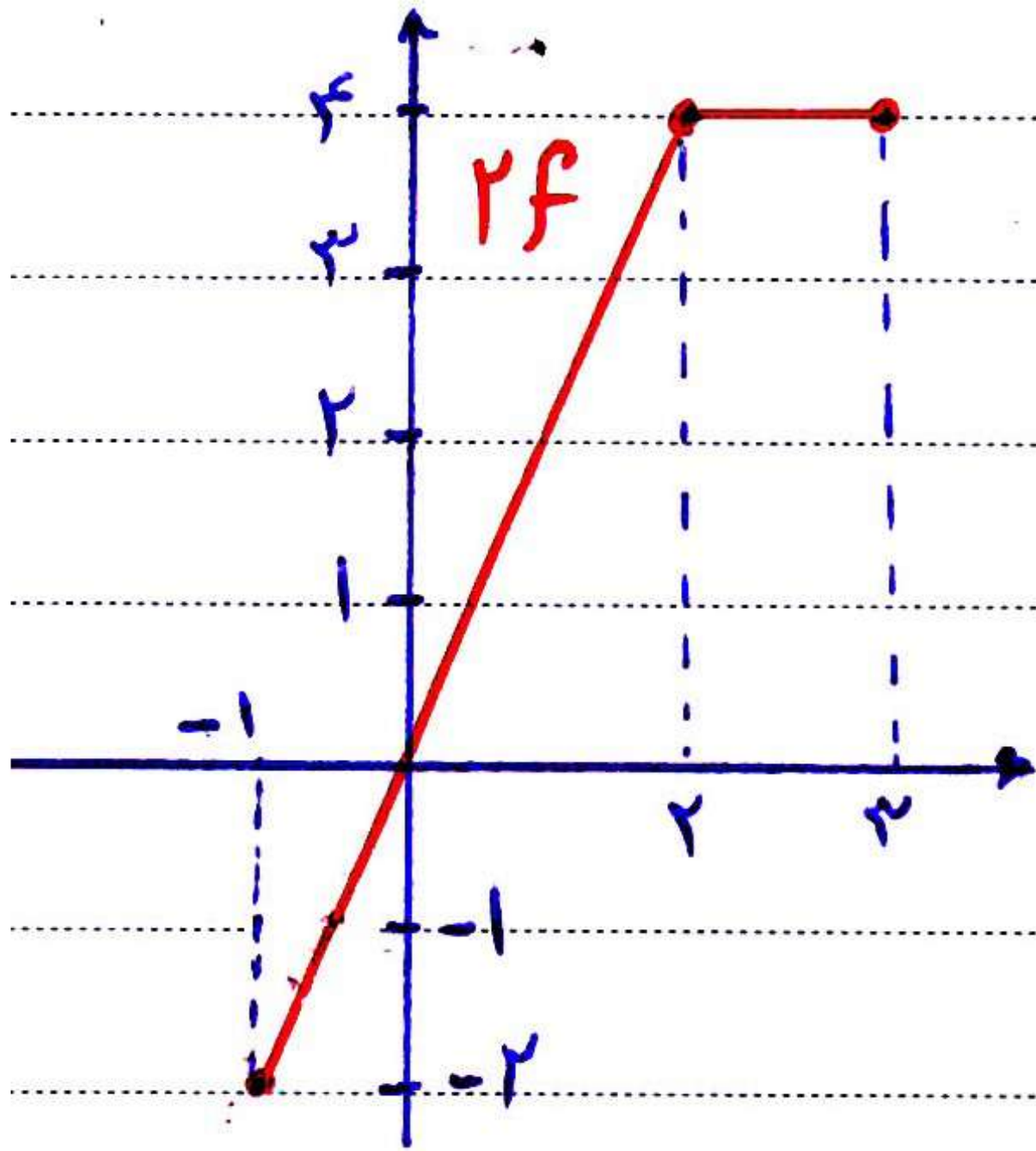
توجه: در حین محاسبه زوج مرتب $(3, 0)$ حذف شد زیرا $\frac{1}{0}$ تعریف نشده است.

مثال: در شکل رو به رو نمودار تابع f داده شده است.



با توجه به آن، نمودار توابع $f-1$ ، $2f$

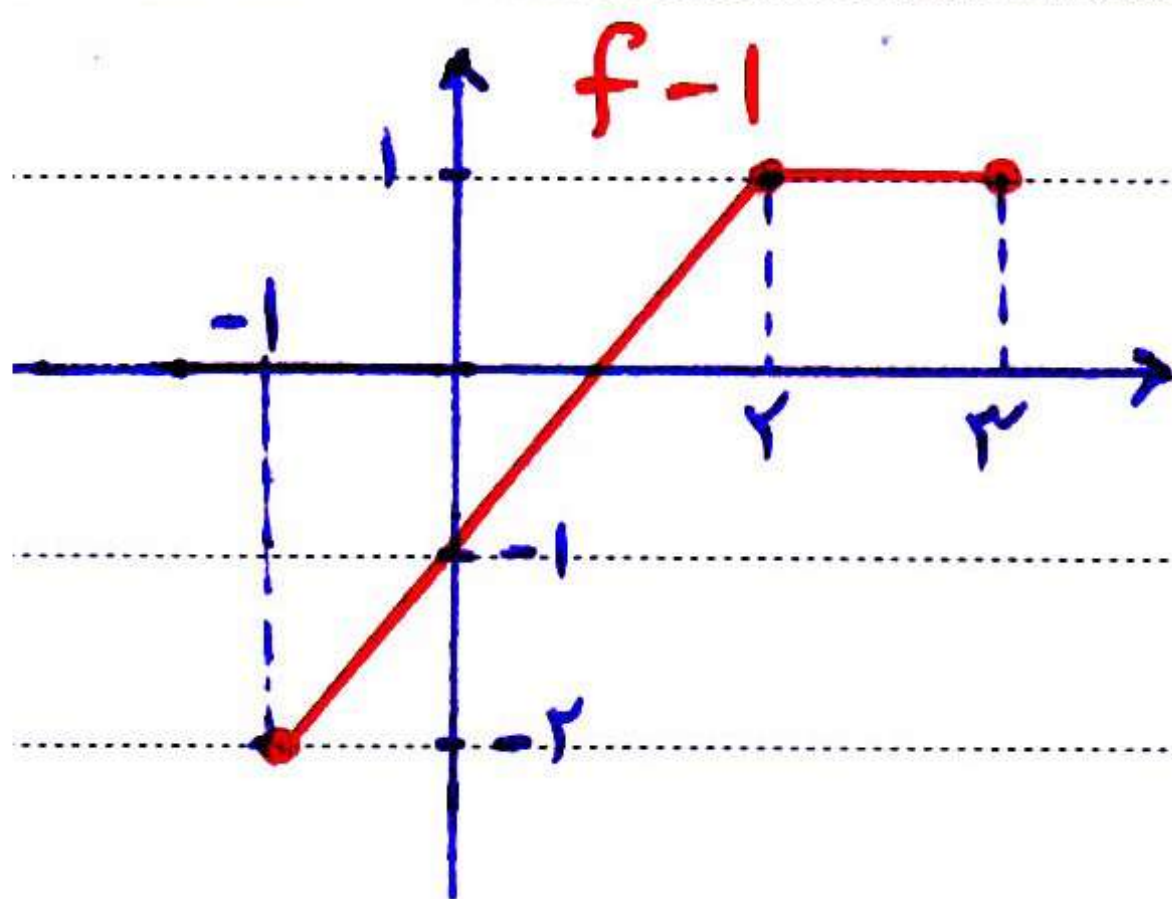
و $-f$ را رسم کنید.



$2f$: کافی است عرض هر نقطه از نمودار را

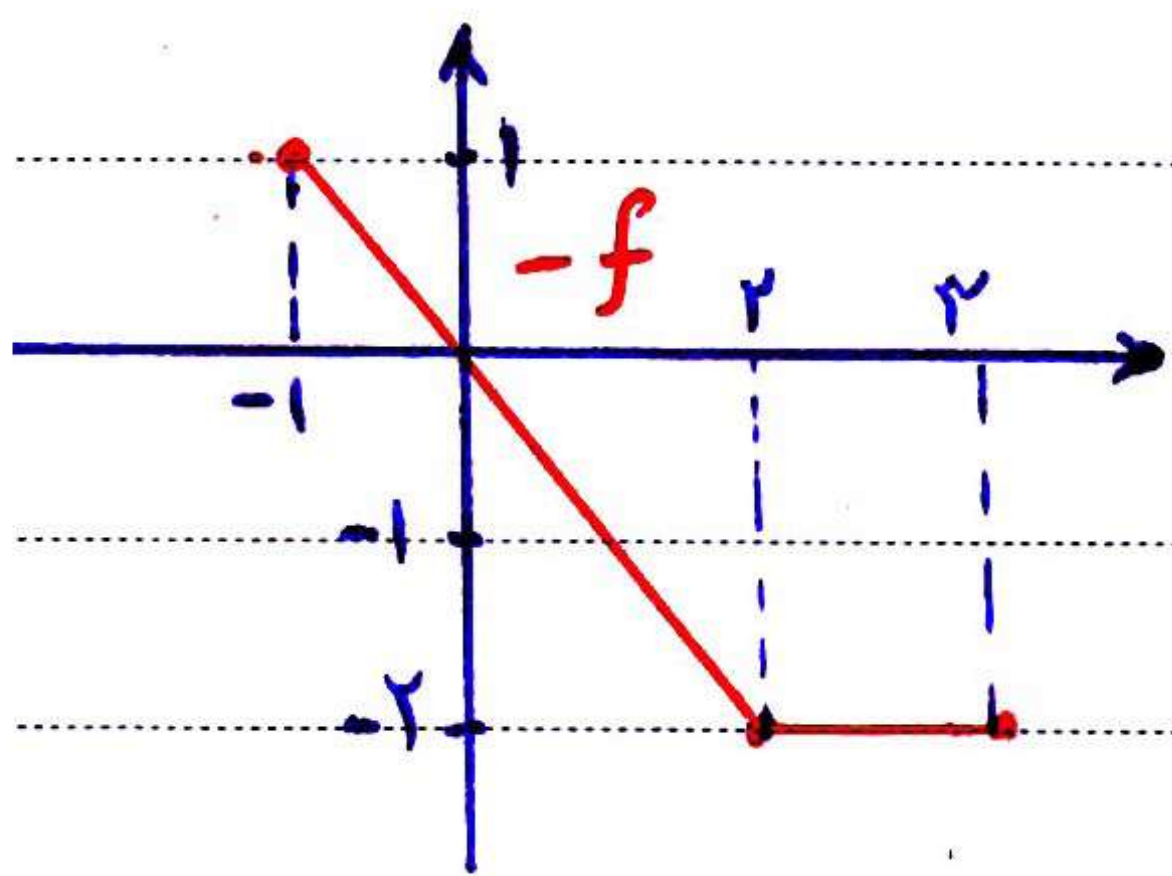
در 2 ضرب کنیم.

(طولها ثابت می مانند.)



$f-1$: کافیست از هر کدام از عرضهای نقاط، یک

واحد کم کنیم. (طولها تغییری نمی کنند.)



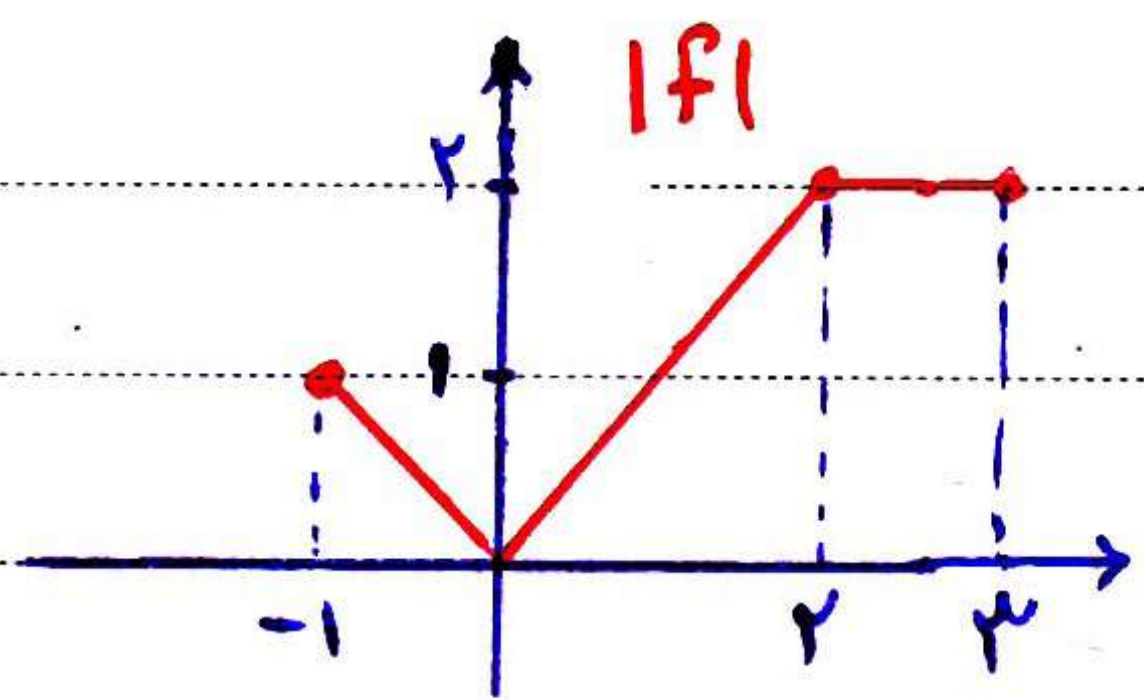
$-f$: کافیست عرضها را قرینه کنیم ولی طولها تغییر

نکنند.

به عبارت دیگر قرینگی نمودار را نسبت

به محور x ها (طولها) رسم می کنیم.

$|f|$: کافیت فقط عرضها متن را قرینه کنیم



و عرضهای مثبت دست نخورده باقی میمانند.

به عبارت دیگر، میتوان گفت، آن قسمت از نمودار بالای

محور x است ثابت مانده ولی آن قسمت که زیر محور x است آینه وار قرینه می شود و بالای آن

گام دوم: جمع، تفریق و ضرب دو تابع

هرگاه f و g دو تابع باشند، توابع $f+g$ ، $f-g$ ، و fg به صورت زیر تعریف میشوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$$

توجه داشته باشید دامنه هر کدام از موارد فوق، اشتراک بین دامنه ها f و g است به عبارت دیگر:

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$$

مثال: با فرض $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x}$ و $g(x) = \frac{x^2-4}{2x-2}$ مطلوب است fg به همراه دامنه آن.

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_{fg} = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

$$fg(x) = \frac{x-1}{x^2-2x} \times \frac{x^2-4}{2x-2} = \frac{x-1}{x(x-2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-1)} = \frac{x+2}{2x}$$

سؤال: هرگاه $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g = \{(0,1), (2,1), (3,7), (4,2)\}$ تعریف شوند، تابع $f+g$ را به دست آورید.

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$D_g = \{0, 2, 3, 4\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{2, 3, 4\}$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{0} + 1 = 1$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = \sqrt{1} + 7 = 8$$

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \sqrt{2} + 2$$

$$\Rightarrow f+g = \{(2,1), (3,8), (4, \sqrt{2}+2)\}$$

سؤال: در صورتی که $f = \{(1,4), (-1,5), (0,3)\}$ و $g = \{(-1,2), (0,7), (2,4), (3,1)\}$ تابع $f-g$ را به دست آورید.

$$D_f = \{-1, 0, 1\} \text{ و } D_g = \{-1, 0, 2, 3\}$$

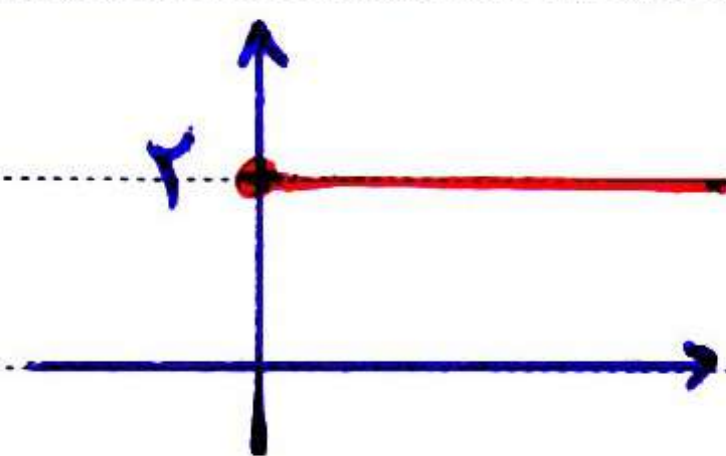
$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{-1, 0\}$$

$$f-g = \{(-1, 4-2), (0, 3-7)\} = \{(-1, 2), (0, -4)\}$$

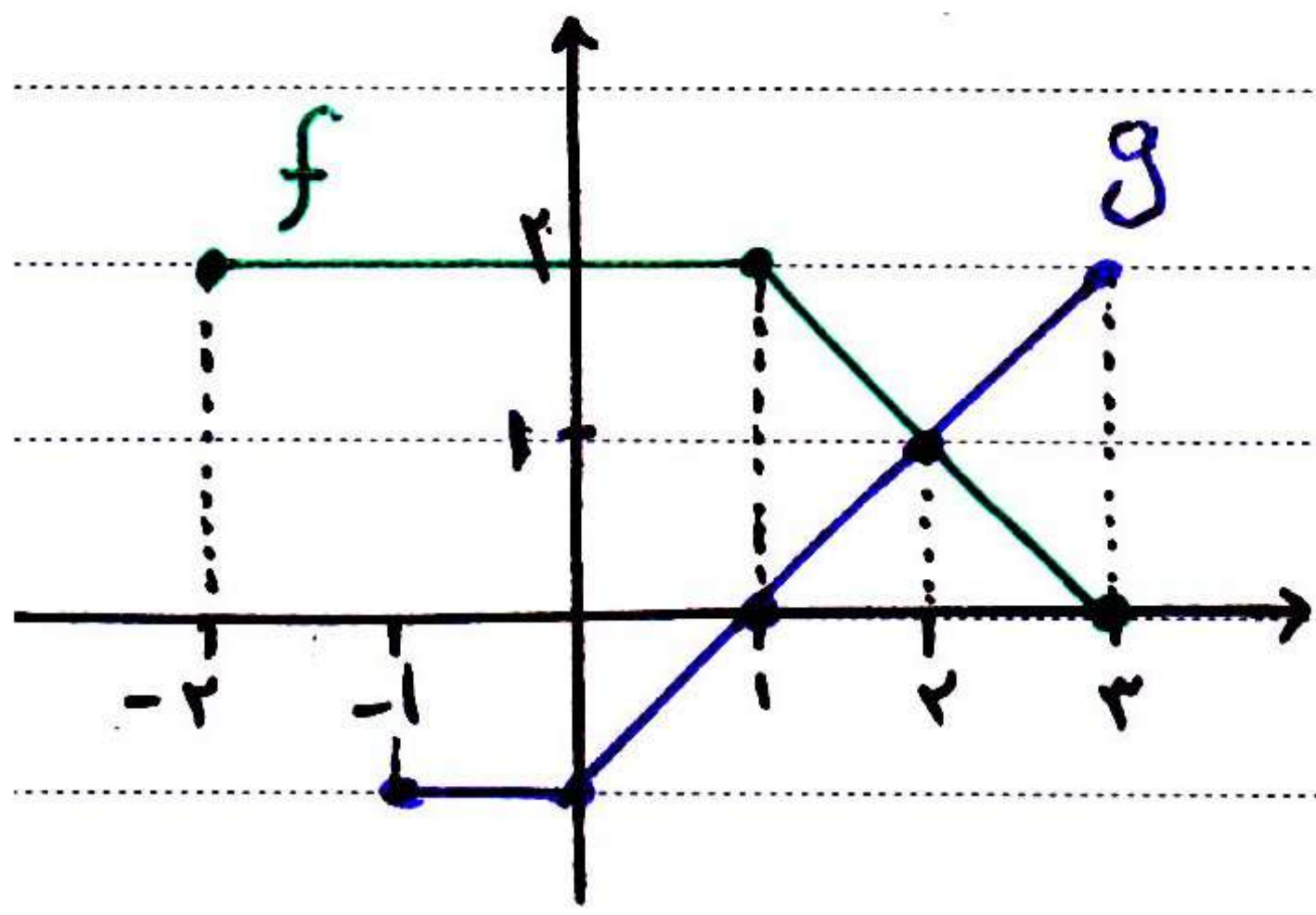
سؤال: با فرض $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = 2\sqrt{x}$ نمودار تابع $2f+g$ را رسم کنید.

$$x \geq 0 \Rightarrow D_f = D_g = [0, +\infty) \Rightarrow D_{2f+g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$$

$$(2f+g)(x) = 2f(x) + g(x) = 2 - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 2$$



مثال: در شکل مقابل نمودار دو تابع f و g رسم



شده است. نمودار هر یک از توابع $f+g$

و $g-f$ را با توجه به این شکل رسم کنید.

$$D_f = [-2, 3] \text{ و } D_g = [-1, 3] \xrightarrow{\cap} D_{f+g} = D_{g-f} = [-1, 3]$$

باید عمل جمع یا تفریق را روی عرض تقاطع به طول برابر دارند انجام داد بنابراین:

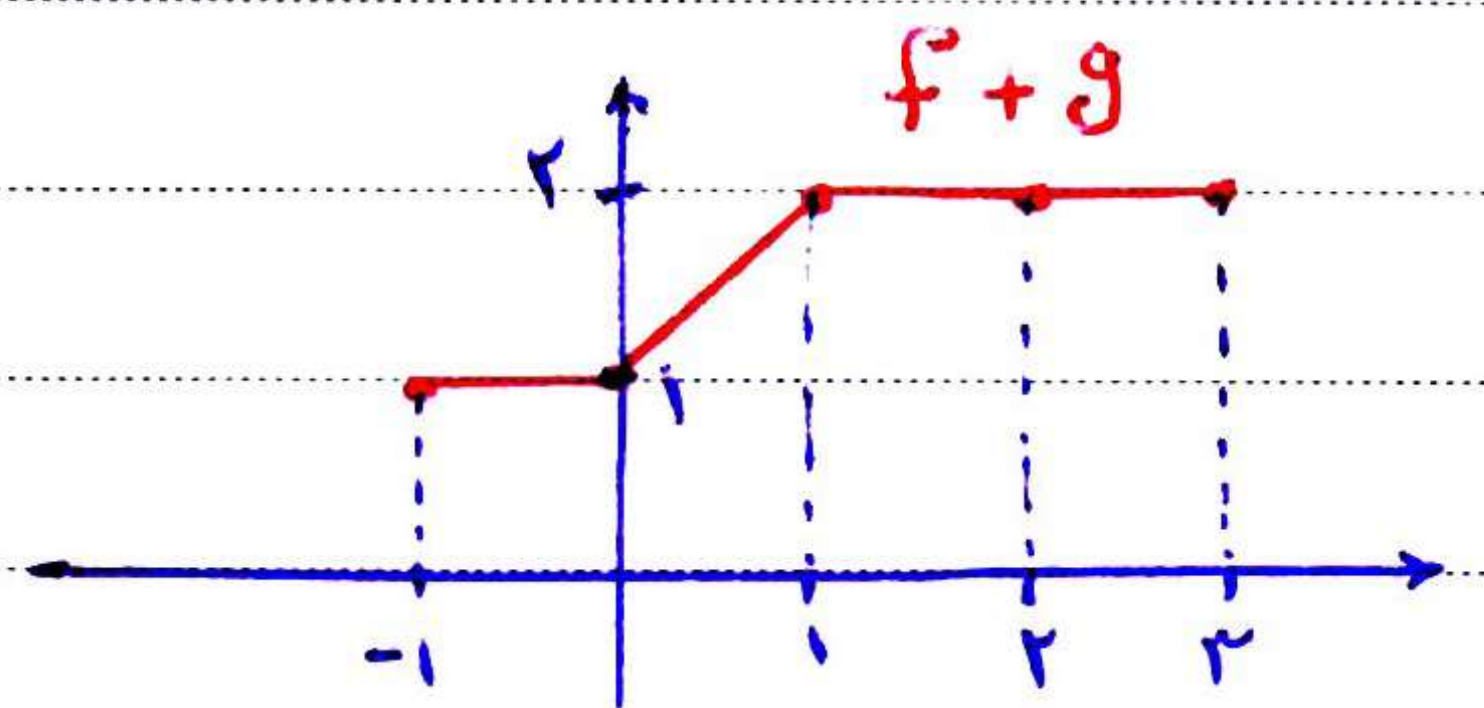
$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 2 + (-1) = 1$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + (-1) = 1$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 0 = 2$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 1 = 2$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 2 = 2$$



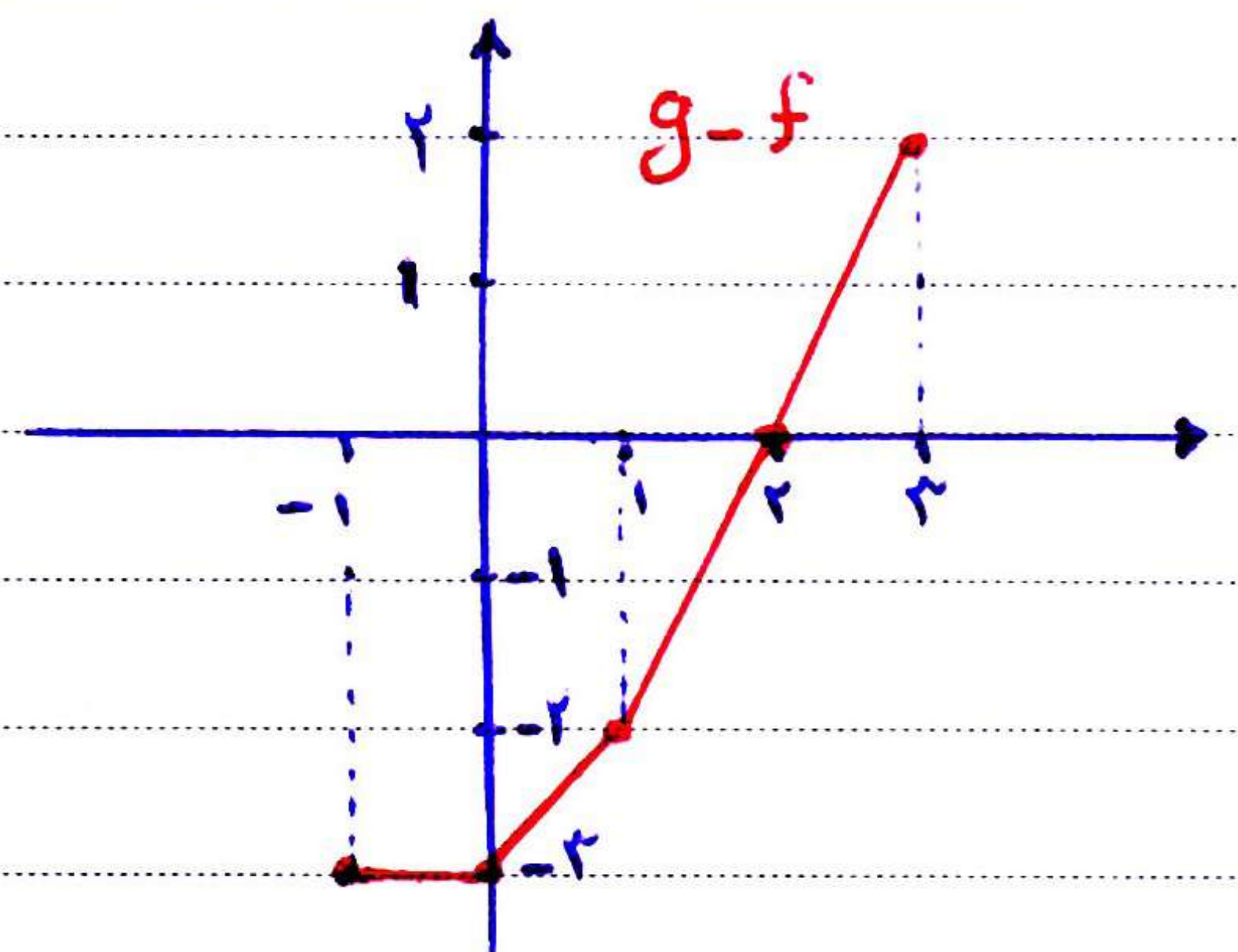
$$(g-f)(-1) = g(-1) - f(-1) = -1 - 2 = -3$$

$$(g-f)(0) = g(0) - f(0) = -1 - 2 = -3$$

$$(g-f)(1) = g(1) - f(1) = 0 - 2 = -2$$

$$(g-f)(2) = g(2) - f(2) = 1 - 1 = 0$$

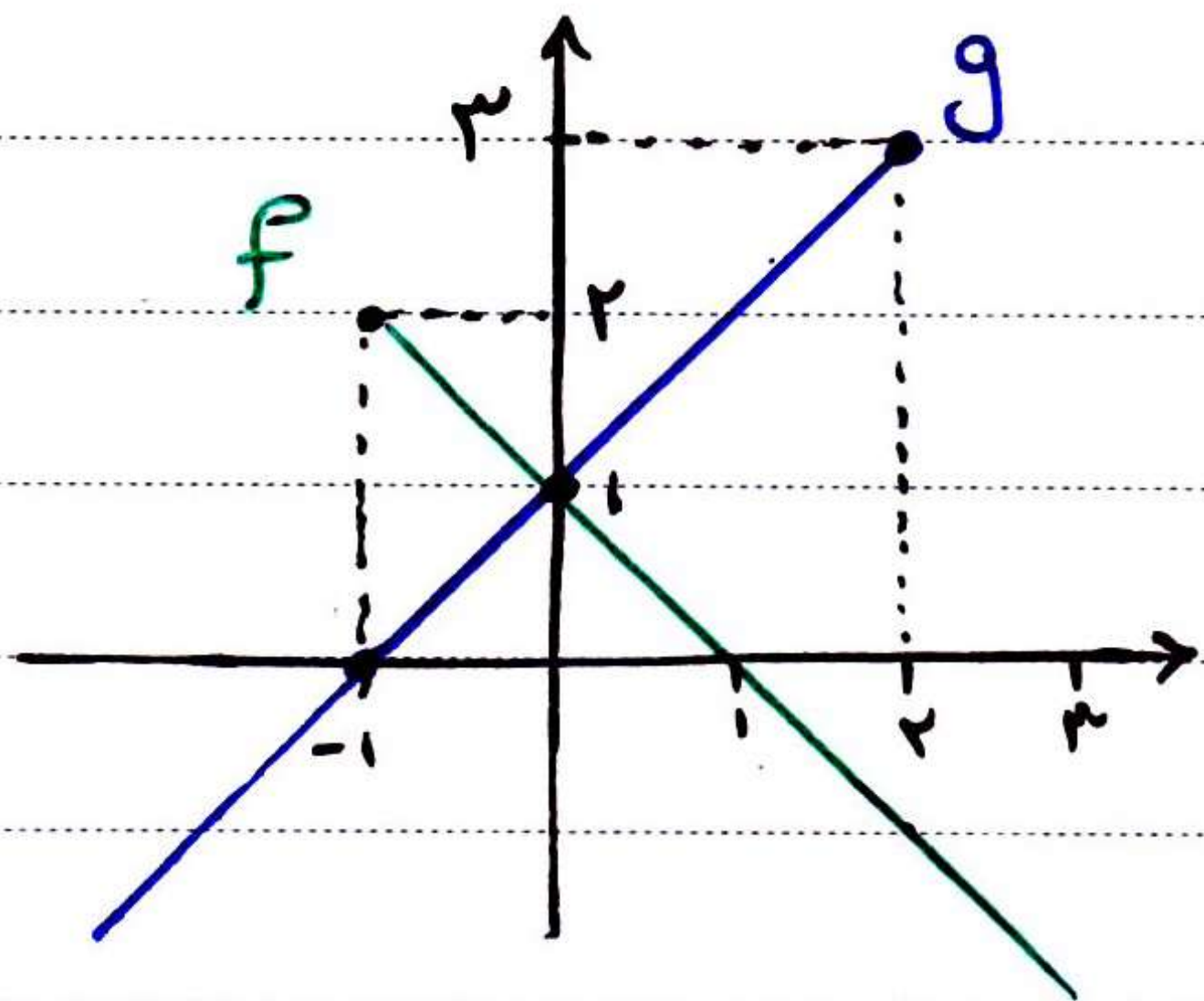
$$(g-f)(3) = g(3) - f(3) = 2 - 0 = 2$$



مثال: با توجه به نمودار توابع خطی f و g در

شکل مقابل، نمودار تابع $f \cdot g$ را

رسم کنید.



(ابتدا ضابطه‌ی هر دو تابع را تعیین می‌کنیم)

$$f \text{ تابع: } y = ax + b$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (-1, 2)} 2 = -a + b$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (0, 1)} 1 = 0 + b \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -x + 1$$

$$g \text{ تابع: } y = ax + b$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (-1, 0)} 0 = -a + b$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (0, 1)} 1 = 0 + b \Rightarrow b = 1$$

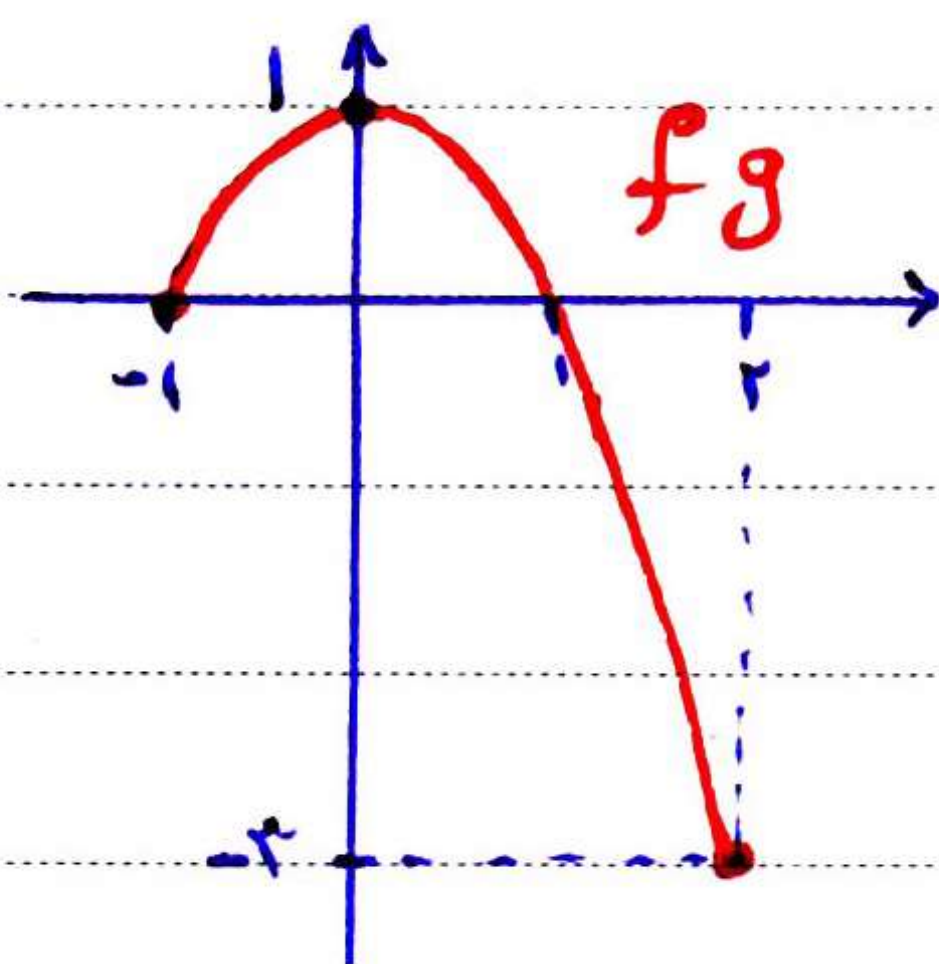
$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow g(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow (fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = (-x + 1)(x + 1) = 1 - x^2$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = [-1, 2]$$

بنابراین باید نمودار تابع $y = 1 - x^2$ را در بازه‌ی $[-1, 2]$ رسم کرد.

x	-1	0	2
y	0	1	-3



گام سوم: تقسیم دو تابع
 برای دو تابع f و g تعریف می‌کنیم

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

که دامنه‌ی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ مطلوب است دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ به همراه ضابطه‌ی آن.

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_g = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3-x} = 0 \Rightarrow 3-x = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = [-2, 3] - \{3\} = [-2, 3)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$$

مثال: در صورتی که توابع f و g به صورت $f = \{(-1, 2), (3, 4), (5, 9)\}$

و $g = \{(0, 4), (-1, 3), (2, 0), (4, -1)\}$ تعریف شده باشند تابع $\frac{f}{g}$

را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$$D_f = \{-1, 3, 4\}, \quad D_g = \{0, -1, 3, 4\}, \quad g(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = \{-1, 3, 4\} - \{3\} = \{-1, 4\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(-1, \frac{2}{3}\right), \left(4, \frac{9}{1}\right) \right\} = \left\{ \left(-1, \frac{2}{3}\right), (4, -9) \right\}$$

مثال: با فرض $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ و $g = \{(-2, 3), (-1, 4), (0, 0), (2, 4), (3, 0)\}$

مطلوب است تابع $\frac{g}{f}$.

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}, \quad D_g = \{-2, -1, 0, 2, 3\}, \quad f(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid f(x) = 0\} = \{-2, 0, 2, 3\} - \{2\} = \{-2, 0, 3\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{g(-2)}{f(-2)} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{g(3)}{f(3)} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{f} = \left\{ \left(-2, \frac{3}{4}\right), (0, 0), (3, 0) \right\}$$

مثال: اگر $g = \{(-2, 2), (0, 7), (1, 4)\}$ و $f = \{(1, 2), (2, -1), (3, 1)\}$ حاصل $\frac{(2f-g)(1)}{(f+g)(1)}$ را بیابید.

$$\frac{2f(1) - g(1)}{f(1) + g(1)} = \frac{4 - 4}{2 + 4} = \frac{0}{6} = 0$$

تربین: توابع $f(x) = ax^2 + 3$ و $g(x) = \begin{cases} bx, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

a و b را چنان باید که نمودار تابع $f-g$ محور طولها را در نقطه A به طول

قطع کرده، $(\frac{f}{g})(-1) = -\frac{4}{2}$ باشد.

$$(f-g)(1) = 0 \Rightarrow f(1) - g(1) = 0 \Rightarrow a + 3 - b = 0 \Rightarrow b = a + 3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = -\frac{4}{2} \Rightarrow \frac{f(-1)}{g(-1)} = -\frac{4}{2} \Rightarrow \frac{a+3}{-2} = -\frac{4}{2} \Rightarrow a+3 = 4 \Rightarrow a = 1$$

تربین: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ ، دامنه و ضابطه‌ی تابع $(\frac{g}{f})(x)$ را

بنویسید.

$$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow D_f = D_g = (-3, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+3}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid f(x) = 0\} = (-3, +\infty) - \{0\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{x-1}{\sqrt{x+3}}}{\frac{x}{\sqrt{x+3}}} = \frac{(x-1)\sqrt{x+3}}{x\sqrt{x+3}} = \frac{x-1}{x}$$

تربین: اگر $\frac{g}{f} = \{(1, 2), (2, 4)\}$ و $f = \{(1, 4), (2, 2), (3, -6)\}$ باشد،

تابع g را تعیین کنید. مسئله چند جواب دارد؟

واضح است که $g = \frac{g}{f} \times f$ ، بنابراین :

$$g(1) = \left(\frac{g}{f}\right)(1) \times f(1) = 2 \times 4 = 8 \quad \text{و} \quad g(2) = \left(\frac{g}{f}\right)(2) \times f(2) = 4 \times 2 = 8$$

$$\Rightarrow g = \{(1, 8), (2, 8)\}$$

این مسئله بی شمار جواب دارد .
 به این صورت که می توان محدودیاتی بی شمار عدد حقیقی به عنوان طول (البته به جز عدد ۳) برای تابع g با عرض های دلخواه تعریف کرد. به عنوان نمونه :

$$g = \{(1, 8), (2, 8), (-1, 2), (5, 0), (9, 10)\}$$

$$g = \{(1, 8), (2, 8), (7, 8)\}$$

⋮

تمرین : اگر $f(x) = ax^2 + 2x$ و $g(x) = x$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x + 2$ مقدار a را بیابید.

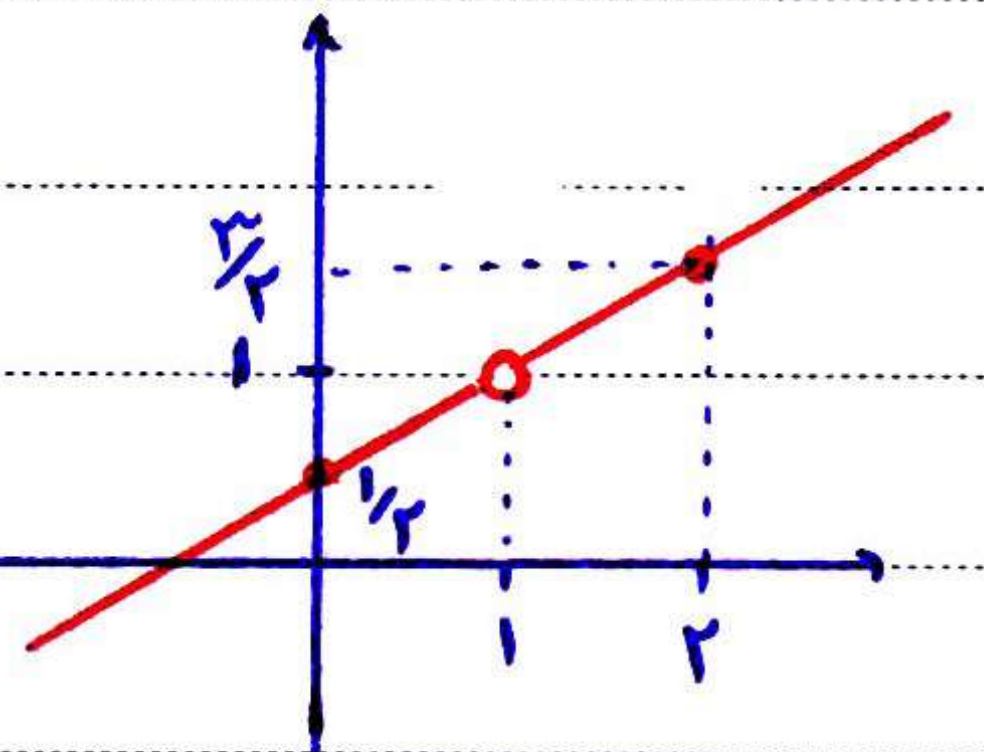
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow 2x + 2 = \frac{ax^2 + 2x}{x} = \frac{x(ax + 2)}{x} = ax + 2 \Rightarrow a = 2$$

تمرین : اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 2x - 2$ ، نمودار تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را رسم کنید.

$$D_f = D_g = \mathbb{R}, \quad g(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{2x - 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+1}{2} \quad \text{و} \quad x \neq 1$$



حل چند نمونه سوال

1- فرضیه $h = \{(1, 2), (4, 0), (-1, 2), (9, -1)\}$, $g(x) = \begin{cases} x+2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

مطلوب :

الف) $(\frac{f}{g})(16) = \frac{f(16)}{g(16)} = \frac{\frac{d}{f}}{\frac{1}{16}} = \frac{1 \times d}{f \times 16} = \frac{d}{16f}$

ب) $(\frac{g-f}{h+f})(4) = \frac{g(4)-f(4)}{h(4)+f(4)} = \frac{6-2}{0+2} = 1$

پ) $(\frac{g}{1-h})(-1) = \frac{g(-1)}{1-h(-1)} = \frac{-1}{1-2} = 1$

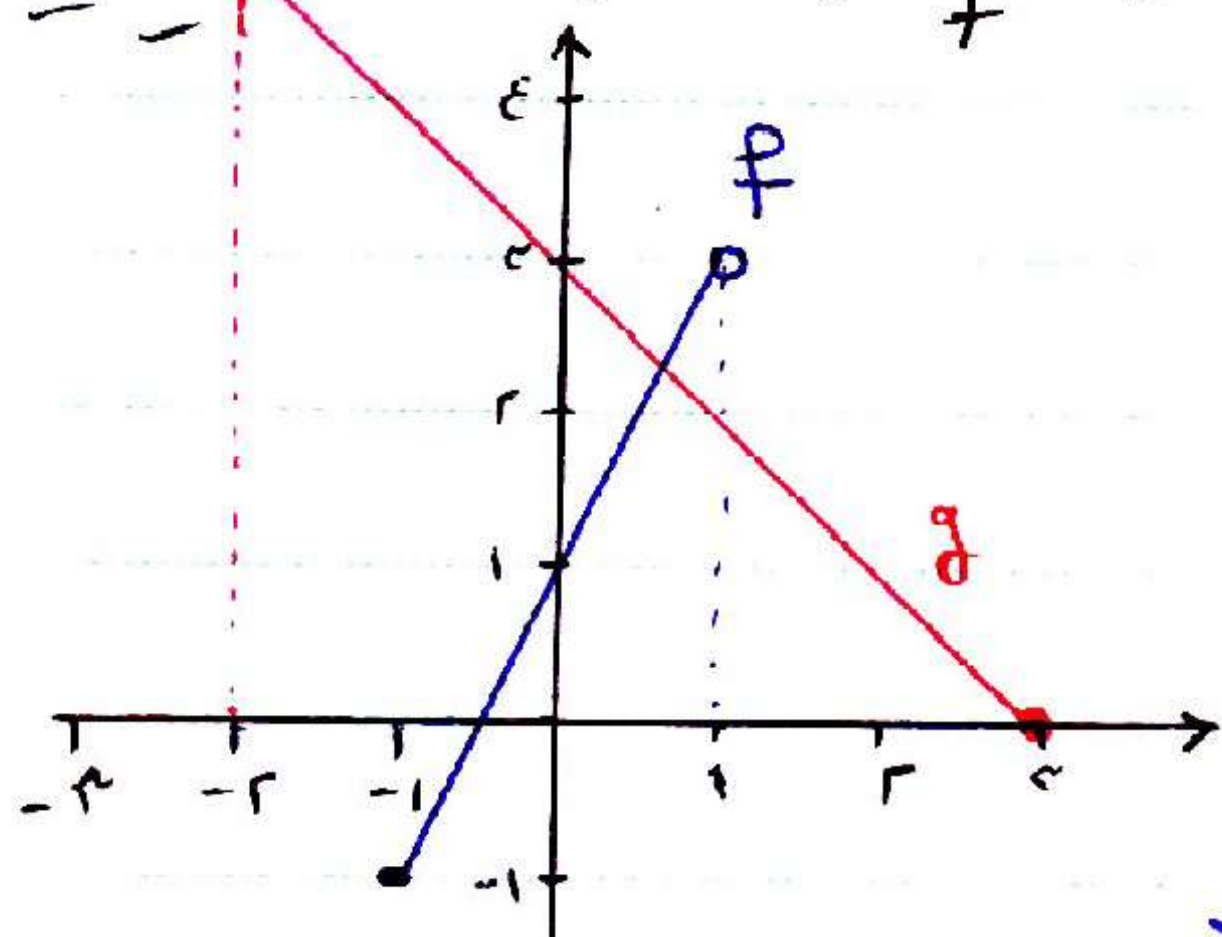
د) $(2f-g+h)(9) = 2f(9) - g(9) + h(9) = 2 \times 2 - 11 + (-1) = -8$

2- بازاریجه مقدار از m برابر توابع $f(x) = x^2 - mn$, $g(x) = \sqrt{x+1} + 3$ دارم:

$(2f-g)(1) = 10 \rightarrow 2f(1) - g(1) = 10 \rightarrow 2(1 - mn) - (3+3) = 10$

$\Rightarrow 12n - 16m - 6 = 10 \Rightarrow -16m = -112 \rightarrow m = \frac{112}{16}$

3- با توجه به شکل، مقدار توابع f , g , توابع $f+g$, $f \times g$ و $\frac{g}{f}$ را به همراه دامنه تعیین کنید.



تابع f : $y = ax + b$

$\begin{matrix} x=-1 \\ y=-1 \end{matrix} \rightarrow -a + b = -1$

$\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow a + b = 1 \rightarrow b = 1$

$\rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 1$
 $D_f = [-1, 1)$

تابع g : $y = ax + b$

$\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow a + b = 1$

$\begin{matrix} x=3 \\ y=0 \end{matrix} \rightarrow 0 + b = 3 \rightarrow b = 3$

$\rightarrow a = -1 \Rightarrow g(x) = -x + 3$
 $D_g = [1, 3]$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + (-x + 3) = x + 4$, $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1, 1)$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (2x + 1)(-x + 3) = -2x^2 + 5x + 3$, $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [-1, 1)$

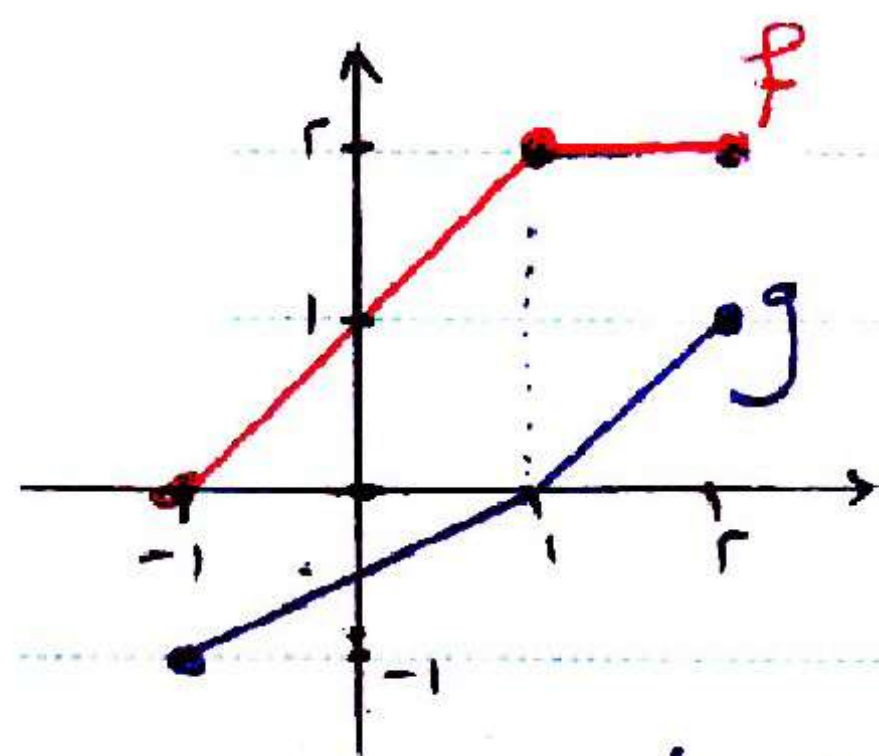
$(\frac{g}{f})(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{-x+3}{2x+1} \rightarrow D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{f=0\} = [-1, 1) - \{-\frac{1}{2}\}$

مطلوبه: $g = \{(1, 2), (-1, 0), (\frac{1}{r}, 1), (0, -1)\}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ~~1-4~~

الف) $F+g = \{(1, 2\frac{1}{r}), (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}), (0, 0)\}$

ب) $\frac{F}{g} = \{(1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{r}, \frac{2}{r}), (0, -1)\}$

ج) $\frac{g}{F} = \{(1, 2), (\frac{1}{r}, \frac{2}{r}), (0, -1)\}$



۵- با توجه به نمودار توابع F و g ، ظاهر تابع $F-g$ را بنویسید

$y = ax + b$ $\left\{ \begin{array}{l} x = -1 \rightarrow -a + b = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \rightarrow 0 + b = 1 \rightarrow b = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a = 1 \Rightarrow y = x + 1$

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} x+1 & -1 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < r \end{cases}$

$y = ax + b$ $\left\{ \begin{array}{l} x = -1 \rightarrow -a + b = -1 \\ y = -1 \\ x = 1 \rightarrow a + b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow b = -\frac{1}{r}, a = \frac{1}{r} \rightarrow y = \frac{1}{r}x - \frac{1}{r}$

$y = ax + b$ $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow a + b = 0 \\ y = 0 \\ x = r \rightarrow ra + b = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a = 1, b = -1 \rightarrow y = x - 1$

$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{1}{r}x - \frac{1}{r} & -1 < x < 1 \\ x - 1 & 1 < x < r \end{cases}$

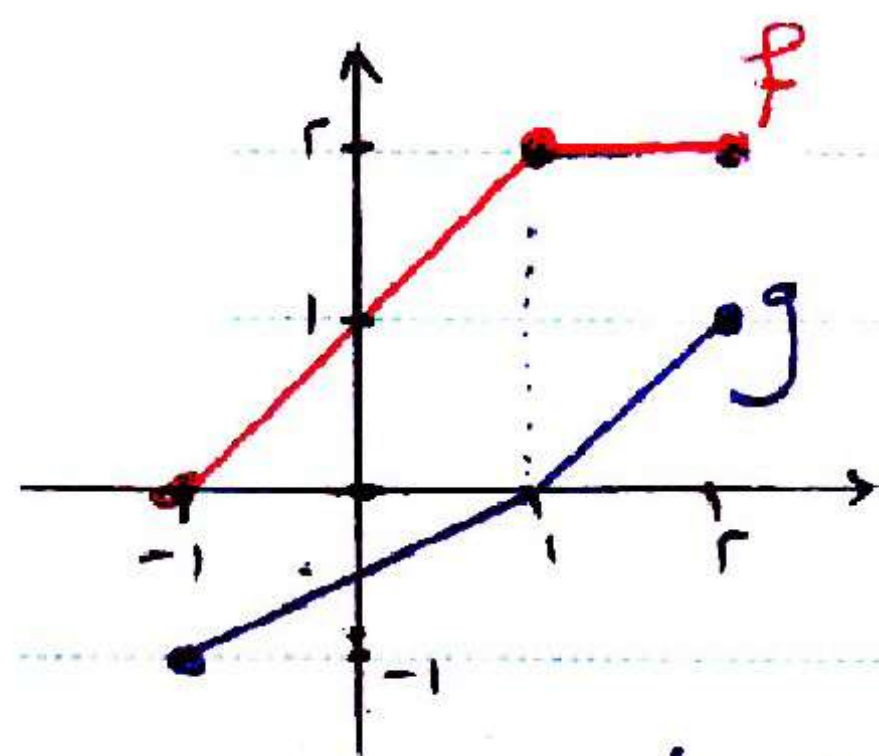
$\Rightarrow (F-g)(x) = \begin{cases} (x+1) - (\frac{1}{r}x - \frac{1}{r}) & -1 < x < 1 \\ 2 - (x-1) & 1 < x < r \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{r}x + \frac{r}{r} & -1 < x < 1 \\ 3 - x & 1 < x < r \end{cases}$

مطلوبه: $g = \{(1, 2), (-1, 0), (\frac{1}{r}, 1), (0, -1)\}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ \nearrow ۴

الف) $F+g = \{(1, 2\frac{1}{r}), (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}), (0, 0)\}$

ب) $\frac{F}{g} = \{(1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{r}, \frac{2}{r}), (0, -1)\}$

ج) $\frac{g}{F} = \{(1, 2), (\frac{1}{r}, \frac{2}{r}), (0, -1)\}$



۵- با توجه به نمودار توابع F و g، ظاهر تابع $F-g$ را بنویسید

$$y = ax + b \begin{cases} x = -1 \rightarrow -a + b = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \rightarrow 0 + b = 1 \rightarrow b = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow a = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} x+1 & -1 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < r \end{cases}$$

$$y = ax + b \begin{cases} x = -1 \rightarrow -a + b = -1 \\ y = -1 \\ x = 1 \rightarrow a + b = 0 \end{cases} \rightarrow b = -\frac{1}{r}, a = \frac{1}{r} \rightarrow y = \frac{1}{r}x - \frac{1}{r}$$

$$y = ax + b \begin{cases} x = 1 \rightarrow a + b = 0 \\ y = 0 \\ x = r \rightarrow ra + b = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow a = 1, b = -1 \rightarrow y = x - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{1}{r}x - \frac{1}{r} & -1 < x < 1 \\ x - 1 & 1 < x < r \end{cases}$$

$$\Rightarrow (F-g)(x) = \begin{cases} (x+1) - (\frac{1}{r}x - \frac{1}{r}) & -1 < x < 1 \\ 2 - (x-1) & 1 < x < r \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{r}x + \frac{r}{r} & -1 < x < 1 \\ 3 - x & 1 < x < r \end{cases}$$

ترکیب توابع: تعریف میکنیم: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

یعنی در تابع f هر کجا x داریم، $g(x)$ را جایگزین می‌کنیم.

مسئله: با فرض $f(x) = 2x + 4$ ، $g(x) = 2 - \sqrt{x}$ مطلوب است:

الف) $f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(2 - \sqrt{x}) + 4 = 11 - 2\sqrt{x}$

ب) $g \circ f(x) = g(f(x)) = 2 - \sqrt{2x + 4} = -\sqrt{2x + 4} + 2$

پ) $f \circ f(x) = f(f(x)) = 2(2x + 4) + 4 = 4x + 12$

د) $g \circ g(x) = g(g(x)) = 2 - \sqrt{2 - \sqrt{x}} = 2 - \sqrt{2 - \sqrt{x}}$

مسئله 1: مقدار $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ را بیابید.

اگر $x \geq 0 \Rightarrow f(-f(x)) = f(-\underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{مثبت}}) = 1$

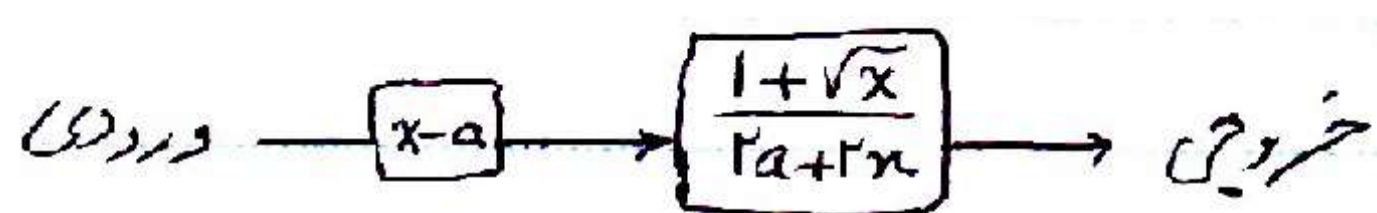
$\Rightarrow f(-f(x)) = 1$

اگر $x < 0 \Rightarrow f(-f(x)) = f(-1) = 1$

مسئله 1: اگر $f(x) = 3x + a$ ، $g(x) = 2x - 1$ ، a را بیابید تا $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ باشد.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(2x - 1) + a = 6x - 3 + a$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = 2(3x + a) - 1 = 6x + 2a - 1$
 $\Rightarrow 6x - 3 + a = 6x + 2a - 1 \Rightarrow a = -2$

مسئله 2: اگر به اعداد ورودی 2 ، خروجی ماشین ورودی برابر $\frac{1}{2}$ باشد مقدار a کدام است؟



$2 \rightarrow \frac{1 + \sqrt{2 - a}}{2a + 2 - 2a} \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{2 - a}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \sqrt{2 - a} = 1 \Rightarrow \sqrt{2 - a} = 0 \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow \sqrt{2 - a} = 0 \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$

مسئله 1: اگر $f(x) = x + a$ ، $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، a, b, c را طوری تعیین کنید که $f \circ g(x) = x^2 - 3x + 4$ باشد.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = ax^2 + bx + c + a = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow a = 1, b = -3, c + a = 4 \Rightarrow c = 3$

سؤال: اگر خروجی از ماشین کس مقابل $\frac{2}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟ (براساسی، با فر $\frac{1}{2}$)

ورودی \rightarrow $\boxed{2x-2}$ \rightarrow $\boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+1}}$ \rightarrow خروجی

$$\sqrt{x} = \text{ورودی} \Rightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2}+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3\sqrt{2x-2} + 3 = 2x-2 \Rightarrow 3\sqrt{2x-2} = 2x-5$$

$$\xrightarrow{\div 2} \sqrt{2x-2} = \frac{2}{3}x - \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} \varepsilon(2x-2) = (\frac{2}{3}x - \frac{5}{2})^2 \Rightarrow 9x^2 - 28x + 23 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(9x-11) = 0 \begin{cases} \text{حوا} \rightarrow x=3 \\ \text{عق} \rightarrow x=\frac{11}{9} \end{cases}$$

سؤال: اگر خروجی ماشین کس مقابل برابر ورودی $\frac{1}{2}$ ، برابر ε در A کدام است؟ (براساسی، با فر خارج از کشور)

ورودی \rightarrow $\boxed{2x+A}$ \rightarrow $\boxed{\sqrt{x}-2x-\varepsilon}$ \rightarrow خروجی

$$\sqrt{\varepsilon+A} - 2(\varepsilon+A) - \varepsilon = -\varepsilon \rightarrow \sqrt{\varepsilon+A} = 2\varepsilon + \varepsilon \xrightarrow{\text{توان } 2} \varepsilon A^2 + 2\varepsilon A + \varepsilon = 0$$

$$\Delta = 9 \Rightarrow A = \frac{-2\varepsilon \pm 3}{\varepsilon} \begin{cases} \text{عق} \rightarrow A = \frac{-11}{\varepsilon} \\ \text{حوا} \rightarrow A = -2 \end{cases}$$

سؤال: اگر $F = \{(1,2), (2,0), (2,-1)\}$ و $g = \{(2,3), (0,4), (-1,1)\}$ باشد، بیس $F \circ g$ دایره $x \rightarrow g \rightarrow F$ و $(2,0)$ جواب است.

الف) $F \circ g = \{(2,0), (-1,2)\}$

ب) $g \circ F = \{(1,3), (2,4), (2,1)\}$

پ) $F \circ F = \{(1,-1)\}$

ت) $g \circ g = \{\}$

مثال: اگر $F(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g = \{(1, 2), (4, 3), (9, 4), (16, 5)\}$ ، مقدار a ، $g \circ f(a) = 4$ را بیابید.
(سراسر نمره 9)

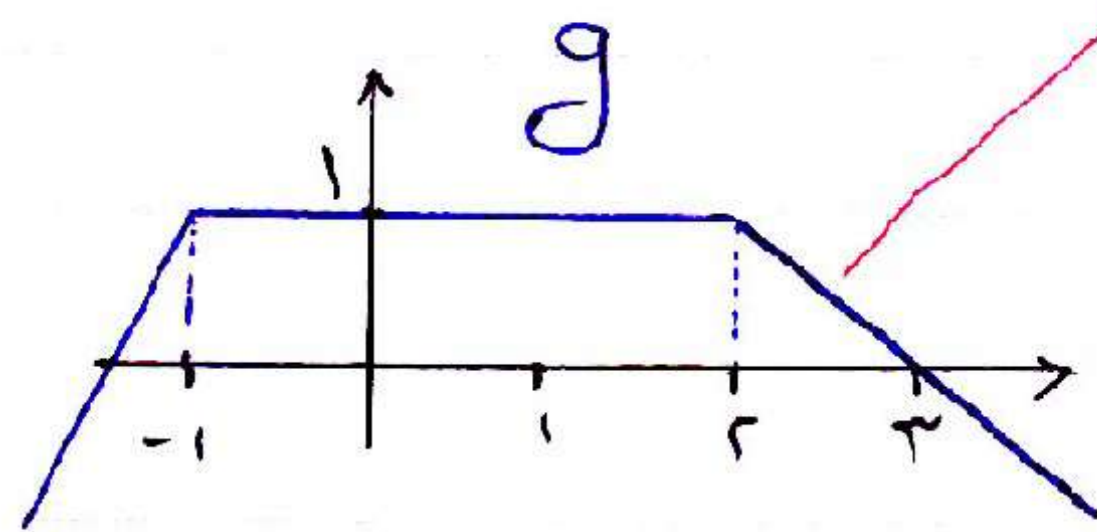
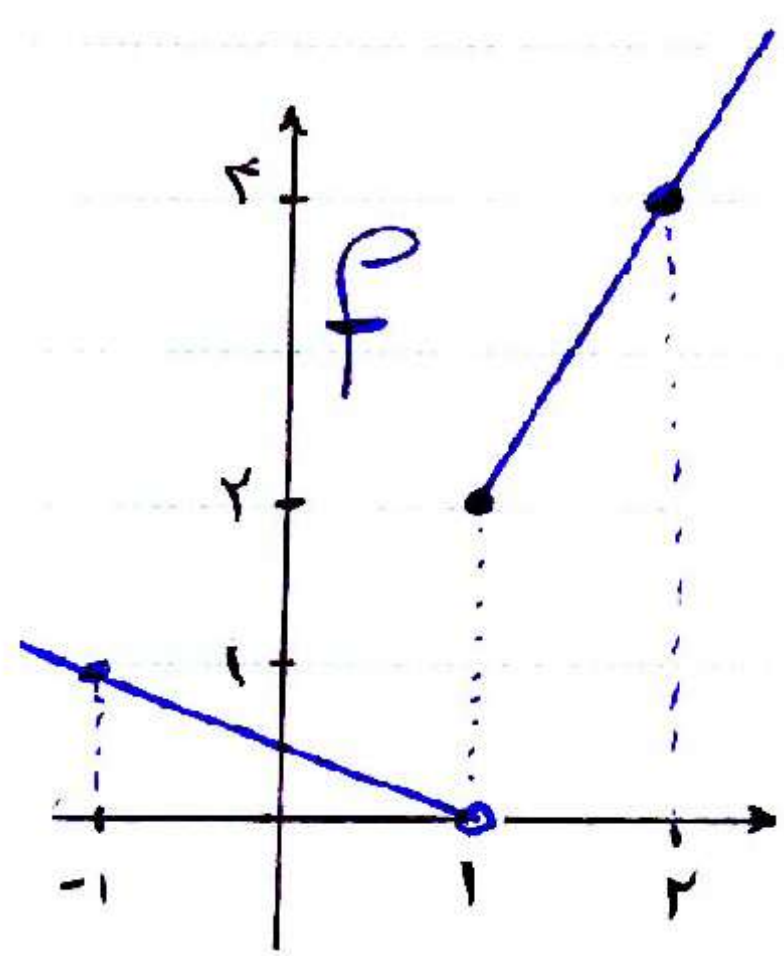
$$g(f(a)) = 4 \rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 4 \rightarrow \sqrt{a} = 4 - a$$

$$g(4) = 4 \rightarrow \xrightarrow{\text{مربع}} a^2 - 13a + 26 = 0$$

$$\rightarrow a = 2 \quad \text{حرف اول}$$

$$a = 9 \quad \text{حرف دوم}$$

مثال: نمودار توابع F و g داده شده اند مقدار تابع $g \circ f$ را از $x = 4$ را بیابید.



$x = 4$ مربوط به این قطعه از f است
لازمه های این خط را می نویسیم

$$y = ax + b \quad \begin{matrix} (2, 0) \rightarrow 2a + b = 0 \\ (2, 1) \rightarrow 2a + b = 1 \end{matrix}$$

$$b = 3, a = -1$$

$$g(4) = -1 \leftarrow y = -x + 3 \leftarrow$$

$$F \circ g(4) = F(g(4)) = F(-1) = 1$$

دامنه $F \circ g$:

$$D_{F \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال: اگر $F(x) = \frac{x}{x-2}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، دامنه تابع $F \circ g$ را بیابید.

$$D_f = \{x \neq 2\} \quad , \quad D_g = \{x \geq 1\}$$

$$D_{F \circ g} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} \neq 2\} = [1, +\infty) - \{4\}$$

$$\xrightarrow{\text{مربع}} x-1 \neq 4 \rightarrow x \neq 5$$

مثال: برای در تابع $g \circ f$ ، $g(x) = \frac{1}{x-3}$ ، $f(x) = \frac{x}{x}$ ، دامنه آن را بیابید.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\frac{x}{x} - 3} = \frac{1}{\frac{x-3x}{x}} = \frac{x}{x-3}$$

$$D_f = \{x \neq 0\} \quad , \quad D_g = \{x \neq 3\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq 0 \mid \frac{x}{x} \neq 3\} = \mathbb{R} - \{0, \frac{3}{2}\}$$

$\frac{3}{2} \neq \frac{x}{x} \rightarrow 3 \neq 1$
 $x \neq \frac{3}{2}$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ مطلوب است $f \circ g$ و $g \circ f$ (با نمودار)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$$

$$D_f = \{x \leq 1\} , D_g = \{x \geq 1\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} \leq 1\} = [1, 2]$$

$\xrightarrow{\text{با نمودار}} x-1 \leq 1 \rightarrow x \leq 2$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = x^2 + 2$ ، دامنه و تصویر تابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ را بنویسید.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$D_f = \{x \geq 1\} , D_g = \mathbb{R} \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 \geq 1\} = \mathbb{R}$$

$\xrightarrow{\text{با نمودار}} x^2 \geq -1$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x-1}^2 + 2 = x-1 + 2 = x+1$$

$$D_{g \circ f} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

$\xrightarrow{\text{با نمودار}}$

توجه: یا متن f یا g یا توجه به معلوم بودن ترتیب آن.

مثال: تابع f را چنان بیابید که $g(x) = 3x-1$ ، $g \circ f(x) = 2x+7$.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 3f - 1 = 2x + 7 \Rightarrow 3f = 2x + 8 \rightarrow f = \frac{2x+8}{3}$$

مثال: تابع g را چنان بیابید که $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$ ، $f \circ g(x) = 3-x$.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{g^3+1}{2} = 3-x \rightarrow g^3+1 = 6-2x \rightarrow g^3 = 5-2x$$

$$\Rightarrow g = \sqrt[3]{5-2x}$$

مثال: تابع f را چنان بسازید که $f \circ g(x) = 2x+1$ ، $g(x) = x-2$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-2) = 2x+1$$

$$x-2 = t \rightarrow x = t+2$$

$$f(t) = 2(t+2) + 1 = 2t+5$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x+5$$

مثال: تابع g را چنان بسازید که $g \circ f(x) = 3-x$ ، $f(x) = \frac{x+1}{2}$

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3-x$$

$$\frac{x+1}{2} = t \rightarrow x = 2t-1$$

$$\Rightarrow g(t) = 3 - (2t-1) = 4-2t \Rightarrow g(x) = 4-2x$$

مسئله ریاضی ۹۱: اگر $g(x) = 2x-1$ و $f \circ g(x) = \frac{x}{x-2}$ مقدار $f(2)$ را بیابید

$$f(g(x)) = f(2x-1) = \frac{x}{x-2}$$

$$2x-1 = c \rightarrow x = 2 \rightarrow f(c) = \frac{2}{2-c} = -2$$

مسئله ریاضی ۹۷: اگر $f(2x-2) = 2x^2 - 12x + 13$ مقدار $f(x)$ را بیابید

$$2x-2 = t \rightarrow x = \frac{t+2}{2}$$

$$\Rightarrow f(t) = 2\left(\frac{t+2}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{t+2}{2}\right) + 13 = \frac{t^2+4t+4}{2} - 3(t+2) + 13$$

$$= \frac{t^2+4t+4}{2} - 3t - 6 + 13 = \frac{t^2+4t+4}{2} - 3t + 7$$

$$= \frac{t^2+4t+4-6t+14}{2} = \frac{t^2-2t+18}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-2x+18}{2}$$

مسئله ریاضی خاج از شهر ۹۱: اگر توابع f و g به عنوان ماتریس به صورت $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$ ، $g \circ f(x) = 2x+4$ مقدار $f(2)$ را بیابید

$$x=2 \Rightarrow g(f(2)) = 2 \times 2 \Rightarrow 2f(2) + 4 = 4 \Rightarrow f(2) = 2$$