بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

1. فرایندهای حدی
2. محاسبه حد توابع
3. پیوستگی

ریاضی (۲)

پایه یازدهم علوم تجربی

فصل ۶

تهیه و تنظیم : مجید قادری
دبیر ریاضی از بندرعباس
شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2
Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۶

درس ۲

محاسبهٔ حد توابع

اهداف

- آشنایی با قوانین محاسبهٔ حد
- محاسبهٔ حد توابع با استفاده از ضابطه آنها
- آشنایی با نحوهٔ محاسبهٔ حد توابع چندجمله ای، توابع گویا، توابع رادیکالی، توابع مثلثاتی و چند ضابطه ای
- آشنایی با نحوهٔ محاسبهٔ حد توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح(براکتی)

برای محاسبهٔ حد یک تابع قواعد و دستورهایی وجود دارد. در این درس برخی از این قواعد به کمک شهود و با ذکر مثال توضیح داده می شوند.

صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

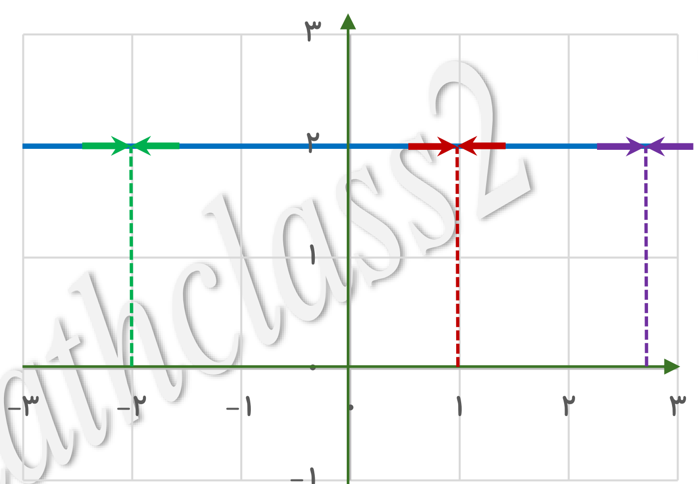
۱ حد تابع ثابت:

حد تابع ثابت در هر نقطه برابر مقدار تابع ثابت است.

به طور کلی اگر c و a دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} c = c$

مثال:

$f(x) = ۲$



$\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۲$

$\lim\limits_{x\to \sqrt{۸}} f(x) = ۲$

$\lim\limits_{x\to -۲} f(x) = ۲$

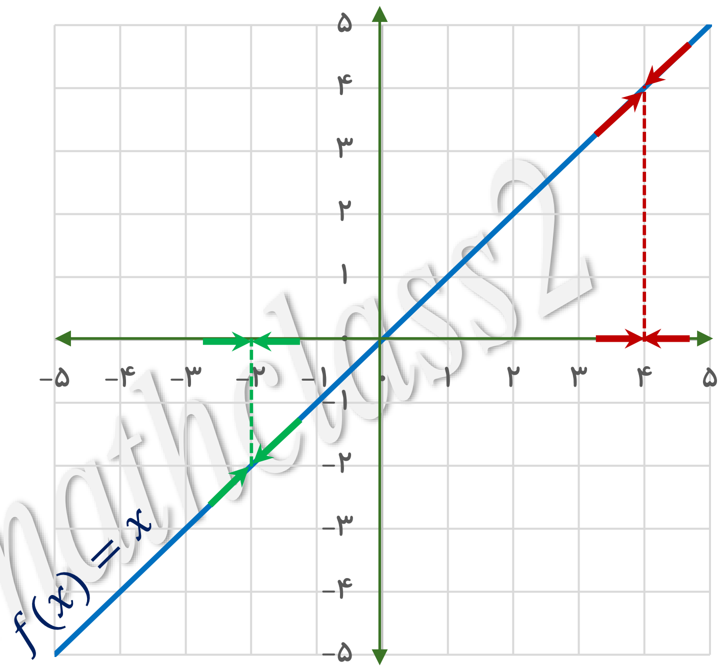
صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

۲ حد تابع همانی:

حد تابع همانی در نقطهٔ a برابر a است.

به طور کلی اگر a عددی حقیقی باشد و $f(x)=x$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} x = a$

مثال:



$$\lim_{x\to ۴} x = ۴$$

$$\lim_{x\to -۲} x = -۲$$

کار در کلاس صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

حدهای زیر را حساب کنید:

$\lim_{x \to ۵} ۰ = ۰$ تابع ثابت

$\lim_{x \to ۷} x = ۷$ تابع همانی

$\lim_{x \to ۴} -۲ = -۲$ تابع ثابت

$\lim_{x \to ۷} ۵ = ۵$ تابع ثابت

$\lim_{x \to -۷} x = -۷$ تابع همانی

$\lim_{x \to ۰} x = ۰$ تابع همانی

صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

۳ حد مجموع :

اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آنها در همان نقطه است.

به طور کلی اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim_{x\to a} g(x) = m$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = l + m$$

مثال:

$$\lim_{x\to ۱}(x+۴) = \lim_{x\to ۱} x + \lim_{x\to ۱} ۴ = ۱ + ۴ = ۵$$

صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

۴ حد تفاضل:

اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تفاضل دو تابع در آن نقطه برابر تفاضل حدهای آنها در همان نقطه است.

به طور کلی اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim_{x\to a} g(x) = m$ باشد، آنگاه:

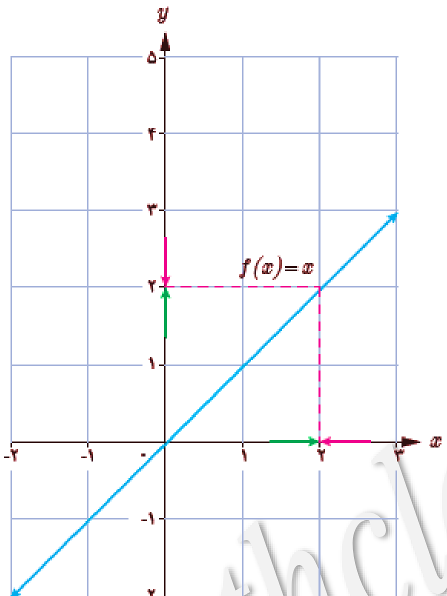
$$\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = l - m$$

مثال:

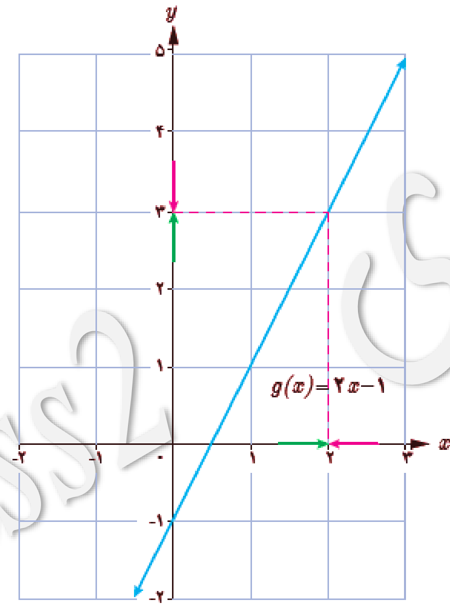
$$\lim_{x\to ۵}(x - ۱) = \lim_{x\to ۵} x - \lim_{x\to ۵} ۱ = ۵ - ۱ = ۴$$

کار در کلاس صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

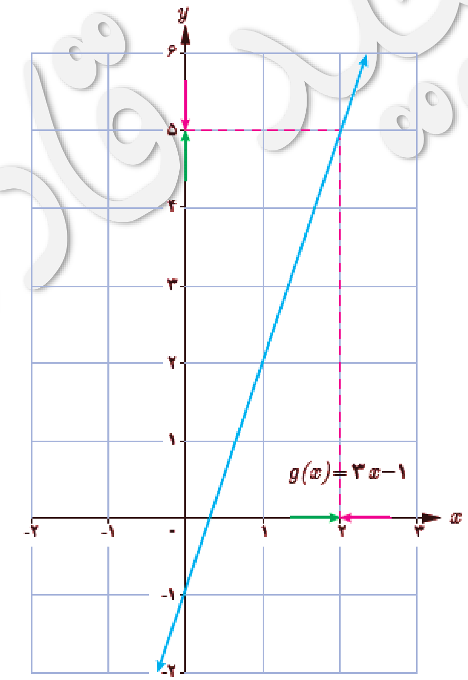
اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x-۱$ آنگاه $\lim\limits_{x\to ۲}\big(f(x)+g(x)\big)$ را به کمک قانون حد مجموع محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۲$



$\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = ۳$



$\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x)) = ۵$

$$\lim_{x\to ۲}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to ۲} f(x) + \lim_{x\to ۲} g(x) = ۲+۳=۵$$

$$\lim_{x\to ۲}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to ۲}((x)+(۲x-۱)) = \lim_{x\to ۲}(۳x-۱)=۵$$

صفحه ۱۳۰ کتاب درسی

۵ حد حاصل ضرب:

اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد حاصل ضرب دو تابع در آن نقطه برابر حاصل ضرب حدهای آنها در همان نقطه است.

به طور کلی اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim_{x\to a} g(x) = m$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x) = l \times m$$

نتیجه: اگر c عددی حقیقی باشد و $\lim_{x\to a} f(x) = l$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\left(cf(x)\right) = c\lim_{x\to a} f(x) = cl$$

مثال:

$$\lim_{x\to ۲}(۵x) = ۵\lim_{x\to ۲} x = ۵(۲) = ۱۰$$

$$\lim_{x\to ۲}(۵x^۲) = \lim_{x\to ۲}(۵x.x) = ۵\lim_{x\to ۲} x . \lim_{x\to ۲} x = ۵(۲)(۲) = ۲۰$$

کار در کلاس صفحه ۱۳۰ کتاب درسی

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ باشد، به کمک قانون حد حاصل ضرب هریک از حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{۲} = \lim_{x\to a}\big(f(x).f(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} f(x) = l \times l = l^{۲}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{۳} = \lim_{x\to a}\big((f(x))^{۲}.f(x)\big) = \lim_{x\to a}(f(x))^{۲} . \lim_{x\to a} f(x) = l^{۲} \times l = l^{۳}$$

در حالت کلی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n = l^n$

ب) برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to ۲۰} \left(\frac{۲}{۵}x - ۳\right)$ چگونه از قوانین ۱، ۴ و ۵ استفاده می کنید؟ توضیح دهید.

$$\lim_{x\to ۲۰}\left(\frac{۲}{۵}x\right) = \frac{۲}{۵}\lim_{x\to ۲۰} x = \frac{۲}{۵}(۲۰) = ۸$$

$$\lim_{x\to ۲۰}\left(\frac{۲}{۵}x - ۳\right) = \lim_{x\to ۲۰}\left(\frac{۲}{۵}x\right) - \lim_{x\to ۲۰} ۳ = ۸ - ۳ = ۵$$

صفحه ۱۳۰ کتاب درسی

۶ حد تقسیم :

اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تقسیم دو تابع در آن نقطه برابر حاصل تقسیم حدهای آنها در همان نقطه است؛ به شرط آن که حد تابع مخرج در آن نقطه صفر نشود.

به طور کلی اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim_{x\to a} g(x) = m$ و $m \neq ۰$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{l}{m}$$

مثال:

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۲x+۱}{۵x^۲}\right) = \frac{\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)}{\lim_{x\to ۱}(۵x^۲)} = \frac{۲(۱)+۱}{۵(۱)^۲} = \frac{۳}{۵}$$

فعالیت ۱ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

برای تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۳x^۲ + ۲x - ۷$،

الف) با تکمیل جای خالی $\lim\limits_{x\to۱} f(x)$ را به دست آورید.

$$\lim_{x\to۱} f(x) = \lim_{x\to۱}(۳x^۲ + ۲x - ۷) = \lim_{x\to۱}(۳x^۲) + \lim_{x\to۱}(۲x) - \lim_{x\to۱}(۷) =$$

$$۳\lim_{x\to۱}(x^۲) + ۲\lim_{x\to۱}(x) - \lim_{x\to۱}(۷) = ۳(۱)^۲ + ۲(۱) - ۷ = -۲$$

ب) $f(۱)$ را محاسبه کنید و درستی $\lim\limits_{x\to۱} f(x) = f(۱)$ را بررسی کنید.

$$f(۱) = -۲ \Longrightarrow \lim_{x\to۱} f(x) = f(۱)$$

فعالیت ۱ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

پ) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{۱}{۸}x^{۴}-x^{۳}+۵x-\frac{۱}{۲}$ درستی $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$ را بررسی کنید.

$$\lim_{x\to ۲} g(x)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{۸}x^{۴}-x^{۳}+۵x-\frac{۱}{۲}\right)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{۸}x^{۴}\right)-\lim_{x\to ۲}(x^{۳})+\lim_{x\to ۲}(۵x)-\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)=$$

$$\frac{۱}{۸}\lim_{x\to ۲}(x^{۴})-\lim_{x\to ۲}(x^{۳})+۵\lim_{x\to ۲}(x)-\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۸}(۲)^{۴}-(۲)^{۳}+۵(۲)-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

$$g(۲)=\frac{۷}{۲}\Longrightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$$

حد تابع چند جمله ای

به طور کلی حد یک تابع چندجمله ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

فعالیت ۲ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

حد تابع گویا

به طور کلی اگر $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع گویا باشد (که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چند جمله ای هستند)، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه ای به طول a کافی است که $\lim\limits_{x\to a} p(x)$ را بر $\lim\limits_{x\to a} q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آن که $\lim\limits_{x\to a} q(x)\neq ۰$.

به عنوان مثال:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(۲x-۱)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۴x+۱)}=\frac{۲(۳)-۱}{(۳)^۲-۴(۳)+۱}=-\frac{۵}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+۲x^۳+۱}{۵x^۲+\frac{۲}{۳}}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x^۴+۲x^۳+۱)}{\lim\limits_{x\to ۱}\left(۵x^۲+\frac{۲}{۳}\right)}=\frac{(۱)^۴+۲(۱)^۳+۱}{۵(۱)^۲+\frac{۲}{۳}}=\frac{۴}{\frac{۱۷}{۳}}=\frac{۱۲}{۱۷}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲-۱)}{\lim\limits_{x\to ۱}\left(\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱\right)}=\frac{(۱)^۲-۱}{\frac{۳}{۵}(۱)^۲-۲(۱)+۱}=\frac{۰}{\frac{-۲}{۵}}=۰$$

مثال صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

$\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۴}{x-۲} = \frac{\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴)}{\lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)} = \frac{۰}{۰}$$

صفرصفرم $\left(\frac{۰}{۰}\right)$: یکی از چند حالتی است که به آن ابهام می گوییم.

در این حالت می بایست ابهام از سوال برداشته شود. به عبارت دیگر رفع ابهام شود.

در سوالاتی مانند سوال بالا به منظور رفع ابهام، چند جمله ای های تشکیل دهنده عبارت گویای داده شده را تجزیه می کنند.

با این کار عامل ایجاد کنندهٔ ابهام از صورت و مخرج خط می خورد.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۴}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}} = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۲+۲=۴$$

توجه توجه

در این درس ما فقط با عبارت های گویا سروکار داریم و عبارت های گویایی که به حالت صفرصفرم درمی آیند را رفع ابهام می کنیم.

در این درس؛ با عبارت های غیر گویایی که حاصل آنها صفرصفرم است کاری نداریم و آنها را در پایهٔ دوازدهم می خوانیم.

سوالاتی نظیر موارد زیر:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}=$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{۱+\cos^۳ x}{۱+\cos x}=$$

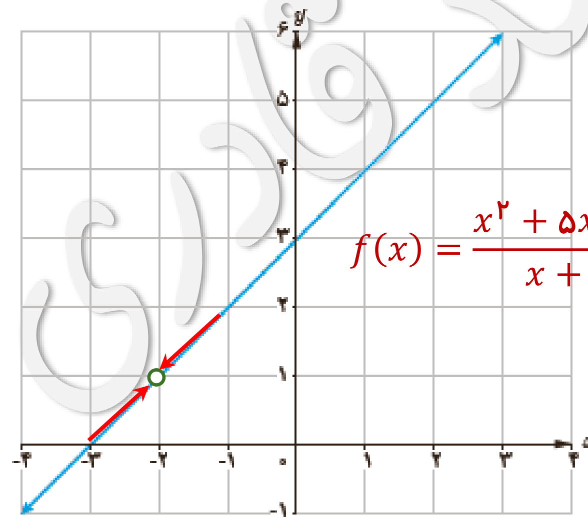
$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x-\sin x}{\sin x}=$$

کار در کلاس صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

حد زیر را محاسبه کنید و به کمک نمودار محاسبهٔ حد را توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x \to -۲} \dfrac{x^۲ + ۵x + ۶}{x + ۲} = \dfrac{۰}{۰}$

رفع ابهام می کنیم.

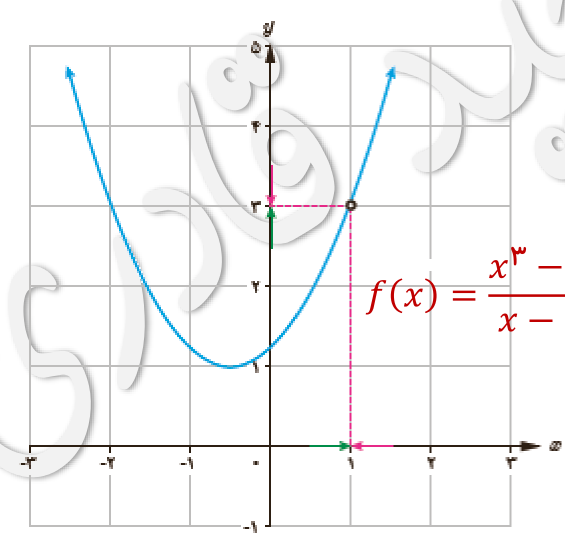


$$\lim\limits_{x \to -۲} \frac{x^۲ + ۵x + ۶}{x + ۲} = \lim\limits_{x \to -۲} \frac{\cancel{(x + ۲)}(x + ۳)}{\cancel{(x + ۲)}} = \lim\limits_{x \to -۲} (x + ۳) = -۲ + ۳ = ۱$$

کار در کلاس صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

حد زیر را محاسبه کنید و به کمک نمودار محاسبهٔ حد را توضیح دهید.

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^۳ - ۱}{x - ۱} = \dfrac{۰}{۰}$



رفع ابهام می کنیم.

اتحاد چاق و لاغر

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\cancel{(x - ۱)}(x^۲ + x + ۱)}{\cancel{(x - ۱)}} = \lim_{x\to ۱}(x^۲ + x + ۱) = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۴x+۳}{x^{۲}-۵x+۴}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x^{۲}-۴x+۳)}{\lim\limits_{x\to ۱}(x^{۲}-۵x+۴)}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۴x+۳}{x^{۲}-۵x+۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x-۳)}{\cancel{(x-۱)}(x-۴)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۳)}{(x-۴)}=\frac{۱-۳}{۱-۴}=\frac{۲}{۳}$$

نکته

اگر $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع گویا باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{۰}{۰}$ آنگاه $x-a$ همان عامل ایجاد کنندهٔ ابهام است که در فرم تجزیه شدهٔ $p(x)$ و $q(x)$ ظاهر شده و خط می خورد.

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{2x^2+3x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+3x-5\right)}=\frac{0}{0}$$

عامل ایجاد کنندهٔ ابهام $x-1$ است. آن را در صورت و مخرج یافته و خط می زنیم.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{2x^2+3x-5}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{(x-1)(2x+5)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{(x-1)(2x+5)}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(2x+5)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{2x+5}=\frac{-1}{2(1)+5}=\frac{-1}{7}$$

در تجزیهٔ یک عبارت وقتی ما یکی از عامل های ضربی را بشناسیم یافتن عامل دیگر خیلی راحت می شود.

به عنوان مثال: در تجزیهٔ مخرج؛ وقتی ما می دانیم یکی از عامل های ضربی $(x-1)$ است، عامل دیگر باید بتواند با ضرب در عامل اول یعنی $(x-1)$ ؛ جملات -5 و $2x^2$ را بسازد. پس عامل دیگر $(2x+5)$ است.

صفحه ۱۳۳ کتاب درسی

۷ حد ریشه:

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد.

به طور کلی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ و $l > ۰$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt{l}$$

مثال:

$$\lim_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۶} = \sqrt{\lim_{x\to ۵}(۲x-۶)} = \sqrt{۲(۵)-۶} = \sqrt{۴} = ۲$$

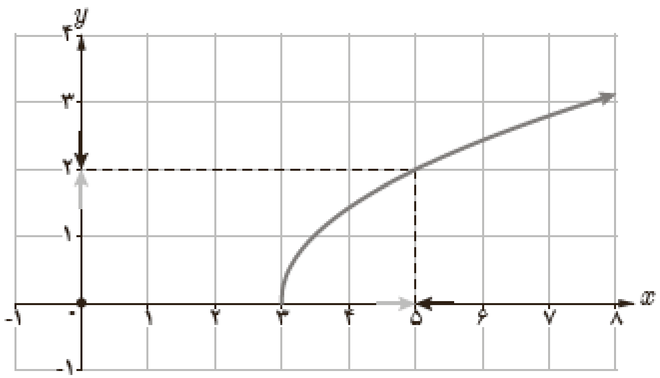
به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

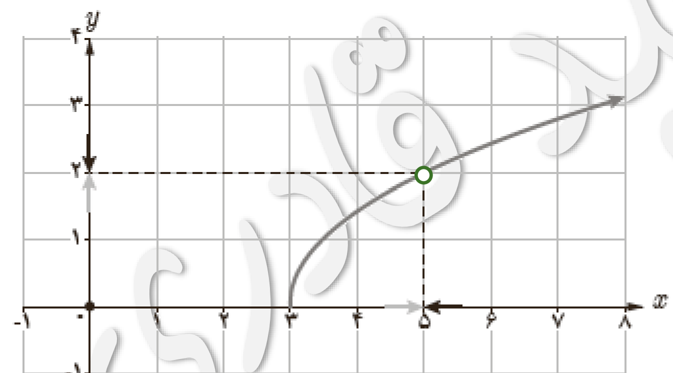
کار در کلاس ۱ صفحه ۱۳۳ کتاب درسی

نمودارهای توابع با ضابطه های $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$ و $g(x)=\sqrt{۲x-۶}\ ,(x\neq ۵)$ رسم شده اند.

الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟



$f(x)=\sqrt{۲x-۶}$



$g(x)=\sqrt{۲x-۶}\ ,(x\neq ۵)$

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)$ موجودند؟ بله، حد توابع f و g در $x=۵$ موجود و برابر با ۲ است.

پ) کدام یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}=$ موجود نیست

$\lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}=$ موجود نیست

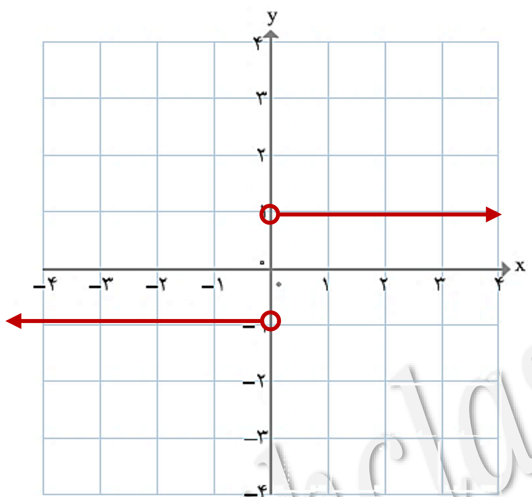
$\lim\limits_{x\to ۳^+}\sqrt{۲x-۶}=۰$

دامنهٔ تابع $\sqrt{۲x-۶}$ برابر با بازهٔ $[۳,+\infty)$ است. به عبارتی دیگر تابع به ازای xهای کوچک تر از ۳ تعریف نمی شود، لذا حد چپ تابع در $x=۳$ موجود نیست، در نتیجه تابع در $x=۳$ حد ندارد.

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۳۴ کتاب درسی

دربارهٔ تابع $h(x)=\frac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

$$h(x)=\begin{cases}\frac{-x}{x}, & x<۰\\ \frac{x}{x}, & x>۰\end{cases} \rightarrow h(x)=\begin{cases}-۱, & x<۰\\ ۱, & x>۰\end{cases}$$



الف) $h(x)=۱$ نادرست

ب) $D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$ درست

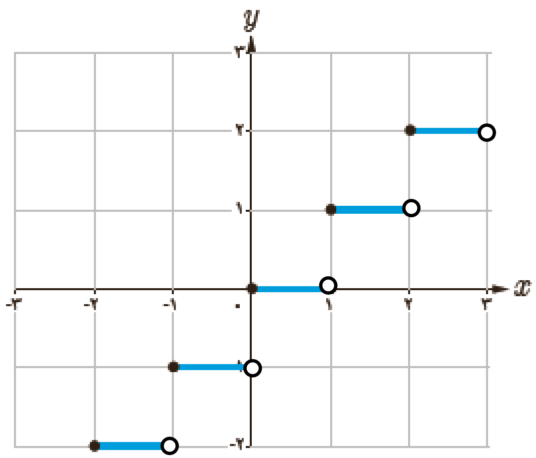
پ) $\lim_{x\to ۰^+} h(x)=۱$ درست

ت) $h(۰)=۰$ نادرست، مقدار تابع h در $x=۰$ موجود نیست.

ث) $\lim_{x\to ۰} h(x)$ وجود ندارد. درست، زیرا حد چپ و راست تابع h در $x=۰$ با هم برابر نیست.

کار در کلاس ۳ صفحه ۱۳۴ کتاب درسی

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = [x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



زیرا حد چپ و راست برابر نیست.

الف) $\lim_{x\to ۲^+} [x] =$ ۲

ب) $\lim_{x\to ۲^-} [x] =$ ۱

پ) $\lim_{x\to ۲} [x] =$ موجود نیست

ت) $\lim_{x\to ۱} [x] =$ موجود نیست

ث) $\lim_{x\to ۱/۵} [x] =$ ۱

ج) $\lim_{x\to -\sqrt{۲}} [x] =$ -۲

تابع $[x]$ به ازای مقادیر صحیح حد ندارد.

کار در کلاس ۴ صفحه ۱۳۴ کتاب درسی

حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x \to ۲} \frac{[x]}{x} =$ موجود نیست

یعنی عددی؛ کمی کمتر از دو

$\lim_{x \to ۲^-} \frac{[x]}{x} = \frac{[۲^-]}{۲} = \frac{۱}{۲}$

یعنی عددی؛ کمی بیشتر از دو

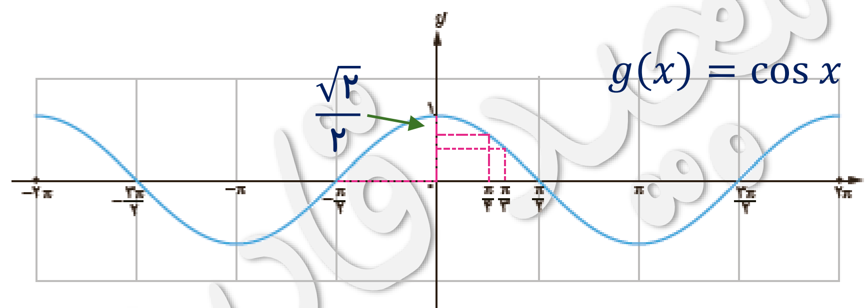
$\lim_{x \to ۲^+} \frac{[x]}{x} = \frac{[۲^+]}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$

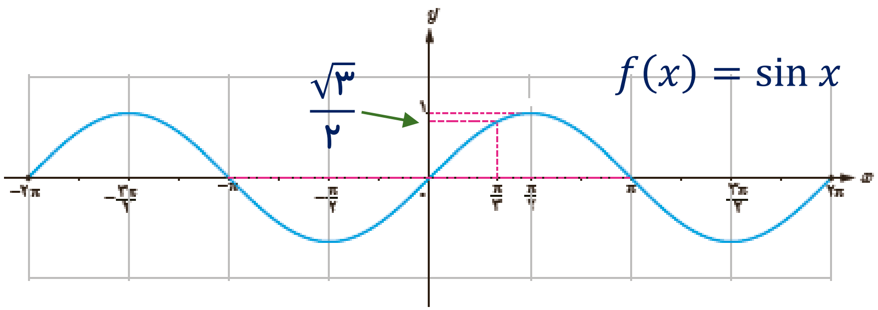
یعنی عددی؛ کمی بیشتر از یک

ب) $\lim_{x \to ۱^+} \frac{[x] - ۳}{x} = \frac{[۱^+] - ۳}{۱} = \frac{۱ - ۳}{۱} = -۲$

فعالیت صفحه ۱۳۴ کتاب درسی

با استفاده از نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ حدهای زیر را بیابید.





ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\cos x = ۱ = \cos ۰$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^-}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴}$

چ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۲}}\cos x = ۰ = \cos\frac{-\pi}{۲}$

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^+}\cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳}$

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\sin x = ۱ = \sin\frac{\pi}{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to -\pi}\sin x = ۰ = \sin(-\pi)$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^-}\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳}$

ت) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\sin x = ۰ = \sin\pi$

به طور کلی داریم: $\lim\limits_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha$ و $\lim\limits_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha$.

صفحه ۱۳۵
کتاب درسی

مثال صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

به کمک دستورهایی که در این درس آموخته اید، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\cos x}{۲+\sin x} =$

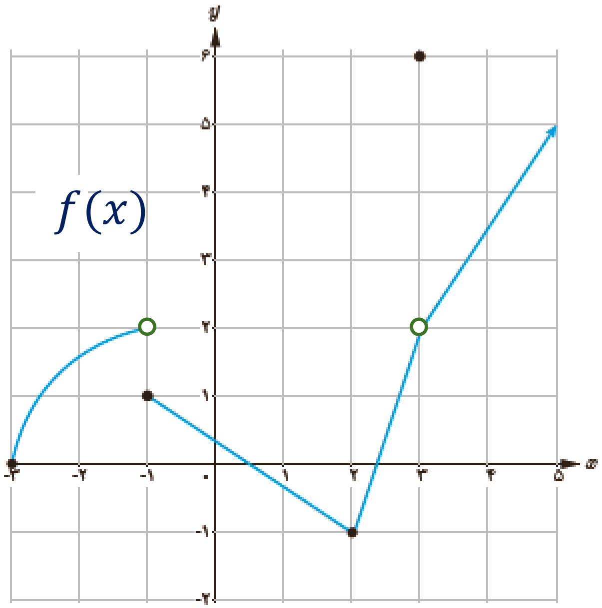
ب) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x \cos x}{۱+sin^۲ x} =$

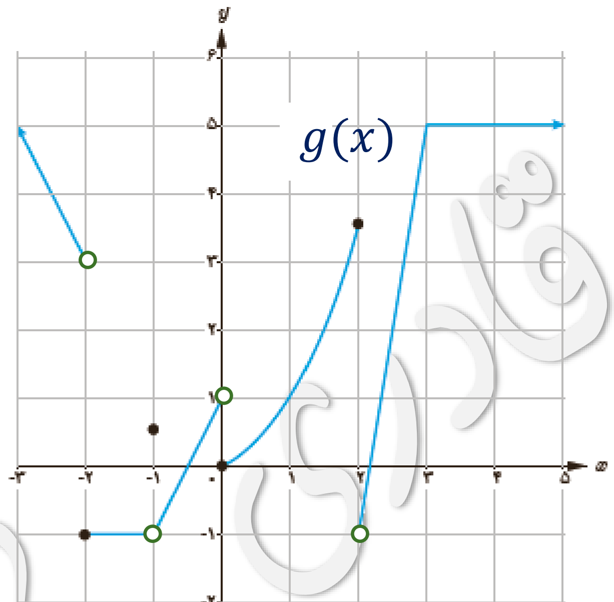
الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\cos x}{۲+\sin x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to ۰} \cos x}{\lim\limits_{x\to ۰} (۲+\sin x)} = \dfrac{\cos ۰}{۲+\sin ۰} = \dfrac{۱}{۲+۰} = \dfrac{۱}{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x \cos x}{۱+sin^۲ x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to \pi} (\sin x \cos x)}{\lim\limits_{x\to \pi} (۱+sin^۲ x)} = \dfrac{\sin \pi \times \cos \pi}{۱+sin^۲ \pi} = \dfrac{۰\times(-۱)}{۱+۱^۲} = \dfrac{۰}{۲} = ۰$

تمرین ۱ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



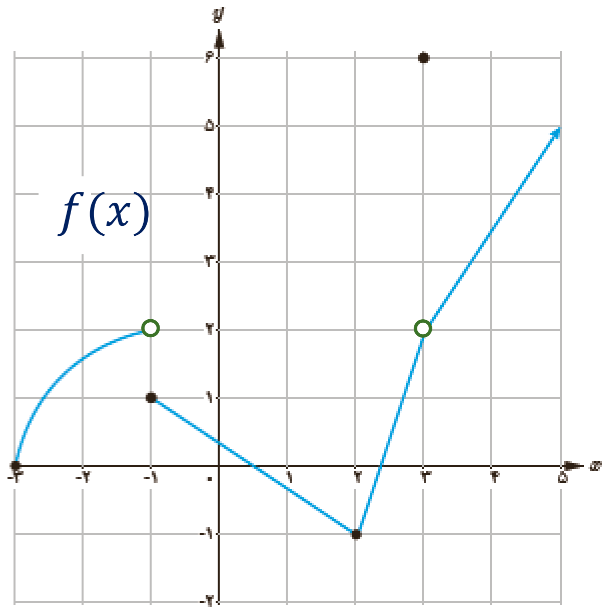


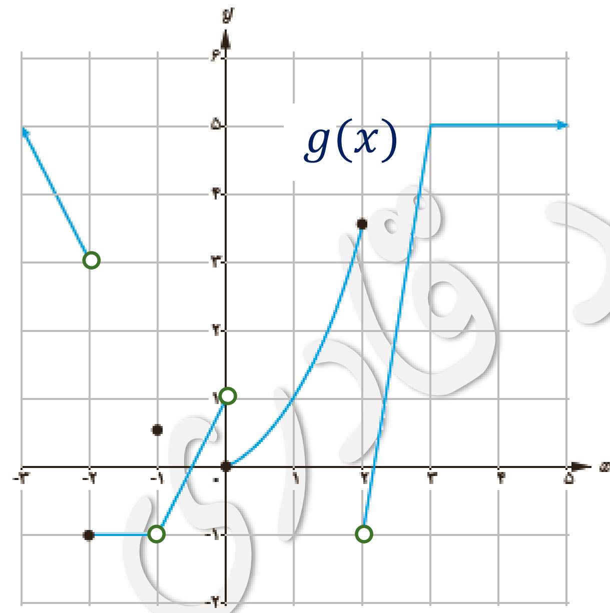
الف) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) =$ موجود نیست

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) = ۲\end{array}\right\} \longrightarrow \lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x) = ۵$

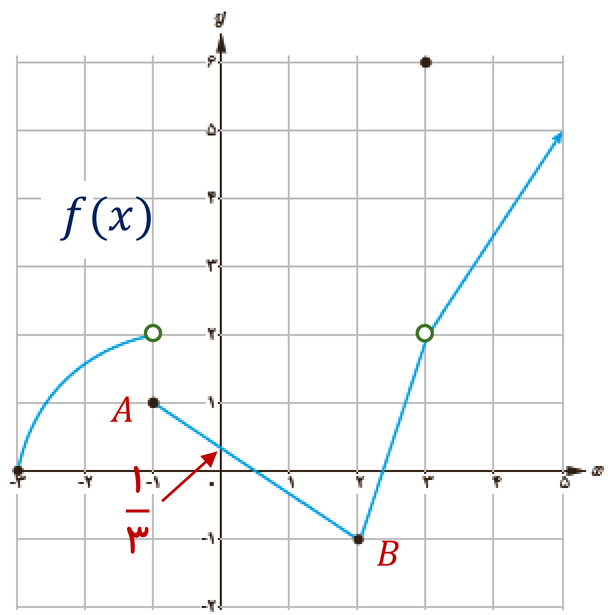


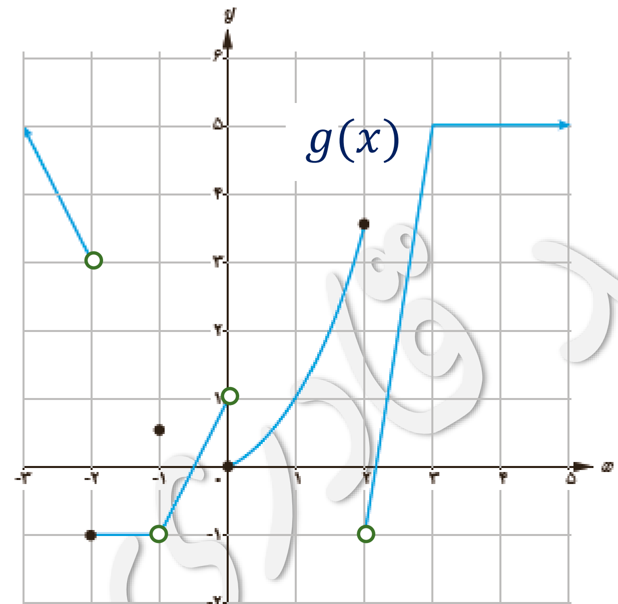


ت) $\lim\limits_{x\to ۳}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to ۳} f(x) + \lim\limits_{x\to ۳} g(x) = ۲+۵=۷$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to -۱} f(x) + \lim\limits_{x\to -۱} g(x) =$ موجود نیست

$\lim\limits_{x\to -۱} g(x) = -۱$ ولی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ موجود نیست.





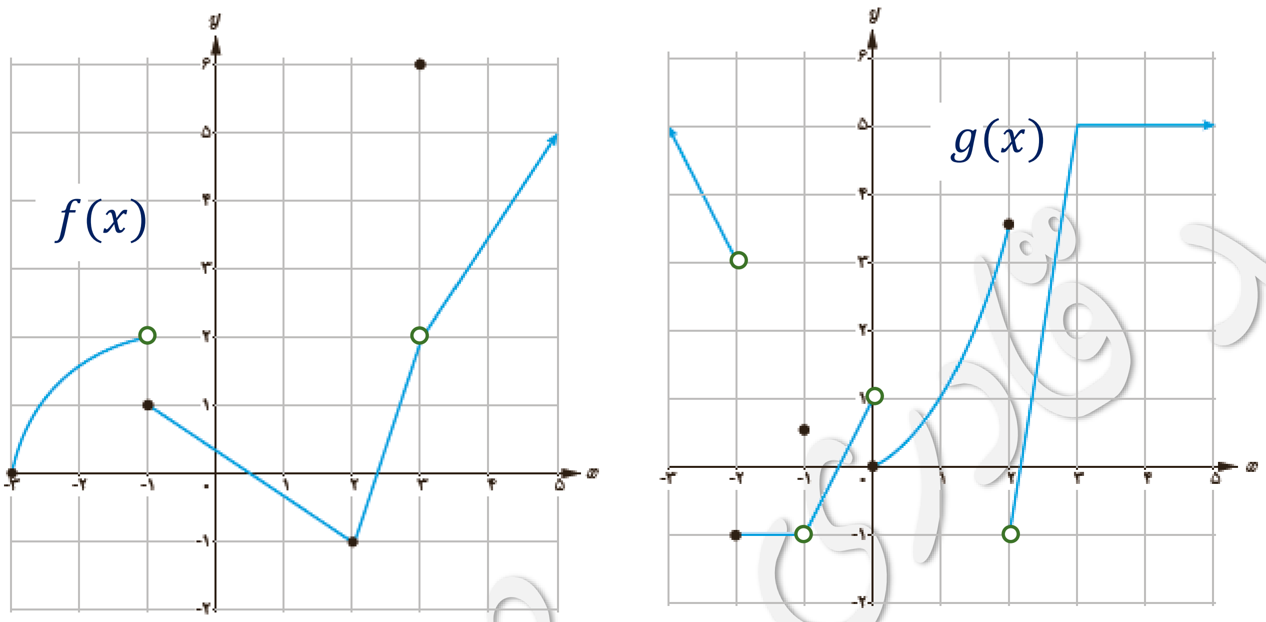
ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\left(۲f(x)+۵g(x)\right) = ۲\lim\limits_{x\to ۲} f(x) + ۵\lim\limits_{x\to ۲} g(x) =$ موجود نیست

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = -۱$ ولی $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ موجود نیست.

چ) $\lim\limits_{x\to ۰}\left(f(x)\right)^۴ = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۴$

با توجه به مختصات نقاط A و B می توان گفت، معادلهٔ پاره خط AB برابر است با: $y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۱}{۳}$

حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ برابر با عرض از مبدا پاره خط AB است.



ح) $\lim\limits_{x\to ۰}(g(x))^{۲} =$ موجود نیست

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^{+}} g(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^{-}} g(x) = ۱\end{array}\right\} \longrightarrow \lim\limits_{x\to ۰^{+}} g(x) \neq \lim\limits_{x\to ۰^{-}} g(x)$

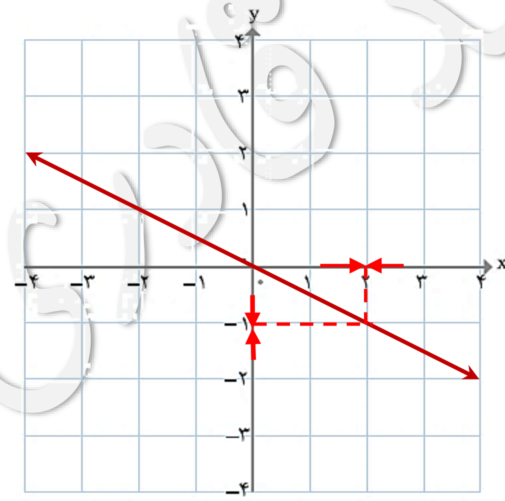
خ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ موجود نیست

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = -۱$ ولی $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ موجود نیست.

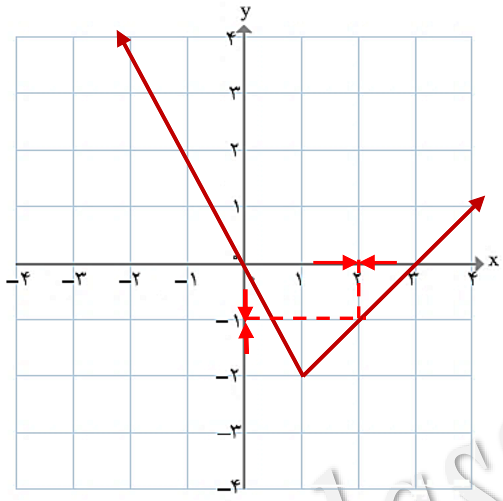
د) $\lim\limits_{x\to ۵} (f(x).g(x)) = \lim\limits_{x\to ۵} f(x) \times \lim\limits_{x\to ۵} g(x) = ۵ \times ۵ = ۲۵$

تمرین ۲ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.



$\lim\limits_{x \to ۲} g(x) = -۱$



$\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = -۱$

تمرین ۳ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۷} (-۳) = -۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} (-۲x - ۷) = -۲(۰) - ۷ = -۷$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱} (۳x^{۲} - ۴x + ۵) = ۳(-۱)^{۲} - ۴(-۱) + ۵ = ۱۲$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^{۲} - ۳x}{x^{۲} - ۹} = \dfrac{۰}{۰}$ رفع ابهام می کنیم.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^{۲} - ۳x}{x^{۲} - ۹} = \lim_{x\to ۳} \frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)} = \lim_{x\to ۳} \frac{x}{(x+۳)} = \frac{۳}{۳+۳} = \frac{۱}{۲}$$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x}{۲x^{۲} - x} = \dfrac{۰}{۰}$ رفع ابهام می کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x}{۲x^{۲} - x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{x(۲x-۱)} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{۲x-۱} = \frac{۱}{۲(۰)-۱} = -۱$$

تمرین ۳ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

ج) $\lim_{x\to -۲} \frac{x^۳+۸}{x+۲} = \frac{۰}{۰}$ رفع ابهام می کنیم.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۳+۸}{x+۲} = \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{(x+۲)} = \lim_{x\to -۲} (x^۲-۲x+۴) = (-۲)^۲ - ۲(-۲) + ۴ = ۱۲$$

چ) $\lim_{x\to -۲} [x] =$ موجود نیست

$$\lim_{x\to -۲^+} [x] = [(-۲)^+] = -۲ \qquad \lim_{x\to -۲^-} [x] = [(-۲)^-] = -۳$$

ح) $\lim_{x\to ۰^+} \sqrt{x} = \sqrt{۰} = ۰$

خ) $\lim_{x\to ۲} \sqrt{x+۷} = \sqrt{۲+۷} = \sqrt{۹} = ۳$

د) $\lim_{x\to ۰^-} \sqrt{x} =$ موجود نیست

دامنهٔ تابع $\sqrt{x}$ برابر با بازهٔ $[۰, +\infty)$ است.
به عبارتی دیگر تابع به ازای xهای کوچک تر از صفر تعریف نمی شود.

ذ) $\lim_{x\to ۲} \sqrt{x+۵} = \sqrt{۲+۵} = \sqrt{۷}$

تمرین ۳ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

ر) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۲} =$ موجود نیست

دامنهٔ تابع $\sqrt{x-۲}$ برابر با بازهٔ $[۲ , +\infty)$ است.
به عبارتی دیگر تابع به ازای xهای کوچک تر از ۲ تعریف نمی شود.

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x-۲}{[x]+۱} = \dfrac{۳-۲}{[۳^+]+۱} = \dfrac{۱}{۳+۱} = \dfrac{۱}{۴}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}}\cos x = \cos\left(\dfrac{-\pi}{۳}\right) = \dfrac{۱}{۲}$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{۴}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{۴}\right) = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}+\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = \dfrac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$

ش) $\lim\limits_{x\to -۲^+}\dfrac{x}{[x]} = \dfrac{-۲}{[(-۲)^+]} = \dfrac{-۲}{-۲} = ۱$

تمرین ۳ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

ص) $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+x-۶}{x^۲-۶x+۸} = \frac{(۲)^۲+(۲)-۶}{(۲)^۲-۶(۲)+۸} = \frac{۰}{۰}$ رفع ابهام می کنیم.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+x-۶}{x^۲-۶x+۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x+۳)}{(x-۲)(x-۴)} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x+۳)}{(x-۴)} = \frac{۲-۳}{۲-۴} = \frac{۱}{۲}$$

ض) $\lim_{x\to ۰} (x+[x]) =$ موجود نیست

$$\lim_{x\to ۰^+} (x+[x]) = ۰+[۰^+] = ۰$$

$$\lim_{x\to ۰^-} (x+[x]) = ۰+[۰^-] = ۰+(-۱) = -۱$$

تمرین ۴ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = ۰$ و $\lim\limits_{x\to ۲} h(x) = -۱$ ، حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} (f(x) + h(x)) = \lim\limits_{x\to ۲} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲} h(x) = ۳ - ۱ = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} (h(x)^۵) = (-۱)^۵ = -۱$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to ۲} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)} = \dfrac{۳}{۰} = \infty$ تعریف نشده

ت) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} f(x)} = \dfrac{۰}{۳} = ۰$

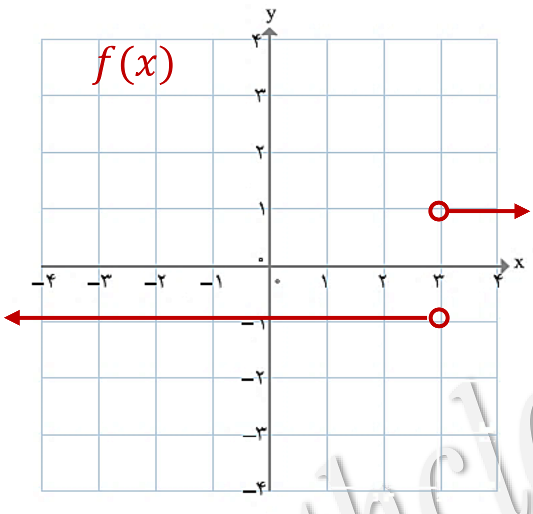
ث) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۳f(x)}{g(x) - ۵h(x)} = \dfrac{۳\lim\limits_{x\to ۲} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} g(x) - ۵\lim\limits_{x\to ۲} h(x)} = \dfrac{۳(۳)}{۰ - ۵(-۱)} = \dfrac{۹}{۵}$

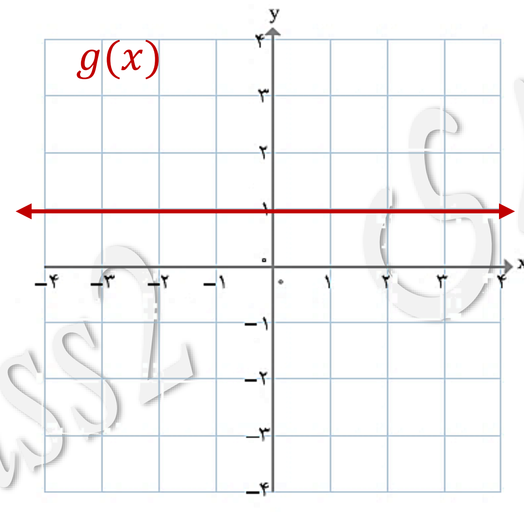
ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۱}{h(x)} = \dfrac{۱}{\lim\limits_{x\to ۲} h(x)} = \dfrac{۱}{-۱} = -۱$

تمرین ۵ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{|x-۳|}{x-۳}$ و $g(x)=۱$ را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x-۳)}{x-۳}, & x<۳\\[2mm] \dfrac{(x-۳)}{x-۳}, & x>۳\end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases}-۱, & x<۳\\ ۱, & x>۳\end{cases}$$





الف) آیا $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ موجود است؟ حد تابع f در $x=۳$ وجود ندارد زیرا حد چپ و حد راست با هم برابر نیستند.

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)$ موجود است؟ حد تابع g در $x=۳$ موجود و برابر یک است.

پ) در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟ حد توابع g و f به ازای xهای بزرگتر از ۳ با هم برابرند.

تمرین ۶ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

در هر یک از حالت های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ کدام در نقطه ای مانند a حد نداشته باشند.

اگر توابع f و g هیچ کدام در نقطه ای مانند a حد نداشته باشند، دربارهٔ حد تابع $f+g$ نمی توان اظهار نظر کرد.

به عنوان مثال و آنچه در مقابل می بینیم،
توابع f و g در $x=۳$ حد ندارند، ولی حد تابع $f+g$ در $x=۳$ موجود و برابر صفر است.

$$f(x)=\begin{cases}-۱\,, & x\le ۳\\ ۱\,, & x>۳\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}۱\,, & x\le ۳\\ -۱\,, & x>۳\end{cases}$$

$$\rightarrow\ (f+g)(x)=۰$$

به عنوان مثال و آنچه در زیرمی بینیم، توابع f، g و $f+g$ در $x=۳$ حد ندارند.

$$f(x)=\begin{cases}-۲\,, & x\le ۳\\ ۲\,, & x>۳\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}۱\,, & x\le ۳\\ -۱\,, & x>۳\end{cases}$$

$$\rightarrow\ (f+g)(x)=\begin{cases}-۱\,, & x\le ۳\\ ۱\,, & x>۳\end{cases}$$

تمرین ۶ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

در هر یک از حالت های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می توان گفت؟

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد، آنگاه تابع $f+g$ نیز در a حد ندارد.

اثبات به روش برهان خلف

فرض می کنیم تابع $f+g$ در a حد دارد.

بنا بر فرض چون تابع f نیز در a حد دارد، آنگاه تفاضل توابع f و $f+g$ نیز در a حد دارد.

تفاضل توابع f و $f+g$ همان تابع g است و حد داشتن تابع g در a حد ؛ تناقض با فرض مسئله است.

پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

تمرین ۷ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی

اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to m^+}[x] = m$

ب) $\lim_{x\to m^-}[x] = m-۱$

پ) $\lim_{x\to m}[x] =$ موجود نیست

به طور کلی تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی حد دارد؟

تابع $[x]$ به ازای مقادیر صحیح حد ندارد. ولی حد این تابع در تمام نقاط غیرصحیح موجود است.

تمرین تکمیلی

سوال ۳ : الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

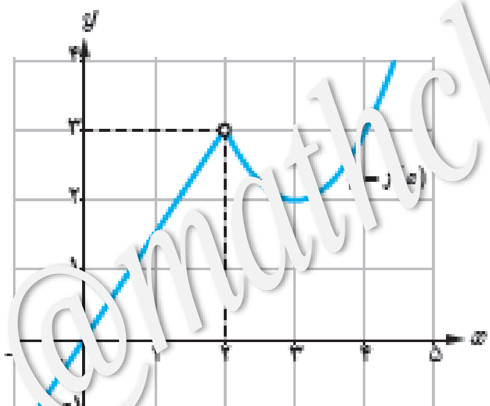
الف) $\lim\limits_{x\to -۱} x^{۴} = (-۱)^{۴} = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱۰} (۵x^{۳} - ۶|x| + ۱) = ۵(۱۰)^{۳} - ۶|۱۰| + ۱ = ۴۹۴۱$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^{۲} + ۴x + ۴}{۴x^{۳} - ۷x + ۱} = \dfrac{(۲)^{۲} + ۴(۲) + ۴}{۴(۲)^{۳} - ۷(۲) + ۱} = \dfrac{۱۶}{۱۵}$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \dfrac{x - [x]}{۱ - x} = \dfrac{\frac{۱}{۲} - \left[\frac{۱}{۲}\right]}{۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)} = \dfrac{\frac{۱}{۲} - ۰}{\frac{۱}{۲}} = ۱$

ب) نمودار تابع f در شکل روبه رو رسم شده است.



مقدار $\lim\limits_{x\to ۲} xf(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x\to ۲} xf(x) = \lim_{x\to ۲} x \times \lim_{x\to ۲} f(x) = ۲ \times ۳ = ۶$$

تمرین تکمیلی

سوال ۴ : مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^۳ = (\sqrt{۹}-۹)^۳ = (-۶)^۳ = -۲۱۶$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱}(-۶x^۷ - ۴x^۲ + ۵) = -۶(-۱)^۷ - ۴(-۱)^۲ + ۵ = ۷$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۵}{۳}} \dfrac{(x-\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^۳+۱)} = \dfrac{\left(-\frac{۵}{۳}-\pi\right)\left(۳\left(-\frac{۵}{۳}\right)+۵\right)}{\left(۳\left(-\frac{۵}{۳}\right)+۶\right)\left(\left(-\frac{۵}{۳}\right)^۳+۱\right)} = \dfrac{\left(-\frac{۵}{۳}-\pi\right)(۰)}{(۱)\left(\frac{۱۲۵}{۲۷}+۱\right)} = ۰$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^+} \dfrac{۱-x^۲}{x^۲-۴} = \dfrac{۱-\sqrt{۲}^۲}{\sqrt{۲}^۲-۴} = \dfrac{۱-|۲|}{|۲|-۴} = \dfrac{۱-۲}{۲-۴} = \dfrac{۱}{۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}(x^۴+۳x-۱) = \lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}(x^۴) + \lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}(۳x) - \lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}(۱) =$

$$(\sqrt{۲})^۴ + ۳(\sqrt{۲}) - ۱ = ۳ + ۳\sqrt{۲}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۵ : مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \sqrt{۴x^۲+۶x} = \sqrt{۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲+۶\left(\frac{۱}{۲}\right)} = \sqrt{۱+۳} = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{\sin x}{x+\cos x} = \frac{\sin ۰}{۰-\cos ۰} = \frac{۰}{-۱} = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{|\cos x|}{x-\pi} =$

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{۲}\right)^+} \frac{|\cos x|}{x-\pi} = \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{۲}\right)^+} \frac{-\cos x}{x-\pi} = \frac{-\cos\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}-\pi} = \frac{۰}{-\frac{\pi}{۲}} = ۰$$

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{۲}\right)^-} \frac{|\cos x|}{x-\pi} = \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{۲}\right)^-} \frac{\cos x}{x-\pi} = \frac{\cos\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}-\pi} = \frac{۰}{-\frac{\pi}{۲}} = ۰$$

تمرین تکمیلی

سوال ۶ : حد توابع زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲+۷}{۱-x} = \frac{\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴x^۲+۷)}{\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۱-x)} = \frac{\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴x^۲)+\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۷)}{\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۱)-\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(x)} = \frac{۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲+۷}{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)} = \frac{۸}{\frac{۱}{۲}} = ۱۶$

ب) $\lim_{x\to۳} x|x| = \lim_{x\to۳} x \times \lim_{x\to۳}|x| = ۳\times|۳| = ۹$

پ) $\lim_{x\to a^+} x^n = a^n$

یعنی عددی؛ کمی کمتر از یک

ت) $\lim_{x\to۱^-} \frac{x-[x]}{x^۲+۲} = \frac{۱-[۱^-]}{۱^۲+۲} = \frac{۱-۰}{۱+۲} = \frac{۱}{۳}$

ث) $\lim_{x\to۲^+} \frac{\sqrt{x}-۲}{[x]+۲} = \frac{\sqrt{۲}-۲}{[۲^+]+۲} = \frac{۰}{۴+۲} = ۰$

یعنی عددی؛ کمی بیشتر از دو

تمرین تکمیلی

سوال ۷ : مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x} = \frac{2(-1)^2+(-1)-1}{3(-1)^2+3(-1)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{3x\cancel{(x+1)}} = \lim_{x\to -1} \frac{2x-1}{3x} = \frac{-2-1}{-3} = 1$$

در تجزیهٔ یک عبارت وقتی ما یکی از عامل های ضربی را بشناسیم یافتن عامل دیگر خیلی راحت می شود.

در تجزیهٔ صورت کسر؛ وقتی ما می دانیم یکی از عامل های ضربی $(x+1)$ است، عامل دیگر باید بتواند با ضرب در عامل اول یعنی $(x+1)$ ؛ جملات -1 و $2x^2$ را بسازد. پس عامل دیگر $(2x-1)$ است.

ب) $$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2[x]-8}{x-2} = \frac{8-8}{2-2} = \frac{0}{0}$$

در بازهٔ $(2\,,3]$ جزء صحیح x برابر ۲ است.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2[x]-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 2(x+2) = 2(2+2) = 8$$

تمرین تکمیلی

سوال ۸ : مقدار حدود زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} (۲\cos^۲ x - \sin x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} ۲\cos^۲ x - \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \sin x = ۲\cos^۲\frac{\pi}{۶} - \sin\frac{\pi}{۶} =$

$$۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

ب) $\lim_{x\to ۰^+} (\cos x - \sin x) = \cos(۰) - \sin(۰) = ۱ - ۰ = ۱$

پ) $\lim_{x\to -\pi} \frac{\pi\cos x}{x} = \frac{\lim_{x\to-\pi} \pi\cos x}{\lim_{x\to-\pi} x} = \frac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = ۱$

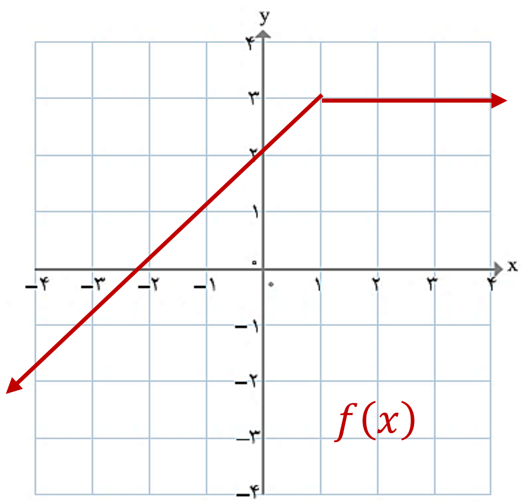
ت) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \sin x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \cos x} = \frac{\sin\frac{\pi}{۳}}{\cos\frac{\pi}{۳}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$

تمرین تکمیلی

سوال ۹ : فرض کنید که f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۳$.

آیا می توان گفت که f حتما تابع ثابت ۳ است؟

خیر، مثال نقضی ارائه می کنیم.



$$f(x) = \begin{cases} x+۲, & x \leq ۱ \\ ۳, & x > ۱ \end{cases}$$

این مسئله پاسخ باز است.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۰ : تابع g را به گونه ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{g(x)}{x^۲-۱} = ۴$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{g(x)}{x^۲-۱} = ۴ \quad \to \quad \frac{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} x^۲-۱} = ۴ \quad \to \quad \lim_{x\to ۲} g(x) = ۴ \lim_{x\to ۲} (x^۲-۱)$$

$$\to \quad \lim_{x\to ۲} g(x) = ۴\,(۲^۲-۱) \quad \to \quad \lim_{x\to ۲} g(x) = ۱۲$$

تابع g را می توان این گونه تعریف نمود: $g(x) = ۵x+۲$ یا $g(x) = ۱۰x-۲$ یا ...

این مسئله پاسخ باز است.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۱ : نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - L) = 0$.

آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x\to a}(f(x) - L) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = L - L = 0$$

عکس این قضیه نیز درست است.

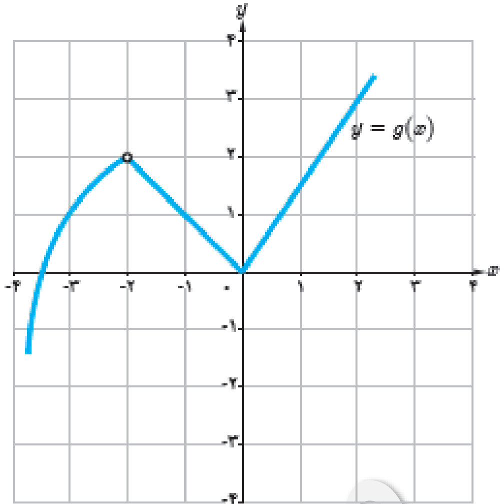
$$\lim_{x\to a}(f(x) - L) = 0 \quad \to \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = 0 \quad \to \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} L$$

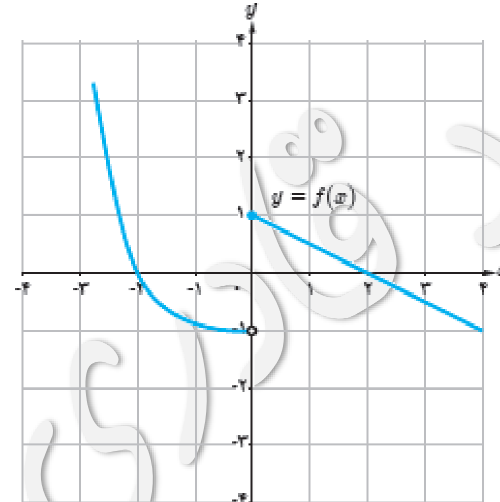
$$\to \lim_{x\to a} f(x) = L$$

بنابراین داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - L) = 0$.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۲ : در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim\limits_{x\to -۲}\left(۲g(x) - f(x)\right) = ۲\lim\limits_{x\to -۲} g(x) - \lim\limits_{x\to -۲} f(x) = ۲(۲) - ۰ = ۴$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{g(x)}{f(x)} = ۰$ $\dfrac{\lim\limits_{x\to ۰^+} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)} = \dfrac{۰}{۱} = ۰$ $\dfrac{\lim\limits_{x\to ۰^-} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)} = \dfrac{۰}{-۱} = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)} = -۳\lim\limits_{x\to -۳}\sqrt{g(x)} = -۳\sqrt{\lim\limits_{x\to -۳} g(x)} = -۳\sqrt{۱} = -۳$

ت) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)} = \lim\limits_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸} \times \lim\limits_{x\to ۲}\sqrt[۳]{g(x)} = ۲\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt[۳]{g(x)} = ۲\sqrt[۳]{۳}$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۳ : در صورتی که تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۱$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱} = ۵$ آنگاه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱} = ۵ \quad \to \quad \frac{\lim_{x\to ۱}(۲f(x)-۱)}{\lim_{x\to ۱}(f(x)+۱)} = ۵ \quad \to \quad \frac{۲\lim_{x\to ۱} f(x)-۱}{\lim_{x\to ۱} f(x)+۱} = ۵$$

طرفین وسطین می کنیم.

$$\to ۲\lim_{x\to ۱} f(x) - ۱ = ۵\lim_{x\to ۱} f(x) + ۵ \qquad \to ۲\lim_{x\to ۱} f(x) - ۵\lim_{x\to ۱} f(x) = ۵ + ۱$$

$$\to -۳\lim_{x\to ۱} f(x) = ۶$$

$$\to \lim_{x\to ۱} f(x) = -۲$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۴ : مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱^-}\frac{x^{۲}+[x]}{|x|}=\lim_{x\to -۱^-}\frac{(-۱)^{۲}+[(-۱)^-]}{|-۱|}=\lim_{x\to -۲^+}\frac{۱+(-۲)}{۱}=-۱$$

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱^+}(۳x+b)=۳(-۱)+b=-۳+b$$

تابع f در $x=-۲$ حد دارد در نتیجه حد چپ و راست آن در $x=-۲$ با هم برابر است. پس داریم:

$$-۱=-۳+b \;\to\; b=-۱+۳ \;\to\; b=۲$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۵ : مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در $x=-۲$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۲}{|x+۲|} & x\geq -۲\\ ۲[x]-a & x<-۲\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x)=\lim_{x\to -۲^+}\frac{x+۲}{|x+۲|}=\lim_{x\to -۲^+}\frac{x+۲}{x+۲}=\lim_{x\to -۲^+} ۱=۱$$

$$\lim_{x\to -۲^-} f(x)=\lim_{x\to -۲^-} ۲[x]-a=۲[(-۲)^-]-a=۲(-۳)-a=-۶-a$$

تابع f در $x=-۲$ حد دارد در نتیجه حد چپ و راست آن در $x=-۲$ با هم برابر است. پس داریم:

$$۱=-۶-a \quad\to\quad a=-۶-۱ \quad\to\quad a=-۷$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۶ : اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+x & x>۲ \\ ax+b & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ حد داشته باشد، آنگاه نشان دهید تابع $h(x)=\begin{cases} ۶-۲a[x] & x>۱ \\ bx & x\leq ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ دارای حد است.

تابع f در $x=۲$ حد دارد در نتیجه حد چپ و راست آن در $x=۲$ با هم برابرند. پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^{۲}+x)=(۲)^{۲}+(۲)=۶$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax+b)=a(۲)+b=۲a+b$$

$$\to\ ۲a+b=۶\ \to\ b=۶-۲a$$

نشان می دهیم حد چپ و راست تابع h در $x=۱$ با هم برابرند.

$$\lim_{x\to ۱^+} h(x)=\lim_{x\to ۱^+}(۶-۲a[x])=۶-۲a[۱]=۶-۲a=b$$

$$\lim_{x\to ۱^-} h(x)=\lim_{x\to ۱^-}(bx)=b(۱)=b$$

پایان درس دوم