درسنامه هندسه ۳ سال دوازدهم رشته ریاضی و فیزیک

تهییه و تنظیم علی پدرام سرگروه ریاضی منطقه اهر

درسنامه فصل اول

تعریف ماتریس: آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است،که از تعدادی سطر و ستون تشکیل شده است.
تعریف درایه: هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس گویند.
نکتهٔ ۱) ماتریس ها را معمولا با حروف بزرگ انگلیسی مانند $A\ ,B,C,\ldots$ نشان می دهیم.
تعریف مرتبه ماتریس: تعداد سطر و ستون یک ماتریس را مرتبه ماتریس گویند.
نکتهٔ۲) اگر ماتریسی mسطر و nستون داشته باشد،به صورت $m \times n$ نمایش می دهیم.
نکتهٔ۳) منظور از a_{ij} یعنی درایه ی که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ باشد. الف)مرتبه ماتریس را بنویسید.

جواب:3×2 یا به صورت $A_{3\times 2}$ نیزمی توانیم بنویسیم

ب)درایه های زیر را مشخص کنید. ... $= a_{12}$و $\cdots = a_{32}$ (جواب a_{32} برابر ۱۲ و جواب a_{12} برابر ۴- است.)

- تمرین: اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ با شرایط $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ 4 & i=j \\ j^2 & i<j \end{cases}$ ماتریس A را با درایه های آن بنویسید.

- حل: ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ زیر می باشد، در جای که شماره سطر و

ستون با هم برابرند عدد ۴ می نویسیم ($a_{11}=4, a_{22}=4, a_{33}=4$) در جا های که شماره سطر از ستون بیشتر باشد، سطر و ستون را با هم جمع می کنیم
($a_{21}=3 \quad a_{31}=4 \quad a_{32}=\ 5$) و در جاهای که شماره سطر از ستون کمتر است،

شماره ستون را به توان ۲ می رسانیم. پس بنابراین ماتریس A به صورت زیر می باشد: $A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

- چند ماتریس خاص:
- الف) تعریف ماتریس مربعی: اگر تعداد سطرها و ستون های یک ماتریس برابرباشند، آن ماتریس را ماتریس مربعی گویند.

- نکته: اگر A ماتریسی از مرتبۀ $n \times n$ باشد، اصطلاحاً آن را ماتریس مربعی از مرتبۀ n می نامند و معمولاً با A_n نمایش می دهند

- تعریف قطر اصلی در ماتریس مربعی: در هر ماتریس مربعی، درایه هایی که شماره سطر و ستون آن ها برابر باشند، قطر اصلی را تشکیل می دهند؛ به بیان دیگر در یک ماتریس مربعی، تمام درایه هایی که به صورت a_{ii} هستند روی قطر اصلی قرار دارند.

- نکته: در یک ماتریس مربعی، درایه هایی که روی قطر عمود بر قطر اصلی قرار دارند، قطر فرعی ماتریس را تشکیل می دهند.

- نکته: اگر a_{ij}روی قطر فرعی یک ماتریس $n \times n$ باشد،آن گاه $i + j = n + 1$.

مثال: در یک ماتریس از مرتبهٔ $n \times n$،درایه a_{ij} هم روی قطر اصلی و هم روی قطر فرعی است. مرتبهٔ ماتریس را بر حسب i پیدا کنید.

جواب: چون a_{ij} روی قطر اصلی است، پس $i = j$ و چون a_{ij} روی قطر فرعی هم قرار دارد، بنا بر نکته بالا باید داشته باشیم:$i + j = n + 1$ که در آن n مرتبه ماتریس است. از این دو رابطه داریم:

$$i + j = n + 1 \rightarrow i + i = n + 1 \rightarrow n = 2i - 1$$

- ب) تعریف ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد ماتریس سطری گویند.

$$A_{1\times n}= [\, a_{11} \;\; a_{12} \; a_{13} \ldots a_{1n} \,]$$

- پ) تعریف ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی نامند.

$$A_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

- ج) تعریف ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری می نامند.(توجه داشته باشیم که درایه های روی قطر اصلی می توانند صفر باشند و می توانند مخالف صفر باشند)در زیر چند ماتریس قطری نشان داده شده است.

$$A=[5] \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- د) تعریف ماتریس اسکالر: اگر در یک ماتریس قطری تمام درایه های روی قطر اصلی برابر باشند، آن ماتریس را اسکالر گویند. ماتریس های مقابل اسکالر هستند.

$$A=[4] \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad , \; C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

- تمرین: در عبارت زیر، جاهای خالی را با واژه های مناسب پر کنید تا گزاره ای درست حاصل شود.
- هر ماتریس قطری یک ماتریس......ولی هر ماتریس........یک ماتریس.........است.

جواب: اسکالر نیست ، اسکالر ،قطری

ه) تعریف ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه های آن صفر باشند، ماتریس صفر می نامند.
معمولاً ماتریس صفر از مرتبه $n \times p$ را با نماد $\bar{o}$ نشان میدهیم.

مثال: $\bar{o}_{1\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\bar{o}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- تساوی دو ماتریس:

دو ماتریس زمانی مساوی هستند که هر دو شرایط زیر را داشته باشند:

- ۱) دو ماتریس هم مرتبه باشند.
- ۲) تمام درایه های نظیردر دو ماتریس برابر باشند.

با توجه به تعریف فوق می توان گفت اگر $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{k\times t}$، آن گاه زمانی این دو ماتریس برابرند که:

$$\begin{cases} k = n \\ t = p \\ \forall i\,, j\colon\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

- مثال: مقادیر z, y, xرا طوری به دست آورید که دو ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 5 & x+2 \\ 2 & z+1 \end{bmatrix} \quad ,B = \begin{bmatrix} x+2y & 1 \\ 2 & x^2+1 \end{bmatrix}$$

حل: هر دو ماتریس از مرتبۀ۲×۲ هستند،پس شرط اول تساوی دو ماتریس بر قرار است. اکنون باید شرط دوم برقرار باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+2 = 1 \rightarrow x = -1 \\ x+2y = 5 \rightarrow -1+2y = 5 \rightarrow y = 3 \\ z+1 = x^2+1 \rightarrow z = 1 \end{cases}$$

- جمع ماتریس ها: دو ماتریس وقتی قابل جمع هستند،که هم مرتبه باشند و مجموع دو ماتریس هم مرتبه، ماتریسی از همان مرتبه است و هر درایهٔ آن، حاصل جمع دو درایهٔ نظیر از آن دو ماتریس می باشد.

پس اگر $A = [a_{ij}]_{n\times p}$ و $B = [b_{ij}]_{k\times t}$ و $C = A + B$، آن گاه $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ طوری که:
$$\forall i, j:\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$، آن گاه حاصل $A + B$ را پیدا کنید.

جواب: چون هر دو ماتریس هم مرتبه هستند (2×2) پس جمع پذیرند؛ بنا بر تعریف جمع دو ماتریس داریم:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -\frac{9}{4} \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

- ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس:
- اگر r یک عدد حقیقی و A ماتریسی از مرتبهٔ $n \times p$ باشد حاصل $r.A$ یک ماتریس از مرتبه $n \times p$ است که هر درایهٔ آن r برابر درایهٔ نظیر از ماتریس A می باشد؛ به بیان دیگر برای ضرب کردن یک عدد حقیقی در یک ماتریس کافی است، آن عدد را در تک تک درایه های ماتریس ضرب کنیم.

- به زبان ریاضی می توانیم به صورت زیر ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس نشان دهیم
- $\forall r \in R, A = [a_{ij}]_{n\times p}$ داریم: $r.A = [r.a_{ij}]_{n\times p}$

- مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}$، حاصل $3A + 5B$ را به دست آورید.

- $3A + 5B = 3\times\begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 5 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 15 & -25 \\ 35 & 10 & 50 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 12+5 & 24+15 & 3+(-25) \\ 0+35 & 9+10 & 6+50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 39 & -22 \\ 35 & 19 & 56 \end{bmatrix}$$

- قرینۀ یک ماتریس:

- اگر تمام درایه های یک ماتریس را قرینه کنیم، ماتریس حاصل، قرینۀ ماتریس اولیه نامیده می شود. در واقع قرینۀ ماتریس A همان ماتریس $A \times (-1)$ است که با نماد $-A$ نمایش داده می شود.

- نکته: حاصل جمع هر ماتریس با قرینۀ همان ماتریس، برابر ماتریس صفر از همان مرتبه است.

تمرین: دو ماتریس ۲×۳ مثال بزنید که مجموع آن ها ماتریس صفر باشد.

- ویژگی های جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس:
- اگر $A,B\ ,C$ سه ماتریس از مرتبهٔ $n \times p$ و $r\ ,s$دو عدد حقیقی باشند، آن گاه ویژگی های زیر بر قرار هستند:
- $A + B = B + A$ (1 (جابه جایی جمع دو ماتریس)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (۲ (شرکت پذیری عمل جمع در ماتریس)
- $A + \overline{O} = \overline{O} + A = A$ (۳ (وجود عضو بی اثر یا عضو خنثی در عمل جمع ماتریس)
- $A + (-A) = (-A) + A = \overline{O}$ (۴ (وجود عضو قرینه در عمل جمع ماتریس)
- $r.(A + B) = r.A + r.B$ (۵ (توزیع پذیری ضرب عدد در جمع ماتریس)
- $(r + s).A = r.A + s.A$ (۶ (توزیع پذیری ضرب عدد در جمع ماتریس)
- ۷) اگر $r \neq 0$ باشد،آن گاه $r.A = r.B \ \leftrightarrow\ A = B$ (حذف ضرب عدد در ماتریس)

تمرین:

ثابت کنید اگر B و A دو ماتریس هم مرتبه باشند، آن گاه داریم؛ $A + B = B + A$

اثبات:

فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n\times p}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ ، بنا به تعریف جمع دو ماتریس هم مرتبه داریم:

$$A + B = [a_{ij}]_{n\times p} + [b_{ij}]_{n\times p} = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times p} = [b_{ij} + a_{ij}]_{n\times p} = [b_{ij}]_{n\times p} + [a_{ij}]_{n\times p} = B + A$$

- ضرب دو ماتریس
- الف) اگر A ماتریس سطری از مرتبهٔ $1 \times n$ و B ماتریس ستونی از مرتبهٔ $n \times 1$ باشد، آن گاه ضرب $A \times B$ تعریف پذیر است و حاصل آن ماتریسی از مرتبهٔ 1×1 می باشد که معادل با یک عدد حقیقی است. برای پیدا کردن حاصل ضرب $A \times B$ هر درایه از ماتریس A مانند a_{1i} را در درایهٔ b_{1i} از ماتریس B ضرب می کنیم و مجموع این حاصل ضرب ها را به دست می آوریم.

- مثال: اگر $A = [-3 \quad 5 \quad -2]$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $A \times B$ را حساب کنید.

$$A \times B = [-3 \quad 5 \quad -2] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} = [-3 \times 1 + 5 \times (-2) + (-2) \times 8]_{1\times1} = [-29]_{1\times1} = -29$$

- ب)ضرب ماتریس در ماتریس:
- اگر B و Aدو ماتریس باشند، آن گاه به شرطی ماتریس $A \times B$ تعریف پذیر (وجود دارد) که تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند؛ یعنی اگر A از مرتبۀ $n \times p$ باشد، باید B از مرتبۀ $p \times m$ باشد و حاصل ضرب آن ها ماتریسی از مرتبۀ $n \times m$ خواهد بود. پس اگر:
- $A = [a_{ij}]_{n \times p}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times m}$ و $C = A \times B$، آن گاه $C=[c_{ij}]_{n \times m}$.
- مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آیا ماتریس $A \times B$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، ماتریس حاصل ضرب را پیدا کنید.
- حل: بله، چون تعداد ستون های ماتریس اول برابر تعداد سطر های ماتریس دوم است.
- $$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 5 & 4 \times 4 + 1 \times 9 + 5 \times 3 \\ 3 \times 1 + 2 \times 2 + 0 \times 5 & 3 \times 4 + 2 \times 9 + 0 \times 3 \\ 7 \times 1 + 1 \times 2 + 8 \times 5 & 7 \times 4 + 1 \times 9 + 8 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 40 \\ 7 & 30 \\ 49 & 61 \end{bmatrix}$$

- دو ماتریس تعویض پذیر:
- اگر B و A دو ماتریس دلخواه باشند به طوری که $A \times B = B \times A$، آن گاه این دو ماتریس را تعویض پذیر نامند.(هر دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند)
- مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ آن گاه ماتریسی مانند B چنان پیدا کنید که $A \times B = B \times A$ باشد.
- حل: ماتریس B باید هم مرتبه با A باشد. پس فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باید مقادیر a, b, c, dرا حساب کنیم. برای این منظور $A \times B = B \times A$ قرار می دهیم.

$$A \times B = B \times A \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11a+3c & 11b+3d \\ 4a+c & 4b+d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11a+4b & 3a+b \\ 11c+4d & 3c+d \end{bmatrix}$$

- بنا بر تساوی دو ماتریس داریم:

$$\begin{cases} 11a+3c = 11a+4b \rightarrow c = \frac{4}{3}b \\ 11b+3d = 3a+b \rightarrow 10b = 3(a-d) \\ 4a+c = 11c+4d \rightarrow 10c = 4(a-d) \\ 4b+d = 3c+d \rightarrow c = \frac{4}{3}b \end{cases}$$

- پس کافی است $a-b=\frac{10}{3}b$, $c=\frac{4}{3}b$ باشد در نتیجه به عنوان مثال $b=6$ آن گاه $c=8$ و $a-d=20$. در نتیجه اگر $a=5$ انتخاب کنیم $d=-15$بنابراین یکی از ماتریس ها

$$B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 8 & -15\end{bmatrix}$$

- توجه داشته باشید، که به ازای هر b و a یک مقدار برای c ,d به دست می آید. و در نتیجه بی شمار ماتریس مانند B می توان یافت.
- نکته: اگر حاصل ضرب دو ماتریس صفر شود، لزومی ندارد که یکی از آن دو ماتریس، صفر باشد

تعریف ماتریس واحد(ماتریس همانی):

یک ماتریس اسکالر را که تمام درایه های واقع بر قطر اصلی آن ۱ باشند، ماتریس واحد

می نامند، و با I نشان می دهند. مانند: $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

- ویژگی های عمل ضرب ماتریس ها:
- ۱) در حالت کلی ضرب ماتریس ها دارای خاصیت جا به جایی نیست.

- ۲) اگر A ماتریس $n \times n$ و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشد، آن گاه داریم:

$$A \times I = I \times A = A$$

- ۳) ضرب ماتریس ها در حاصل جمع دو ماتریس، خاصیت توزیع پذیری دارد، یعنی اگر A ماتریسی از مرتبه $n \times p$ و C و B ماتریس های از مرتبۀ $p \times k$ باشند، آن گاه رابطۀ زیر برقرار است.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (توزیع پذیری از چپ)
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$

- ۴)عمل ضرب ماتریس ها دارای خاصیت شرکت پذیری است، یعنی اگر A ماتریسی از مرتبه $n \times p$ و B از مرتبۀ $p \times k$ و C از مرتبۀ $k \times m$ باشد، آن گاه رابطۀ مقابل برقرار است:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

- توان های طبیعی یک ماتریس مربعی:
- اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن گاه $A^2 = A \times A$ و $A^3 = A^2 \times A = A \times A^2$ و ... در حالت کلی اگر n، عددی طبیعی باشد، آن گاه $A^n = A^{n-1} \times A = A \times A^{n-1}$.

- مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، آن گاه حاصل ماتریس A^{100} را محاسبه کنید.

- حل: $A^2 = \mathrm{A} \times \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & -2 \\ 2 & -2+1 \end{bmatrix}$
- $A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & -3 \\ 3 & -3+1 \end{bmatrix}$
- $A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & -4 \\ 4 & -4+1 \end{bmatrix}$

- با توجه به حاصل ضرب سه ماتریس بالا می توان با استدلال استقرایی حدس زد، که $A^{100} = \begin{bmatrix} 100+1 & -100 \\ 100 & -100+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 & -100 \\ 100 & -99 \end{bmatrix}$

(پایان درس اول از هندسه دوازدهم تا صفحهٔ ۲۲)

درس دوم

وارون ماتریس های مربعی

درس نامه

- تعریف وارون یک ماتریس مربعی: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، چنان چه ماتریسی مانند B وجود داشته باشد طوری که $A \times B = B \times A = I$، آن گاه B را وارون A می نامند و آن با نماد A^{-1} نشان می دهند.

- مثال: نشان دهید وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ به صورت $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ است.

- پاسخ :
- ماتریس های $B.A$ و $A.B$ را حساب می کنیم.
- $$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 1 \times (-3) & 2 \times (-1) + 1 \times 2 \\ 3 \times 2 + 2 \times (-3) & 3 \times (-1) + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$
$$B.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + (-1) \times 3 & 2 \times 1 + (-1) \times 2 \\ (-3) \times 2 + 2 \times 3 & (-3) \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$
- چون $A.B = B.A = I$، پس بنا به تعریف، دو ماتریس B و A وارون یکدیگر هستند.

تمرین: ثابت کنید اگر $AB = I$، آن گاه $BA = I$

حل: چون بنا به گفته مسئله $AB = I$ طرفین رابطه را از سمت چپ در B ضرب می کنیم، پس بنابراین داریم:

$AB = I \rightarrow B(AB) = BI \rightarrow (BA)B = B$ چون حاصل ضرب ماتریس BA در ماتریس B، برابر با B شده است، پس BA عضو بی اثر عمل ضرب است؛ یعنی $BA = I$.

- نکته: برای پیدا کردن وارون یک ماتریس 2×2 مانند A در صورت وجود باید ماتریسی مانند $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ چنان پیدا کنیم، که $AB = I$ ، در این صورت B وارون A خواهد بود.

- مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ آن گاه ماتریس وارون آن را پیدا کنید.

- حل: اگر $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $AB = I$، آن گاه B وارون ماتریس A است، پس داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I \to \begin{bmatrix} 3a + 5c & 3b + 5d \\ a + 2c & b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به تساوی دو ماتریس، نتیجه می شود: از حل دستگاه $\begin{cases} 3a + 5c = 1 \\ a + 2c = 0 \end{cases}$

دو معادله ی دو مجهولی $a = 2$ و $c = -1$ به دست می آید.

همچین $b = -5$ و $d = 3$ $\leftarrow \begin{cases} 3b + 5d = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases}$ پس بنابراین $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

و در نتیجه $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

تمرین

ثابت کنید اگر ماتریسی وارون پذیر باشد وارون آن منحصر به فرد است.

اثبات: (به کمک برهان خلف) فرض کنیم ماتریس A وارون پذیر باشد ولی دو ماتریس متمایز B و C وارون های آن باشند (فرض خلف)

(۱) چون B وارون A است پس در نتیجه $AB = BA = I$

(۲) چون C وارون A است پس در نتیجه $AC = CA = I$

$$C = CI\,(\text{عضو بی اثر عمل ضرب}) = C(AB)$$

$$\text{بنابر}(1) = (CA)B\,(\text{شرکت پذیری ضرب ماتریس ها}) = IB\,(2)\text{بنابر} = B\ \text{عضو بی اثر عمل ضرب}$$

واین تناقض است؛ زیرا فرض کرده بودیم B و C متمایز باشند، پس فرض خلف، باطل است؛ یعنی وارون یک ماتریس ، در صورت وجود منحصر به فرد است

- نکته: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، عبارت $ad - bc$ را دترمینان ماتریس می نامند و آن را با نماد $|A|$ نمایش می دهند.
- نتیجه مهم: اگر دترمینان ماتریس 2×2 مخالف صفر باشد، آن گاه ماتریس ، وارون پذیر است. برای پیدا کردن وارون آن، جای درایه های قطر اصلی را عوض می کنیم و درایه های قطر فرعی را بدون تغییر جا، قرینه می کنیم و حاصل را در $\frac{1}{|A|}$ ضرب می کنیم؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- تذکر: اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر صفر باشد، آن گاه این ماتریس وارون پذیر نیست.

مثال: آیا ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر است؟ چرا؟ اگر جواب مثبت است، وارون آن را پیدا کنید.

چون $|A| = 3 \times (-2) - (-1) \times 4 = -6 + 4 = -2 \neq 0$

پس وارون پذیر است. پس بر طبق نتیجه بالا داریم: $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$

- حل دستگاه معادلات (دو معادله دو مجهولی)

یکی از کاربردهای مهم ماتریس و ماتریس های وارون حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی است.

دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را در نظر می گیریم و ماتریس های زیر را از روی دستگاه تعریف می کنیم:

$B=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ **ماتریس مقادیر معلوم** $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب

اکنون نشان می دهیم $AX=B$ همان دستگاه است، زیرا:

$$AX=B \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ax+by \\ a'x+b'y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

بنا به تساوی دو ماتریس هم مرتبه، نتیجه می شود: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ که همان دستگاه مورد نظر است. عبارت $AX=B$ را نمایش ماتریسی دستگاه معادلات می نامند.

- روش حل دستگاه دو معادله ی دو مجهولی به کمک ماتریس:

ابتدا نمایش ماتریسی دستگاه را به صورت $AX = B$ می نویسیم. اگر دترمینان ماتریس A صفر نباشد، ماتریس A وارون پذیر است. وارون آن را حساب کرده و از طرف چپ به هر دو طرف نمایش ماتریسی ضرب می کنیم، خواهیم داشت:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \to (A^{-1}A)X = A^{-1}B \to IX = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$$

یعنی برای پیدا کردن ماتریس مجهولات، کافی است وارون ماتریس ضرایب را در ماتریس مقادیر معلوم ضرب کنیم

مثال: دستگاه $\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$ با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

ماتریس ضرایب این دستگاه به صورت $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ ، ماتریس مجهولات آن $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و ماتریس مقادیر معلوم آن $B = \begin{bmatrix} 19 \\ 1 \end{bmatrix}$ پس نمایش ماتریسی دستگاه را به صورت $AX = B$ می باشد.برای حل این دستگاه باید طرفین آن را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم، در نتیجه $X = A^{-1}B$.

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-26}\begin{bmatrix} -76-2 \\ -57+5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-26}\begin{bmatrix} -78 \\ -52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-78}{-26} \\ \frac{-52}{-26} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

تحلیل هندسی دستگاه معادلات

توجه داشته باشیم که در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی، هر یک از معادلات آن نشانگر یک خط در صفحه است. می دانیم دو خط در یک صفحه نسبت به هم سه حالت دارند.

۱-اگر دو خط با یکدیگر متقاطع باشند، آن گاه فقط یک نقطهٔ مشترک روی دو خط وجود دارد و می دانیم دراین حالت دستگاه یک جواب منحصربفرد دارد.(دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد)

۲-اگر دو خط با یکدیگر موازی و متمایز باشند،آن گاه دو خط دارای نقطه ای مشترک نیستند و در این حالت دستگاه جواب ندارد.

۳-اگر دو خط بر یکدیگر منطبق باشند، آن گاه بی شمار نقطه مشترک دارند و در این حالت دستگاه بی شمار جواب دارد.

- نکته: دستگاه : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$را در نظر بگیرید.

- ۱-اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ ، آن گاه دستگاه دارای جواب منحصر بفرداست.
- (در واقع شیب های دو خط نابرابر هستند، در نتیجه دو خط در یک نقطه متقاطع اند.)

- ۲-اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$،آن گاه دو خط بر هم منطبق هستند و دستگاه بی شمار جواب دارد.

- ۳-اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ ، آن گاه دو خط باهم موازی و متمایزند و دستگاه جواب ندارد

- مثال: اگر دستگاه $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 2x + my = 7 \end{cases}$ فقط یک جواب داشته باشد، آن گاه m چه مقادیری می تواند داشته باشد؟

- پاسخ: یک دستگاه دومعادله ی دو مجهولی، زمانی یک جواب منحصر به فرد دارد که دوخط تشکیل دهنده ی آن، متقاطع باشند و این زمانی است که دترمینان ماتریس ضرایب، مخالف صفر باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow 3m + 10 \neq 0 \rightarrow m \neq -\frac{10}{3}$$

پس اگر m هر عدد حقیقی به جزء $-\frac{10}{3}$ باشد دستگاه داری جواب منحصر بفرد است.

دترمینان و کار بردهای آن

تعریف دترمینان: به هر ماتریس مربعی می توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می شود.

دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه: وارون پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می شود. همان طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می شود. دترمینان در هندسه برای محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به کار می رود. به کمک دترمینان ماتریس ۳×۳ می توان حجم متوازی السطوع حاصل از سه بردار را به دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به تعدادی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

- تعریف دترمینان ماتریس ۱×۱: اگر $A = [m]_{1\times1}$ ، آن گاه می گوییم دترمینان آن برابر m است و آن را با نماد $|A|$ نشان می دهیم، پس $|A| = m$

- تعریف دترمینان ماتریس ۲×۲: ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید؛ دترمینان این ماتریس که با نماد $|A|$ یا $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ و یا $\det(A)$ نشان می دهیم و به صورت مقابل تعریف می کنیم: $|A| = ad - bc$

- یعنی به هر ماتریس ۲×۲ یک عدد حقیقی نسبت می دهیم که آن عدد برابر است با حاصل ضرب درایه های قطر اصلی، منهای حاصل ضرب درایه های قطر فرعی

- مثال: دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.
- پاسخ: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) - 4 \times 5 = -23$

- تعریف دترمینان ماتریس ۳×۳: ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ را در نظر می گیریم.

دترمینان این ماتریس بر اساس سطر اول به صورت زیر تعریف می شود:

$$|A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

یعنی هر درایه از سطر اول مانند a_{1j} را در $(-1)^{1+j}$ ضرب کرده و سپس آن را در دترمینان ماتریس ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستونی که درایه روی آن قرار دارد، ضرب می کنیم.

حال اگر بخواهیم دترمینان را بر اساس ستون دوم پیدا کنیم، داریم:

$$|A| = a_{12} \times (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22} \times (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{32} \times (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشیم که اگر دترمینان یک ماتریس ۳×۳ را براساس هر سطر یا هر ستون پیدا کنیم باید جواب یکسان باشد.

نکته: هر چند محاسبهٔ یک ماتریس ۳×۳ را براساس هر سطر یا هر ستون به نتیجه ای یکسان خواهد رسید، ولی اگر سطر یا ستونی تعداد درایه های صفر آن بیشتر باشد، محاسبه دترمینان بر اساس آن سطر یا ستون آسان تر می باشد.

مثال ۱: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

حل: چون ستون دوم دارای دو درایهٔ صفر است، راحت تر آن است که دترمینان را بر حسب ستون دوم محاسبه کنیم.

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -2 \times (28 - 30) = 4$$

مثال ۲ : اگر بدانیم $\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ آن گاه مقدار a را پیداکنید.

حل: $\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5a + 1$، حال دترمینان ماتریس ۳×۳ بر اساس یکی از سطرها یا ستون ها پیدا می کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (6-4) - 3 \times (3-12) + a \times (1-6) = -5a + 31$$

چون این دو دترمینان باید برابر باشند، پس داریم: $-5a + 31 = 5a + 1$

$$-10a = -30 \rightarrow a = 3$$

روش ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس ۳×۳

این روش که فقط برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳ است به ترتیب زیر می باشد:

الف: دو ستون اول و دوم را به همین ترتیب بعد از ستون سوم کنار آن می نویسیم:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

ب: درایه هایی که روی قطر اصلی هستند در هم ضرب می کنیم و هم چنین هر سه درایه ای را که روی خطی موازی با قطر اصلی قرار دارند در یکدیگر ضرب و عددهای حاصل را با هم جمع جبری می کنیم:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \qquad M = aei + bfg + cdh$$

ج: درایه هایی که روی قطر فرعی هستند در هم ضرب می کنیم و هم چنین هر سه درایه ای را که روی خطی موازی با قطر فرعی قرار دارند در یکدیگر ضرب و عددهای حاصل را با هم جمع جبری می کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \qquad N = ceg + afh + bdi$$

د: حاصل قسمت (ج) را از قسمت (ب) کم می کنیم، عددی که به دست می آید دترمینان ماتریس است.

$$|A| = M - N$$

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ را با روش ساروس محاسبه کنید

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$|A| = (20 + 9 - 24) - (24 + 4 - 45) = 5 - (-17) = 22$$

نکته ۱ : دترمینان هر ماتریس قطری، برابر است با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است.

نکته۲: دترمینان ماتریسی که تمام درایه های زیر قطر اصلی آن (یا تمام درایه های بالای قطر اصلی آن) صفر باشند، برابر با حاصل ضرب درایه های واقع بر قطر اصلی آن است.

پایان درس دوم

تهیه وتنظیم: علی پدرام سر گروه ریاضی منطقه اهر