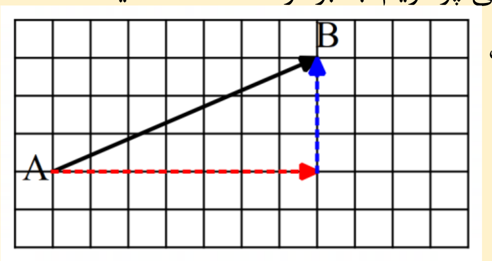
خود آموز شماره: ۸۰۱۵ **پایه: هشتم** **درس: جمع بردارها**

فعالیت :

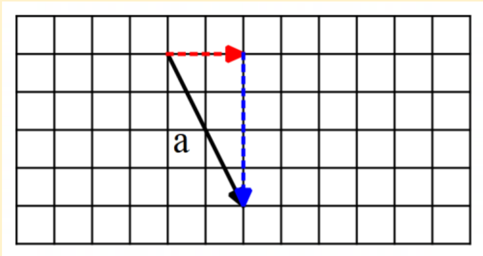
در پایه هفتم با بردار آشنا شدید، حال به یادآوری چگونه نوشتن مختصات بردار می پردازیم. به بردار $\overrightarrow{AB}$ دقت کنید. می خواهیم از نقطه A به نقطه B برسیم. فکر کنید روباتی می خواهد این حرکت را انجام دهد. این روبات همیشه اول افقی می رود و بعد عمودی حرکت می کند.



۷واحد به سمت راست طول بردار است که با عدد **۷**+ نشان می دهیم.

۳واحد به سمت بالا عرض بردار است که برابر با **۳**+ است.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}۷\\۳\end{bmatrix}$$



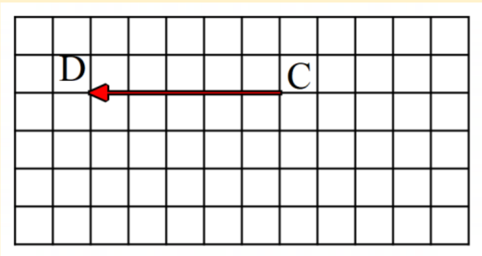
به بردار $\vec{a}$ در شکل مقابل دقت کنید.می خواهیم مختصات آن را بنویسیم.

این بردار **۲** واحد به سمت راست و **۴** واحد به سمت پایین حرکت کرده است.

در نتیجه طول بردار **۲**+ و عرض بردار **۴**− است.

مختصات بردار به صورت مقابل است.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\-۴\end{bmatrix}$$



مختصات بردار مقابل را بنویسید.

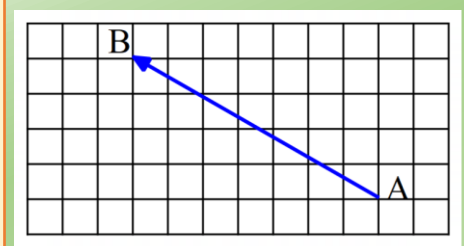
اگر دقت کنید این بردار فقط **۵** واحد به چپ حرکت کرده است .

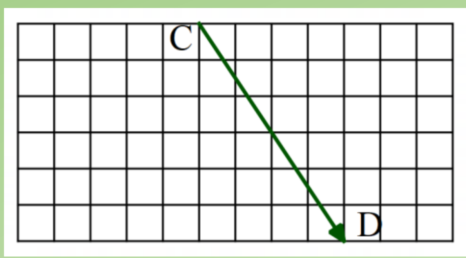
و حرکت عمودی ندارد. پس طول بردار **۵**− و عرض بردار ۰ است. $\overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}-۵\\۰\end{bmatrix}$

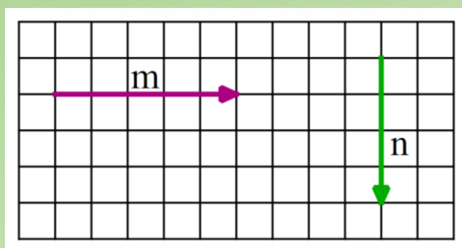
نکته: همیشه از ابتدای بردار حرکت را شروع کنید و اول افقی و بعد عمودی حرکت کنید. در طول بردار حرکت به سمت راست مثبت است و به سمت چپ منفی، در عرض بردار حرکت به سمت بالا مثبت است و به سمت پایین منفی است.

تمرین (۱):

مختصات بردارهای زیر را بنویسید.







$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}....\\....\end{bmatrix}$ $\overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}....\\....\end{bmatrix}$ $\vec{m}=\begin{bmatrix}....\\....\end{bmatrix}$ $\vec{n}=\begin{bmatrix}....\\....\end{bmatrix}$

فعالیت :

با توجه به نقشه زیر ، یک هواپیمای مسافربری از فرودگاه مهرآباد تهران به فرودگاه گرگان پرواز می کند. و از گرگان به سمت فرودگاه شهید هاشمی نژاد مشهد پرواز می کند. پرواز های این هواپیما به وسیله بردار نشان داده شده است.حال اگر هواپیمایی بخواهد مستقیماً از فرودگاه مهرآباد تهران به فرودگاه هاشمی نژاد مشهد برود چگونه باید پرواز کند.بردار این پرواز کدام است؟

با توجه به حروفی که در شکل می بینید می توانیم بردارها را نام گذاری کنیم.

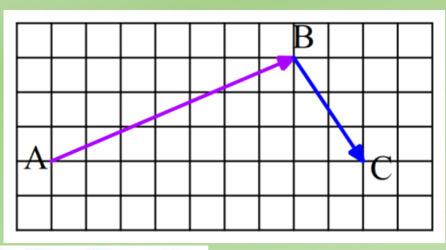
بردار پرواز از تهران به گرگان $\overrightarrow{AB}$ بردار پرواز از گرگان به مشهد $\overrightarrow{BC}$ بردار پرواز از تهران به مشهد $\overrightarrow{AC}$

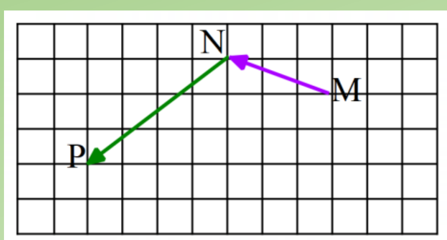
همانطور که می بینید بردار انتقال $\overrightarrow{AC}$ کار دو بردارانتقال $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را انجام می دهد.

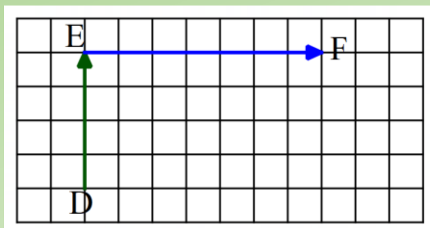
«به بردار $\overrightarrow{AC}$ بردار برآیند یا حاصل جمع می گویند. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$»

تمرین (۲):

در هر شکل بردار برآیند یا حاصل جمع را رسم کرده و رابطه جمع را برای آن بنویسید.

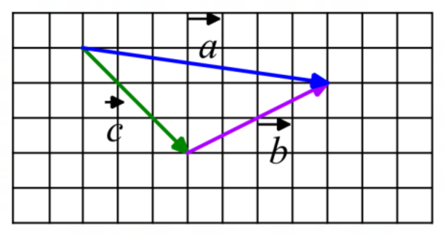






فعالیت :

در شکل زیر ابتدا باید بفهمیم که کدام بردار ، برآیند دو بردار دیگر است. با کمی دقت می توان آن را یافت.می توانید برای خودتان روشی برای یافتن بردار برآیند(حاصل جمع) کشف کنید.



در نتیجه می توان رابطه جمع را برای بردارها به صورت زیر نوشت:

$$\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$$

حال بیاییم این جمع را با استفاده از مختصات بردارها بررسی کنیم.

$$\vec{c}=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۳ \end{bmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \qquad \vec{a}=\begin{bmatrix} ۷ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}+\vec{b}=\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} ۳ \\ -۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

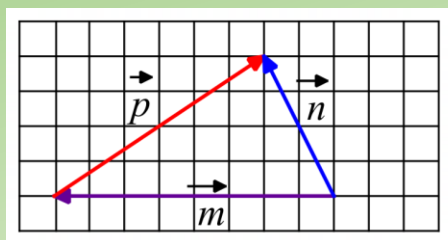
در جمع مختصاتی که در بالا با توجه به بردارها و مختصاتشان نوشته شده است چه رابطه ای می بینید؟بله کاملاً درست متوجه شدید.طول ها با هم جمع می شوند و عرض ها نیز با هم جمع می شوند.

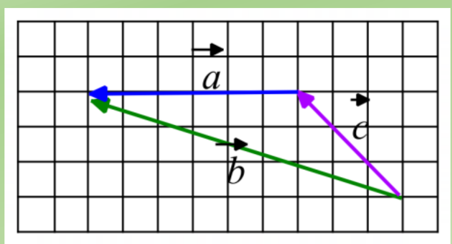
پس می توانیم قانون زیر را برای جمع مختصاتی بیان کنیم.

$$\overset{\vec{a}}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}+\overset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}}=\overset{\vec{a}+\vec{b}}{\begin{bmatrix} x+z \\ y+t \end{bmatrix}}$$

تمرین (۳):

ابتدا بردار برآیند را در هر شکل پیدا کنید، بعد یک جمع برداری بنویسید و در نهایت جمع مختصاتی آن را نیز بنویسید.





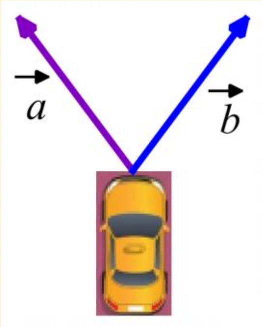
تمرین (٤):

در هر تساوی مقدار x و y را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x \\ -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۵ \\ -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

فعالیت :

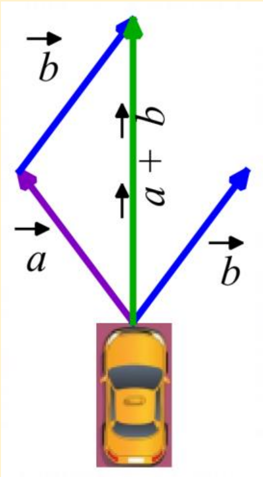
دو نفر می خواهند یک ماشین را با کمک طناب هایی که به آن وصل شده است حرکت دهند.با توجه به شکل زیر می توان نیروهایی که این دو شخص به ماشین وارد می کنند را با بردار نشان داد.



به نظر شما ماشین به چه سمتی حرکت می کند؟

چگونه می توان برآیند یا همان حاصل جمع دو بردار را رسم کرد؟ همانطور که مشاهده می کنید.در این جا هر دو بردار از یک نقطه خارج شده اند.

اگر کمی فکر کنید می توانید حدس بزنید که ماشین احتمال زیاد به طور مستقیم حرکت خواهد کرد، یعنی بردار حاصل جمع باید بین دو بردار باشد.

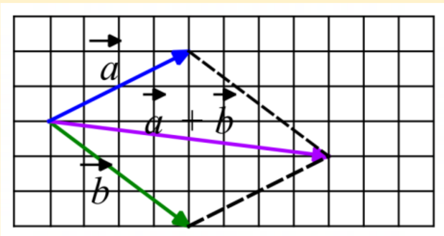


بیایید از مطلب بردارهای مساوی که در پایه هفتم یاد گرفته اید کمک بگیریم.

از انتهای بردار $\vec{a}$ برداری برابر با بردار $\vec{b}$ رسم می کنیم.

در این صورت می توانیم بردار برآیند یا حاصل جمع را رسم کنیم.مشاهده می شود طبق حدسی که زده بودیم راستای حرکت مستقیم به طرف جلو است.

اگر برای رسم بردار حاصل جمع از انتهای بردار $\vec{b}$ برداری مساوی بردار $\vec{a}$رسم می کردیم .باز هم جواب به همین صورت به دست می آمد.



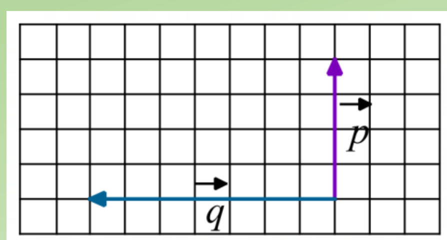
به دو بردار مقابل و طریقه رسم بردار برآیند آن دقت کنید.

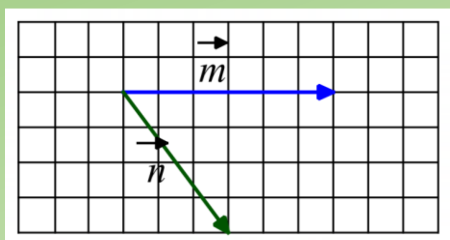
همانطور که می بینید،از انتهای بردار $\vec{a}$خط چینی برابر و موازی با بردار $\vec{b}$ رسم شده است و همچنین از انتهای بردار $\vec{b}$ خط چینی برابر و موازی با بردار $\vec{a}$ رسم شده است. بردار برآیند نیز از محل شروع دو بردار به محل برخورد خط چین ها کشیده شده است.

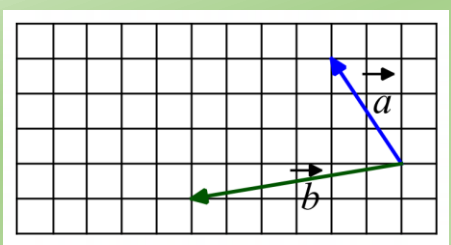
چون این شکل به متوازی الاضلاع تبدیل شده ، این روش را روش متوازی الاضلاع می نامند و قطر متوازی الاضلاع که از محل شروع دو بردار رسم می شود بردار برآیند است.

تمرین (۵):

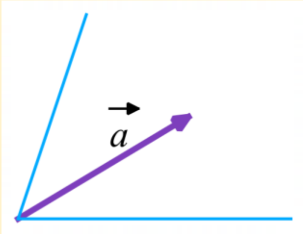
بردار برآیند یا حاصل جمع را در شکل های زیر رسم کنید.

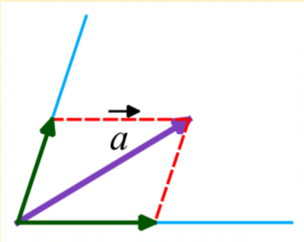






فعالیت :





در شکل مقابل می خواهیم در راستای تعیین شده دو بردار رسم کنیم

که حاصل جمع آنها برابر بردار $\vec{a}$ باشد. این کار را تجزیه بردار می گویند.

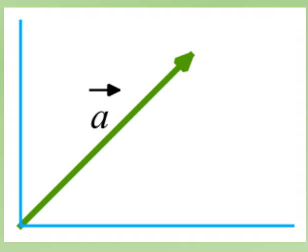
باز هم از همان روش متوازی الاضلاع استفاده می کنیم.

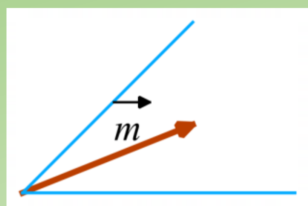
ولی این بار از انتهای بردار $\vec{a}$ این کار را انجام می دهیم و روی راستا بردار

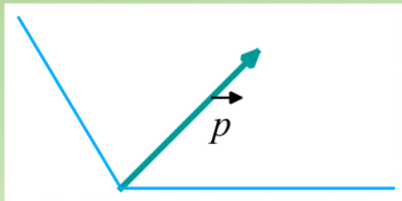
را مشخص می کنیم.

تمرین (٦):

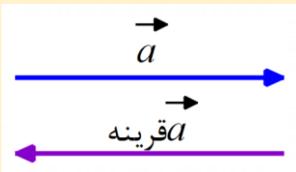
بردار های زیر را در راستای داده شده تجزیه کنید.







فعالیت :



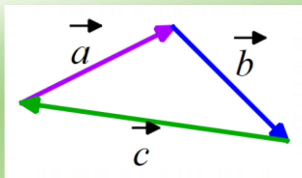
در پایه هفتم دو بردار قرینه را یاد گرفتید.

حاصل جمع یا برآیند دو بردار قرینه چیست؟اگر بردار قرینه را از انتهای بردار $\vec{a}$رسم کنیم.

به ابتدای بردار می رسیم و این یعنی صفر

بردار صفر را به صورت $\vec{0}$ نشان می دهیم و مختصات آن $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$است.

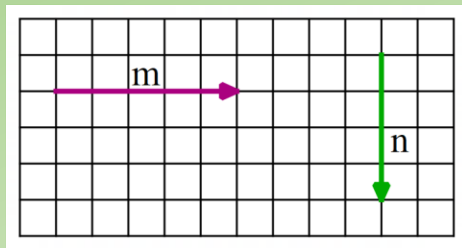
تمرین (۷):

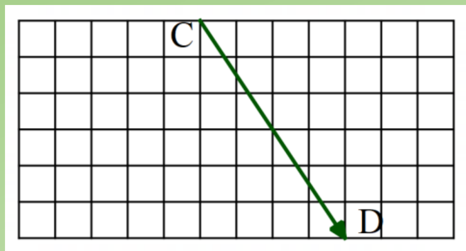


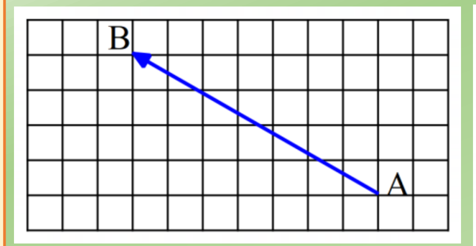
حاصل جمع بردارهای $\vec{a}$و$\vec{b}$و $\vec{c}$ چیست؟ چرا؟

تمرین (۱):

مختصات بردارهای زیر را بنویسید.



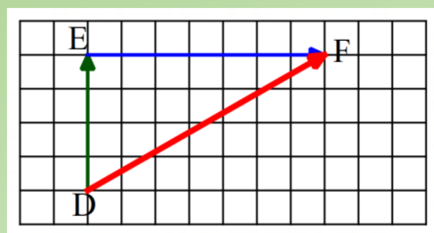


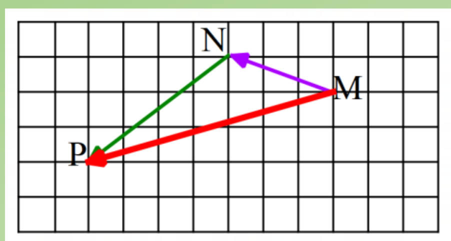


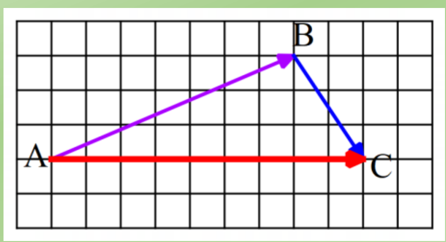
$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-۷\\+۴\end{bmatrix}$ $\overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}+۴\\-۶\end{bmatrix}$ $\vec{m}=\begin{bmatrix}۵\\۰\end{bmatrix}$ $\vec{n}=\begin{bmatrix}۰\\-۴\end{bmatrix}$

تمرین (۲):

در هر شکل بردار برآیند یا حاصل جمع را رسم کرده و رابطه جمع را برای آن بنویسید.



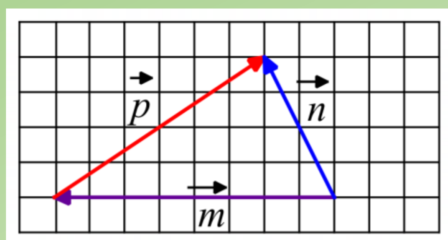


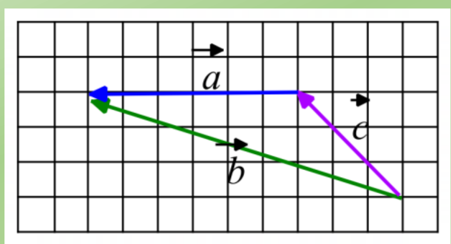


$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$ $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}$

تمرین (۳):

ابتدا بردار برآیند را در هر شکل پیدا کنید، بعد یک جمع برداری بنویسید و در نهایت جمع مختصاتی آن را نیز بنویسید.





$\vec{c}+\vec{a}=\vec{b}$

$\begin{bmatrix}-۳\\۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۶\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹\\۳\end{bmatrix}$

$\vec{m}+\vec{p}=\vec{n}$

$\begin{bmatrix}-۸\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\۴\end{bmatrix}$

تمرین (٤):

در هر تساوی مقدار x و y را به دست آورید.

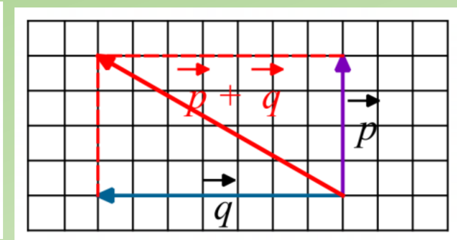
$$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۴ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

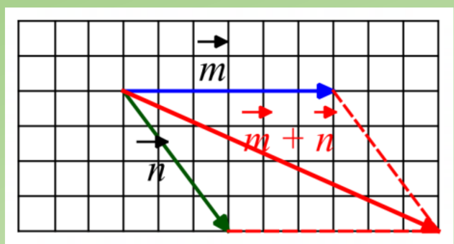
$$\begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

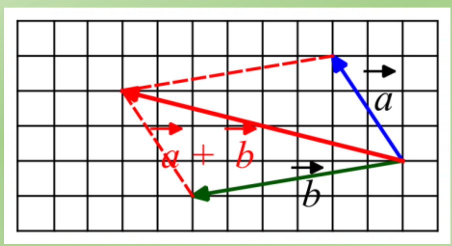
$$\begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۵ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$$

تمرین (۵):

بردار برآیند یا حاصل جمع را در شکل های زیر رسم کنید.

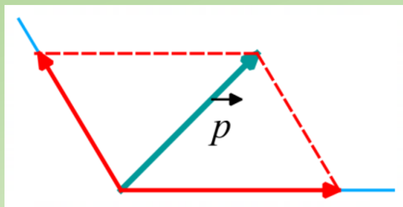


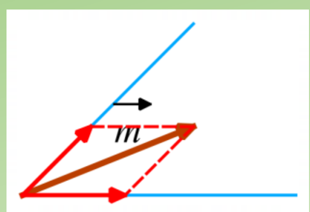


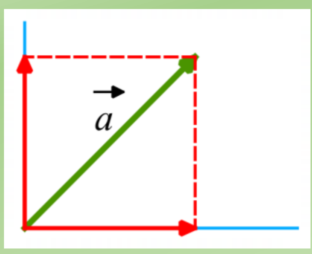


تمرین (٦):

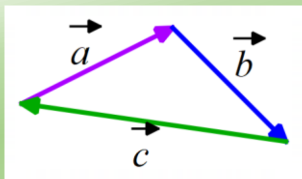
بردار های زیر را در راستای داده شده تجزیه کنید.







تمرین (۷):

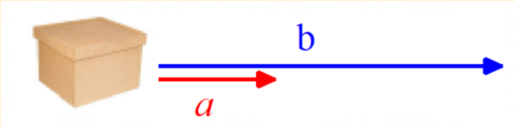


حاصل جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ چیست؟ چرا؟

بردار صفر،زیرا ابتدای بردار اولی بر انتهای بردار سومی منطبق است. یعنی هیچ چیزی نمانده تا برآیند آن رسم شود.

خود آموز شماره: ۸۰۱۶ **پایه: هشتم** **درس: ضرب عدد در بردار**

فعالیت :

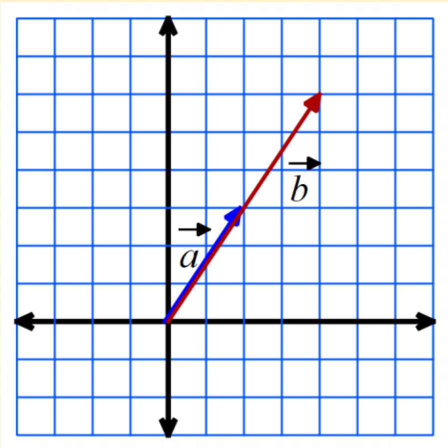


دو نفر سعی می کنند جسمی را بکشند .نیرویی که نفر اول وارد می کند

با بردار a و نیروی نفر دوم با بردار b نمایش داده شده است.

همانطور که می بینید نفر دوم نیرویی سه برابر نفر اول وارد می کند. و این یعنی $\vec{b} = ۳\vec{a}$

وقتی برداری سه برابر می شود ، در همان راستا و جهت بردار حرکت می کند.فقط اندازه آن تغییر می کند.



به بردارهای زیر دقت کنید.

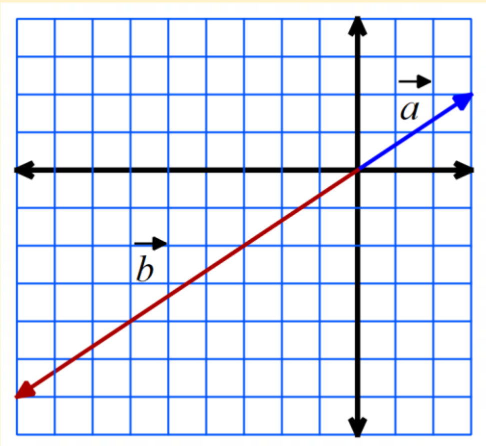
الف) در اینجا بردار b دو برابر بردار aاست.

می توانیم برای آنها هم تساوی برداری بنویسم و هم تساوی مختصاتی بنویسیم.

$$\vec{b} = ۲\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = ۲\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

با توجه به تساوی مختصاتی چه اتفاقی در ضرب **۲** در مختصات بردار a افتاده است؟



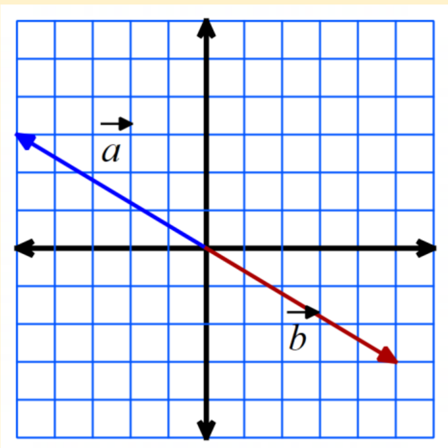
ب) در اینجا بردار b سه برابر بردار aاست.راستا یکی است ولی جهت کاملاً

مخالف است. در این صورت می توان گفت که :

$$\vec{b} = -۳\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} -۹ \\ -۶ \end{bmatrix} = -۳\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

همانطور که در تساوی مختصاتی مشاهده می کنید ،عدد **۳-** هم در طول بردار و هم در عرض بردار ضرب شده است.



ج)دو بردار زیر قرینه هم هستند.

راستا و اندازه یکسان است ولی جهتشان مخالف هم است.پس داریم:

$$\vec{b} = -\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} +۵ \\ -۳ \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -۵ \\ +۳ \end{bmatrix}$$

باز هم می بینید که دو بردار قرینه ، مختصاتشان نیز قرینه است.

در ضرب یک عدد در بردار ، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می شود.بنابراین ، می توانیم بنویسیم:

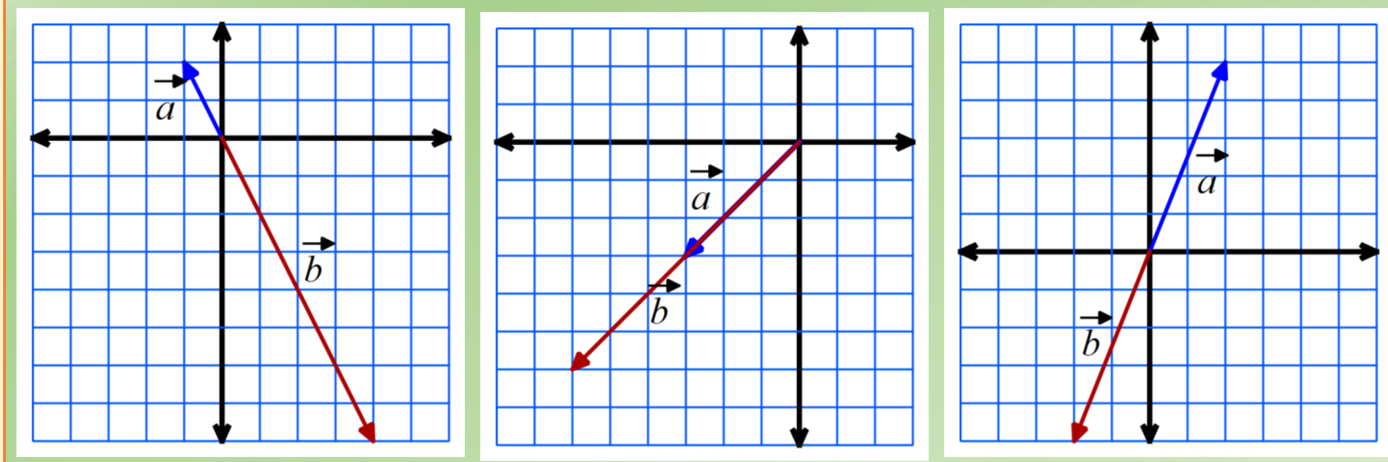
$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

اگر بردار b قرینه بردار a باشد، می نویسیم: $\vec{b} = -\vec{a}$ یا $\vec{b} = (-۱)\vec{a}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

تمرین (۱):

در هر شکل مختصات بردارهای a و b را بنویسید.رابطه دو بردار را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.



فعالیت :

با توجه به مطالبی که در فعالیت قبل نتیجه گرفتیم ،می توانیم محاسبات زیر را انجام دهیم.

$$(\frac{۱}{۳})\begin{bmatrix} -۹ \\ ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} ۷ \\ -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۷ \\ ۹ \end{bmatrix} \qquad -۵\begin{bmatrix} -۴ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۰ \\ -۵ \end{bmatrix} \qquad ۳\begin{bmatrix} ۵ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۵ \\ -۱۲ \end{bmatrix}$$

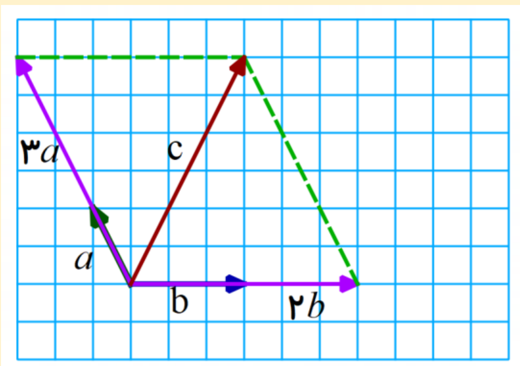
تمرین (۲): حاصل را به دست آورید.

$$(-\frac{۱}{۵})\begin{bmatrix} ۳۰ \\ -۱۵ \end{bmatrix} = \qquad -\begin{bmatrix} +۳ \\ -۹ \end{bmatrix} = \qquad -۵\begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix} = \qquad ۶\begin{bmatrix} -۲ \\ -۴ \end{bmatrix} =$$

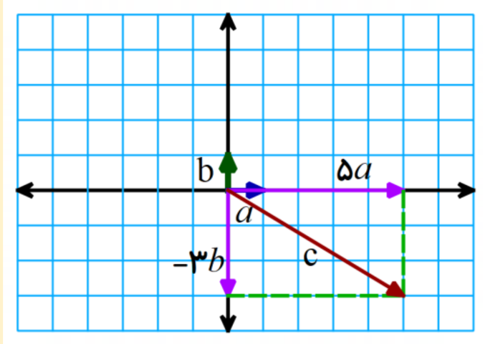
فعالیت :

بردارهای a و b مشخص هستند. می خواهیم بردار $\vec{c} = ۳\vec{a} + ۲\vec{b}$ را رسم کنیم.برای این کار باید ابتدا بردارهای $۳\vec{a}$ و $۲\vec{b}$ را رسم کنیم.

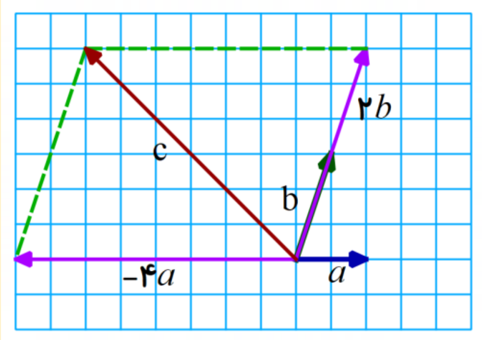
سپس به کمک روش متوازی الاضلاع بردار $\vec{c}$ را بکشیم.



به مثال های زیر و طریقه رسم بردار های داده شده دقت کنید. جهت و راستا و اندازه بسیار مهم هستند.



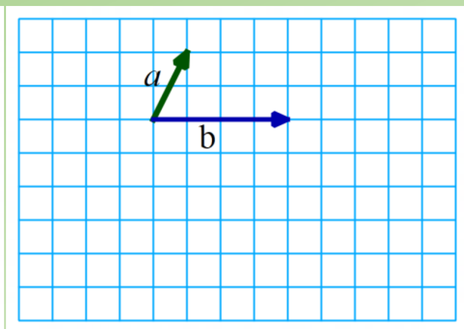
$\vec{c}=۵\vec{a}-۳\vec{b}$



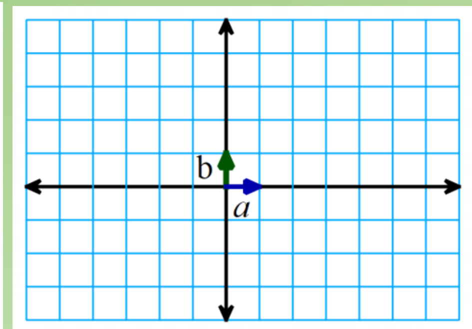
$\vec{c}=-۴\vec{a}+۲\vec{b}$

تمرین (۳):

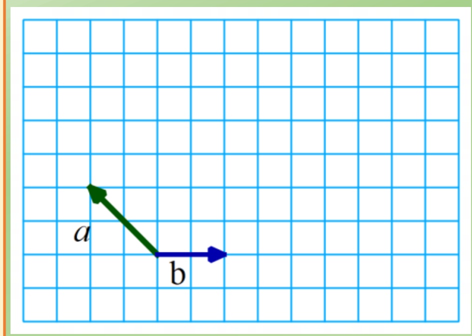
با توجه به بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار $\vec{c}$ را رسم کنید.



$\vec{c}=-۳\vec{a}+۲\vec{b}$



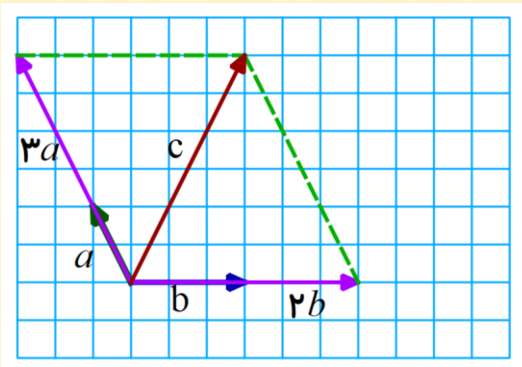
$\vec{c}=-۵\vec{a}-۳\vec{b}$



$\vec{c}=۲\vec{a}+۴\vec{b}$

فعالیت :

حال می خواهیم فعالیت قبلی را از نظر مختصاتی مورد بررسی قرار دهیم.



$$\vec{a}=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix} \Rightarrow ۳\vec{a}=\begin{bmatrix}-۳\\۶\end{bmatrix}$$

$$\vec{b}=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix} \Rightarrow ۲\vec{b}=\begin{bmatrix}۶\\۰\end{bmatrix} \qquad \vec{c}=\begin{bmatrix}۳\\۶\end{bmatrix}$$

$$c=۳a+۲b \Rightarrow c=۳\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۶\end{bmatrix}$$

مشاهده می کنید ابتدا ضرب انجام می شود و در ادامه جمع انجام می شود.برای درک بهتر به مثال زیر دقت کنید.

$$۳\begin{bmatrix}۴\\-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲\\-۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۴\\-۳\end{bmatrix}$$

تمرین (٤):

حاصل را به دست آورید.

$$-۲\begin{bmatrix}+۳\\-۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۵\\-۵\end{bmatrix}=$$

$$۴\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}=$$

فعالیت :

اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}-۳\\۵\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ باشد. می خواهیم حاصل عبارت $\vec{d}=۳\vec{a}-۵\vec{b}$ را به دست آوریم.در اینجا کافی است که به جای بردارها ، مختصاتشان را جایگذاری کنیم و همانند فعالیت قبل محاسبات را انجام دهیم.

$$\vec{d}=۳\vec{a}-۵\vec{b}=۳\begin{bmatrix}-۳\\۵\end{bmatrix}-۵\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹\\۱۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱۰\\-۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۹\\۰\end{bmatrix}$$

همچنین می توان معادلات مختصاتی را مانند همان چه که در عبارت جبری آموختید حل کرد.به مثال های زیر دقت کنید.

$$۴\vec{x}=\begin{bmatrix}-۱۲\\۲۰\end{bmatrix}$$
$$\vec{x}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}-۱۲\\۲۰\end{bmatrix}$$
$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-۳\\۵\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}+\vec{x}=\begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix}$$
$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۵\\+۳\end{bmatrix}$$
$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-۸\\+۲\end{bmatrix}$$

تمرین (۵):

الف) اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$ ، مختصات بردار $\vec{c}$ را به دست آورید. $\vec{c}=-۲\vec{a}+۵\vec{b}$

ب) اگر $\vec{x}=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ و $\vec{y}=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ ، مختصات بردار $\vec{z}$ را به دست آورید. $\vec{z}=۴\vec{x}-۶\vec{y}$

تمرین (٦):

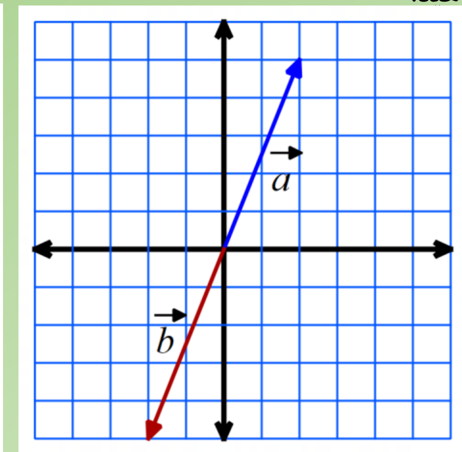
معادله های مختصاتی زیر را حل کنید.

$۵x=\begin{bmatrix}-۲۰\\۳۵\end{bmatrix}$ $\quad$ $\begin{bmatrix}-۴\\۳\end{bmatrix}+x=\begin{bmatrix}-۵\\-۳\end{bmatrix}$ $\quad$ $-۲x=\begin{bmatrix}-۱۰\\۶\end{bmatrix}$ $\quad$ $x+\begin{bmatrix}۳\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$

خود آموز شماره: ۸۰۱۶ | **پایه: هشتم** | **درس: ضرب عدد در بردار**

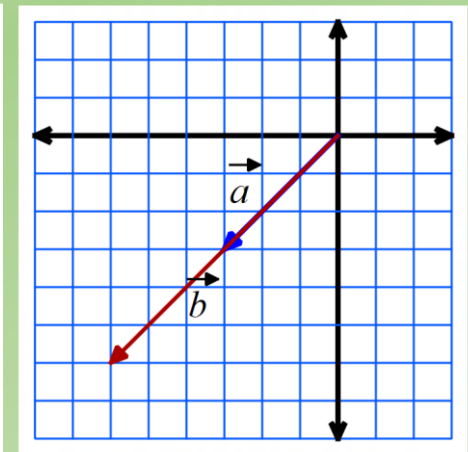
تمرین (۱):

در هر شکل مختصات بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بنویسید.رابطه دو بردار را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.



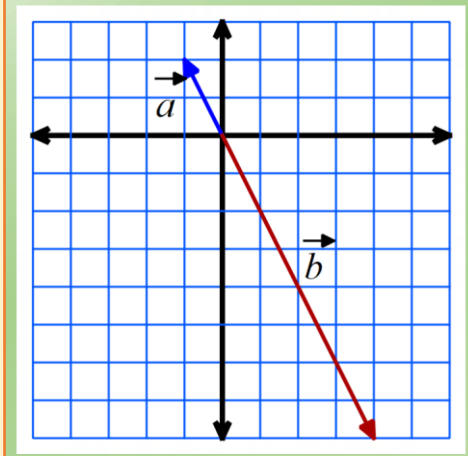
$\vec{b}=-\vec{a}$

$$\begin{bmatrix}-۲\\-۵\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$$



$\vec{b}=۲\vec{a}$

$$\begin{bmatrix}-۶\\-۶\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}-۳\\-۳\end{bmatrix}$$



$\vec{b}=-۴\vec{a}$

$$\begin{bmatrix}۴\\-۸\end{bmatrix}=-۴\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}$$

تمرین (۲): حاصل را به دست آورید.

$$(-\frac{۱}{۵})\begin{bmatrix}۳۰\\-۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}$$

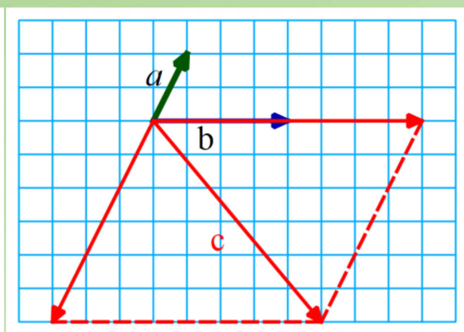
$$-\begin{bmatrix}+۳\\-۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\+۹\end{bmatrix}$$

$$-۵\begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰\\+۲۵\end{bmatrix}$$

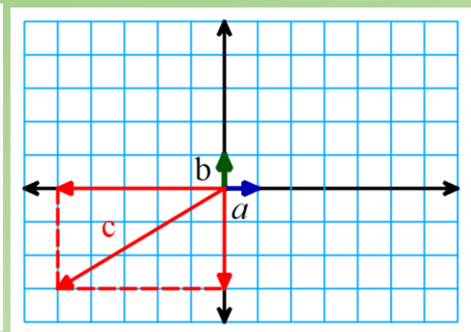
$$۶\begin{bmatrix}-۲\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۲\\-۲۴\end{bmatrix}$$

تمرین (۳):

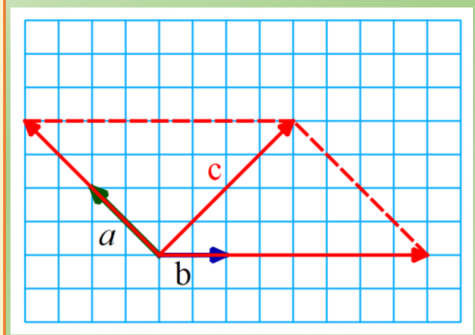
با توجه به بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار $\vec{c}$ را رسم کنید.



$\vec{c}=-۳\vec{a}+۲\vec{b}$



$\vec{c}=-۵\vec{a}-۳\vec{b}$



$\vec{c}=۲\vec{a}+۴\vec{b}$

تمرین (٤): حاصل را به دست آورید.

$$-۲\begin{bmatrix}+۳\\-۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۵\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\+۱۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}+۵\\+۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\+۱۵\end{bmatrix}$$

$$۴\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\۸\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰\\۱۱\end{bmatrix}$$

تمرین (۵):

الف) اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$ ، مختصات بردار $\vec{c}$ را به دست آورید. $\vec{c}=-۲\vec{a}+۵\vec{b}$

$$\vec{c}=-۲\vec{a}+۵\vec{b}=-۲\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}+۵\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\-۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱۵\\۲۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳\\۱۴\end{bmatrix}$$

ب) اگر $\vec{x}=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ و $\vec{y}=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ ، مختصات بردار $\vec{z}$ را به دست آورید. $\vec{z}=۴\vec{x}-۶\vec{y}$

$$\vec{z}=۴\vec{x}-۶\vec{y}=۴\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}-۶\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\-۶\end{bmatrix}$$

تمرین (٦):

معادله های مختصاتی زیر را حل کنید.

$$۵x=\begin{bmatrix}-۲۰\\۳۵\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}-۴\\۳\end{bmatrix}+x=\begin{bmatrix}-۵\\-۳\end{bmatrix}\qquad -۲x=\begin{bmatrix}-۱۰\\۶\end{bmatrix}\qquad x+\begin{bmatrix}۳\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$$

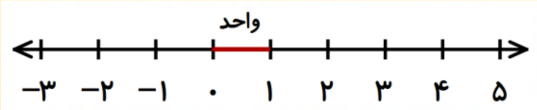
$$x=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}-۲۰\\۳۵\end{bmatrix}\qquad x=\begin{bmatrix}-۵\\-۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}+۴\\-۳\end{bmatrix}\qquad x=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}-۱۰\\۶\end{bmatrix}\qquad x=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳\\+۵\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}-۴\\۷\end{bmatrix}\qquad x=\begin{bmatrix}-۱\\-۶\end{bmatrix}\qquad x=\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}\qquad x=\begin{bmatrix}-۳\\+۵\end{bmatrix}$$

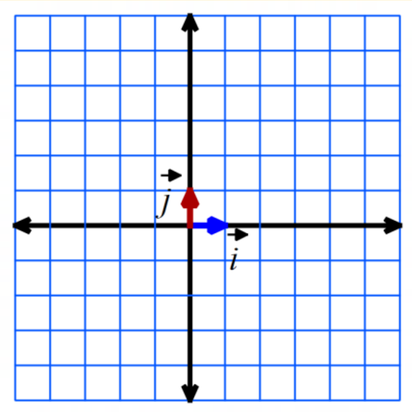
فعالیت :

چگونه طول کلاس را می توانیم اندازه بگیریم؟ می دانید که واحد اندازه گیری طول متر است.برای اندازه گیری جرم یک جسم هم واحد گرم است.همچنین واحد اندازه گیری دما سلسیوس است و....

مشاهده می کنید هر چیزی برای اندازه گیری واحدی دارد.برای نمایش اعداد روی محور هم نیاز به واحد داریم.البته در محور اعداد صحیح با این واحد آشنا هستید.



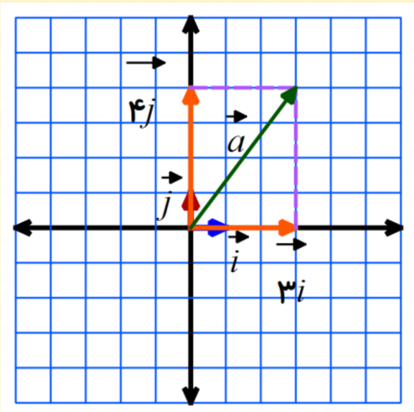
برای نمایش بردار نیز به واحد نیاز داریم.این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه مختصات با دو محور نمایش داده می شود،به واحد روی هر دو محور نیاز داریم.



در شکل روبرو ، بردارهای واحد مختصات روی هر دو محور مشخص شده اند.

$$\vec{i}=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix} \qquad \vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$$

می خواهیم بردار زیر را روی محور با کمک بردارهای واحد مختصات رسم کنیم.



$$\vec{a}=۳\vec{i}+۴\vec{j}$$

حال مختصات بردار $\vec{a}$ را می نویسیم.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$$

ضمناً می توان بردار را به صورت زیر هم حساب کرد.

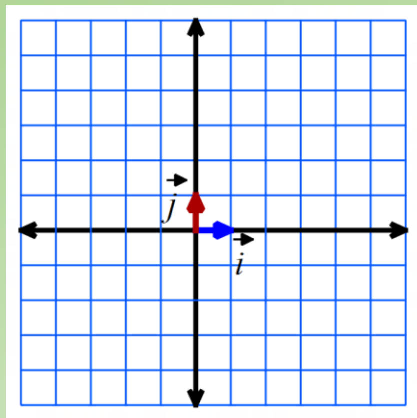
$$\vec{a}=۳\vec{i}+۴\vec{j}=۳\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}+۴\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$$

مشاهده می کنید که $\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}=۳\vec{i}+۴\vec{j}$ پس می توانید برای خود یک قانون کشف کنید که بتوانید هر بردار را به صورت بردارهای واحد مختصات بنویسید و یا برعکس آن را انجام دهید.به مثال های زیر دقت کنید.

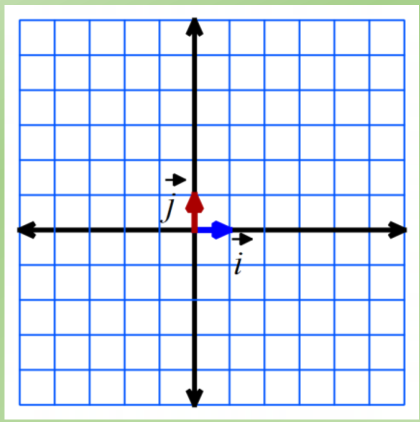
$$\begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix}=۳\vec{j} \qquad -۵\vec{i}=\begin{bmatrix}-۵\\۰\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-۵\\۱\end{bmatrix}=-۵\vec{i}+۱\vec{j}=-۵\vec{i}+\vec{j} \qquad ۳\vec{i}-۲\vec{j}=\begin{bmatrix}۳\\-۲\end{bmatrix}$$

تمرین (۱):

بردارهای زیر را روی محور مختصات رسم کنید و سپس مختصات آن ها را بنویسید.



$\vec{b}=-۴\vec{i}+۵\vec{j}$



$\vec{a}=۵\vec{i}-۳\vec{j}$

تمرین (۲):

طرف دیگر هر تساوی را کامل کنید.

$-۵\vec{j}=$ $\qquad$ $-۵\vec{i}+۶\vec{j}=$ $\qquad$ $-۵\vec{i}-\vec{j}=$ $\qquad$ $۲\vec{i}-۶\vec{j}=$

$=\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ $\qquad$ $=\begin{bmatrix}-۱\\۰\end{bmatrix}$ $\qquad$ $=\begin{bmatrix}-۴\\-۳\end{bmatrix}$ $\qquad$ $=\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$

فعالیت :

اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۴\vec{j}$ و $\vec{b}=-۳\vec{i}+\vec{j}$ باشد. حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\qquad$ $\vec{x}=۳\vec{a}-۲\vec{b}$

برای حل این مسئله دو روش وجود دارد که شما می توانید هر کدام را که بهتر متوجه شدید برای حل استفاده کنید.

روش اول: حل به صورت بردارهای واحد مختصات و به کمک عبارت های جبری.

در این روش به جای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ رابطه های مربوط به بردارهای واحد مختصات‌شان را جایگذاری می کنیم و مانند عبارت جبری حساب می کنیم.

$$\vec{x}=۳\vec{a}-۲\vec{b}=۳(۲\vec{i}+۴\vec{j})-۲(-۳\vec{i}+\vec{j})=\underline{۶\vec{i}}+\underline{\underline{۱۲\vec{j}}}+\underline{۶\vec{i}}-\underline{\underline{۲\vec{j}}}=۱۲\vec{i}+۱۰\vec{j}$$

روش دوم: حل به صورت مختصاتی

در این روش ابتدا بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت مختصات نوشته و بعد در عبارت جایگذاری می کنیم.

$$\vec{b}=-۳\vec{i}+\vec{j}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix} \qquad \vec{a}=۲\vec{i}+۴\vec{j}=\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}=۳\vec{a}-۲\vec{b}=۳\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\۱۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲\\۱۰\end{bmatrix}$$

تمرین (۳):

الف) اگر $\vec{a}=-۳\vec{i}-۲\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{i}-۲\vec{j}$ باشد. حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\vec{x}=۲\vec{a}+۵\vec{b}$

ب) اگر $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=-۴\vec{j}$ باشد. حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\vec{y}=-۵\vec{a}+۵\vec{b}$

فعالیت :

می خواهیم معادله برداری مقابل را حل کنیم.

$$۳\vec{i}-۵\vec{j}+۳\vec{x}=\begin{bmatrix}۱۲\\۱\end{bmatrix}$$

این معادله را هم به دو روش می توان حل کرد.

روش اول:

استفاده از بردارهای واحد مختصات

در این روش مختصات را به بردارهای واحد مختصات تبدیل می کنیم و بعد معادله را حل می کنیم.

$$۳\vec{i}-۵\vec{j}+۳\vec{x}=\begin{bmatrix}۱۲\\۱\end{bmatrix}$$

$$۳\vec{i}-۵\vec{j}+۳\vec{x}=۱۲\vec{i}+۱\vec{j}$$

$$۳\vec{x}=\underline{۱۲\vec{i}}+\underline{\underline{۱\vec{j}}}-\underline{۳\vec{i}}+\underline{\underline{۵\vec{j}}}$$

$$۳\vec{x}=۹\vec{i}+۶\vec{j}$$

$$\vec{x}=\frac{۹\vec{i}}{۳}+\frac{۶\vec{j}}{۳}=۳\vec{i}+۲\vec{j}$$

روش دوم:

استفاده از مختصات

در این روش بردارهای واحد مختصات را به شکل مختصاتی می نویسیم و بعد معادله را حل می کنیم.

$$۳\vec{i}-۵\vec{j}+۳\vec{x}=\begin{bmatrix}۱۲\\۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۳\\-۵\end{bmatrix}+۳\vec{x}=\begin{bmatrix}۱۲\\۱\end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x}=\begin{bmatrix}۱۲\\۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲\\۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳\\۵\end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x}=\begin{bmatrix}۹\\۶\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}۹\\۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$$

تمرین (٤):

معادله های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

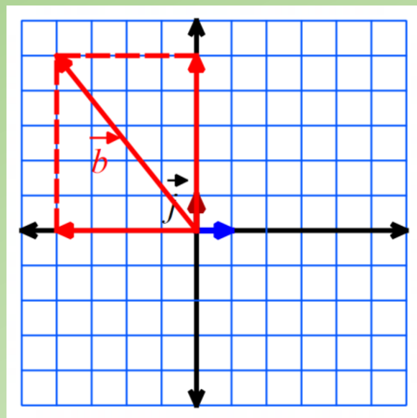
$$\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}-۵\vec{x}=۱۰\vec{i}-۲۳\vec{j}$$

$$۲\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}$$

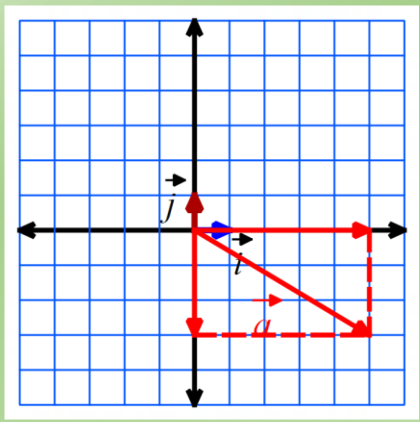
خود آموز شماره: ۸۰۱۷ **پایه: هشتم** **پاسخ نامه** **درس: بردارهای واحد مختصات**

تمرین (۱):

بردارهای زیر را روی محور مختصات رسم کنید و سپس مختصات آن ها را بنویسید.



$\vec{b}=-۴\vec{i}+۵\vec{j}=\begin{bmatrix}-۴\\ ۵\end{bmatrix}$



$\vec{a}=۵\vec{i}-۳\vec{j}=\begin{bmatrix}۵\\ -۳\end{bmatrix}$

تمرین (۲):

طرف دیگر هر تساوی را کامل کنید.

$-۵\vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\ -۵\end{bmatrix}$ $\quad -۵\vec{i}+۶\vec{j}=\begin{bmatrix}-۵\\ ۶\end{bmatrix}$ $\quad -۵\vec{i}-\vec{j}=\begin{bmatrix}-۵\\ -۱\end{bmatrix}$ $\quad ۲\vec{i}-۶\vec{j}=\begin{bmatrix}۲\\ -۶\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\vec{i}+\vec{j}$ $\quad \begin{bmatrix}-۱\\ ۰\end{bmatrix}=-\vec{i}$ $\quad \begin{bmatrix}-۴\\ -۳\end{bmatrix}=-۴\vec{i}-۳\vec{j}$ $\quad \begin{bmatrix}۳\\ ۱\end{bmatrix}=۳\vec{i}+\vec{j}$

تمرین (۳):

الف) اگر $\vec{a}=-۳\vec{i}-۲\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{i}-۲\vec{j}$ باشد. حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\vec{x}=۲\vec{a}+۵\vec{b}$

روش اول:

$$\vec{x}=۲\vec{a}+۵\vec{b}=۲(-۳\vec{i}-۲\vec{j})+۵(\vec{i}-۲\vec{j})=\underline{-۶\vec{i}}-\underline{\underline{۴\vec{j}}}+\underline{۵\vec{i}}-\underline{\underline{۱۰\vec{j}}}=-۱\vec{i}-۱۴\vec{j}$$

روش دوم:

$\vec{b}=\vec{i}-۲\vec{j}=\begin{bmatrix}۱\\ -۲\end{bmatrix}$ $\qquad \vec{a}=-۳\vec{i}-۲\vec{j}=\begin{bmatrix}-۳\\ -۲\end{bmatrix}$

$$\vec{x}=۲\vec{a}+۵\vec{b}=۲\begin{bmatrix}-۳\\ -۲\end{bmatrix}+۵\begin{bmatrix}۱\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\ -۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\ -۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\ -۱۴\end{bmatrix}$$

ب) اگر $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=-۴\vec{j}$ باشد. حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\vec{y}=-۵\vec{a}+۵\vec{b}$

روش اول: $\vec{y}=-۵\vec{a}+۵\vec{b}=-۵(\vec{i}+\vec{j})+۵(-۴\vec{j})=\underline{-۵\vec{i}}-\underline{\underline{۵\vec{j}}}-\underline{\underline{۲۰\vec{j}}}=-۵\vec{i}-۲۵\vec{j}$

روش دوم: $\vec{b}=-۴\vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\-۴\end{bmatrix}$ $\quad\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}=\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$

$$\vec{y}=-۵\vec{a}+۵\vec{b}=-۵\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}+۵\begin{bmatrix}۰\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\-۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\-۲۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\-۲۵\end{bmatrix}$$

تمرین (٤): معادله های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

(تذکر: دانش آموزان گرامی شما فقط از یک روش حل کنید.)

$$۲\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}$$

$$۲\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{x}=-۶\vec{i}+۳\vec{j}$$

$$۲\vec{x}=\underline{-۶\vec{i}}+\underline{\underline{۳\vec{j}}}-\underline{۲\vec{i}}+\underline{\underline{\vec{j}}}$$

$$۲\vec{x}=-۸\vec{i}+۴\vec{j}$$

$$\vec{x}=\frac{-۸\vec{i}}{۲}+\frac{۴\vec{j}}{۲}=-۴\vec{i}+۲\vec{j}$$

$$۲\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}$$

$$۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}$$

$$۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۸\\۴\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}-۸\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\۲\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}-۵\vec{x}=۱۰\vec{i}-۲۳\vec{j}$$

$$۵\vec{i}-۳\vec{j}-۵\vec{x}=۱۰\vec{i}-۲۳\vec{j}$$

$$-۵\vec{x}=\underline{۱۰\vec{i}}+\underline{\underline{-۲۳\vec{j}}}-\underline{۵\vec{i}}+\underline{\underline{۳\vec{j}}}$$

$$-۵\vec{x}=۵\vec{i}-۲۰\vec{j}$$

$$\vec{x}=\frac{۵\vec{i}}{-۵}-\frac{۲۰\vec{j}}{-۵}=-۱\vec{i}+۴\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}-۵\vec{x}=۱۰\vec{i}-۲۳\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}-۵\vec{x}=\begin{bmatrix}۱۰\\-۲۳\end{bmatrix}$$

$$-۵\vec{x}=\begin{bmatrix}۱۰\\-۲۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰\\-۲۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۵\\۳\end{bmatrix}$$

$$-۵\vec{x}=\begin{bmatrix}۵\\-۲۰\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}=-\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۵\\-۲۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}$$