

حدی نجات: زمانی کہ عدد $x \rightarrow \infty$ حاصل ہو گا۔

$$\frac{\text{عدد نامتناہی}}{\text{صفر}} = \infty, \quad \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(2-x)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sqrt{x}}{-x^2} = \frac{-\sqrt{x}}{0^-} = +\infty$$

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{|x+2|} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+10}{-|x|} = \frac{+10}{0^-} = -\infty$$

نوٹ: ہموا، $1 \pm \sin \theta$ و $1 \pm \cos \theta$ نامفرات

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 - \sin x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - 2}{1 + \cos x} = \frac{0 - 2}{1 + (-1)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\text{جواب: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{1 - \cos x} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$J_{10}: \lim_{x \rightarrow d^+} \frac{r}{x-d} = \frac{r}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow d^-} \frac{r}{x-d} = \frac{r}{0^-} = -\infty$$

$$J_{10}: \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{1-x}{r-x} = \frac{-r}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow r^-} \frac{1-x}{r-x} = \frac{-r}{0^+} = -\infty$$

$$J_{10}: \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{rx}{r-x} = \frac{r}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow r^-} \frac{rx}{r-x} = \frac{r}{0^+} = +\infty$$

$$J_{10}: \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{r}} \frac{[x]}{|rx+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$J_{10}: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^r x} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$J_{10}: \lim_{x \rightarrow (-r)^-} \frac{-rx}{x^r - r} = \frac{+r}{0^+} = +\infty$$

	0	π/r	π	$r\pi/r$
sin	— 0 +	1 +	0 —	— 0 +
cos	+ 1 +	0 —	— 0 +	— 0 +
tan	— 0 +	∞ —	0 +	∞ —

بادترين

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-x}{\sin x} = \frac{-\pi}{0^+} = -\infty$$

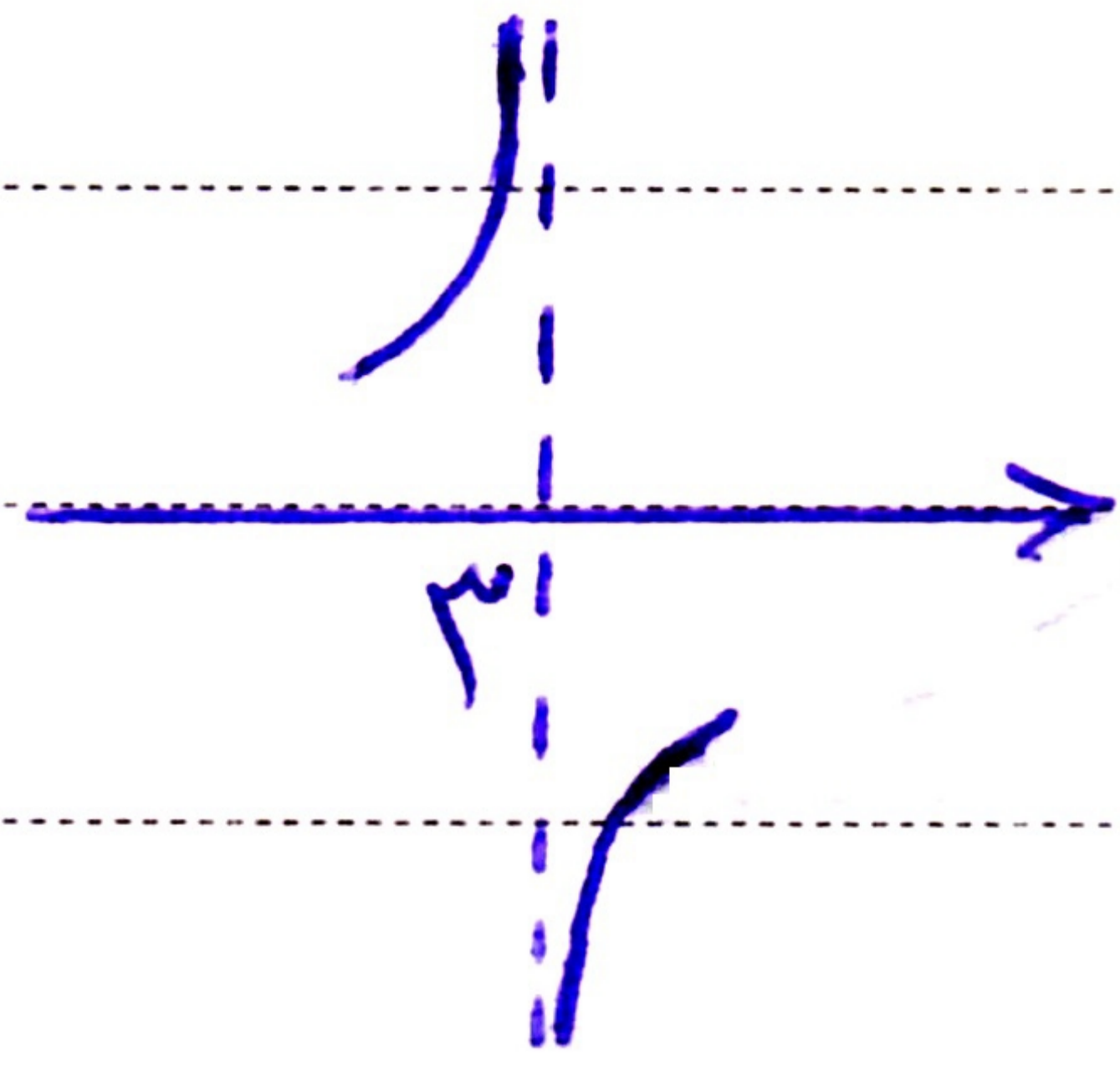
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{rx+r}{\sin x} = \frac{r}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{r\pi}{r}^+} \frac{d}{\cos x} = \frac{d}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^+} \tan x = -\infty$$

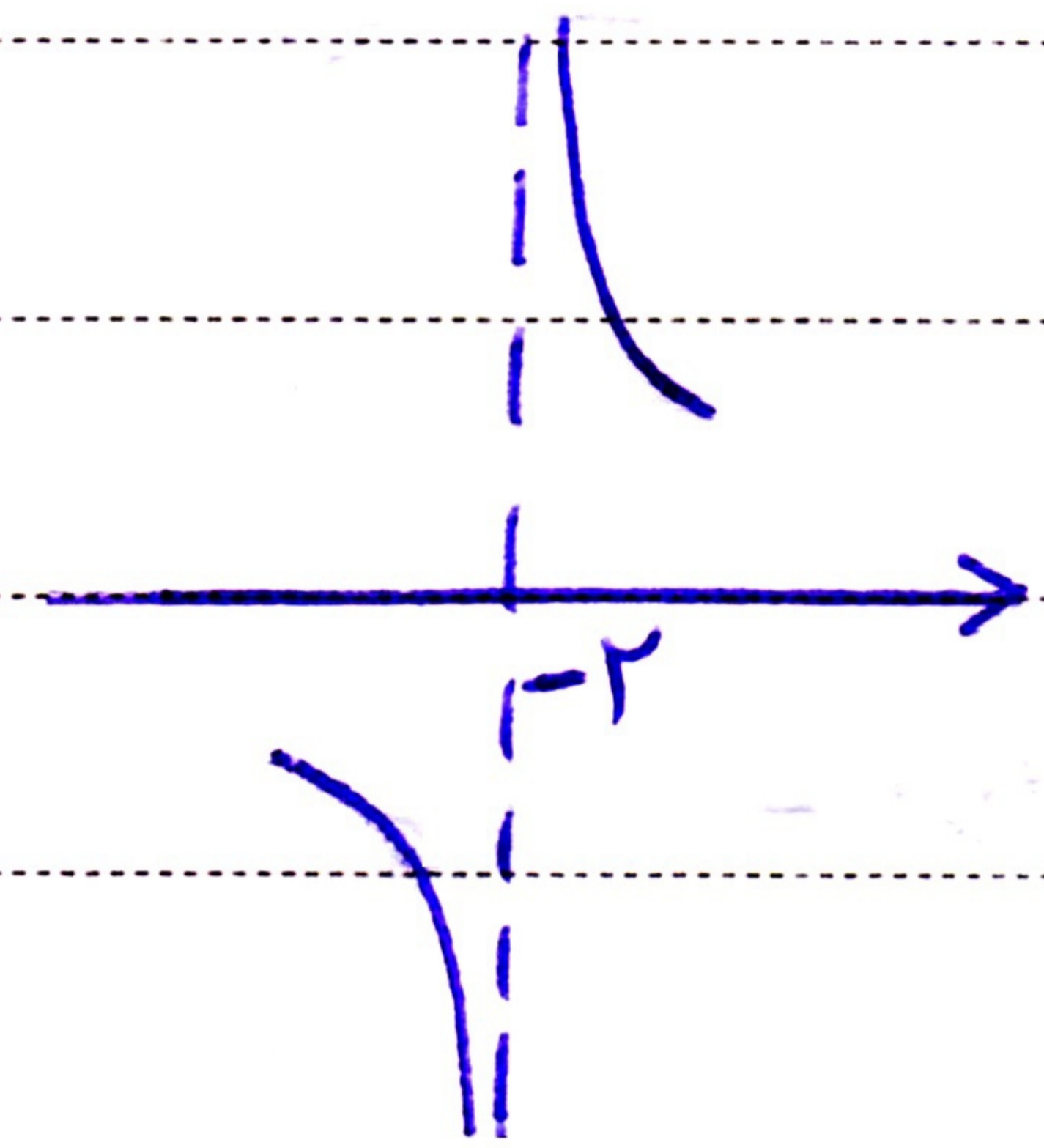
سؤال: نمودار تابعی مانند f رسم کنید در همسایگی محذوف $x=2$ تعریف شده و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = +\infty$



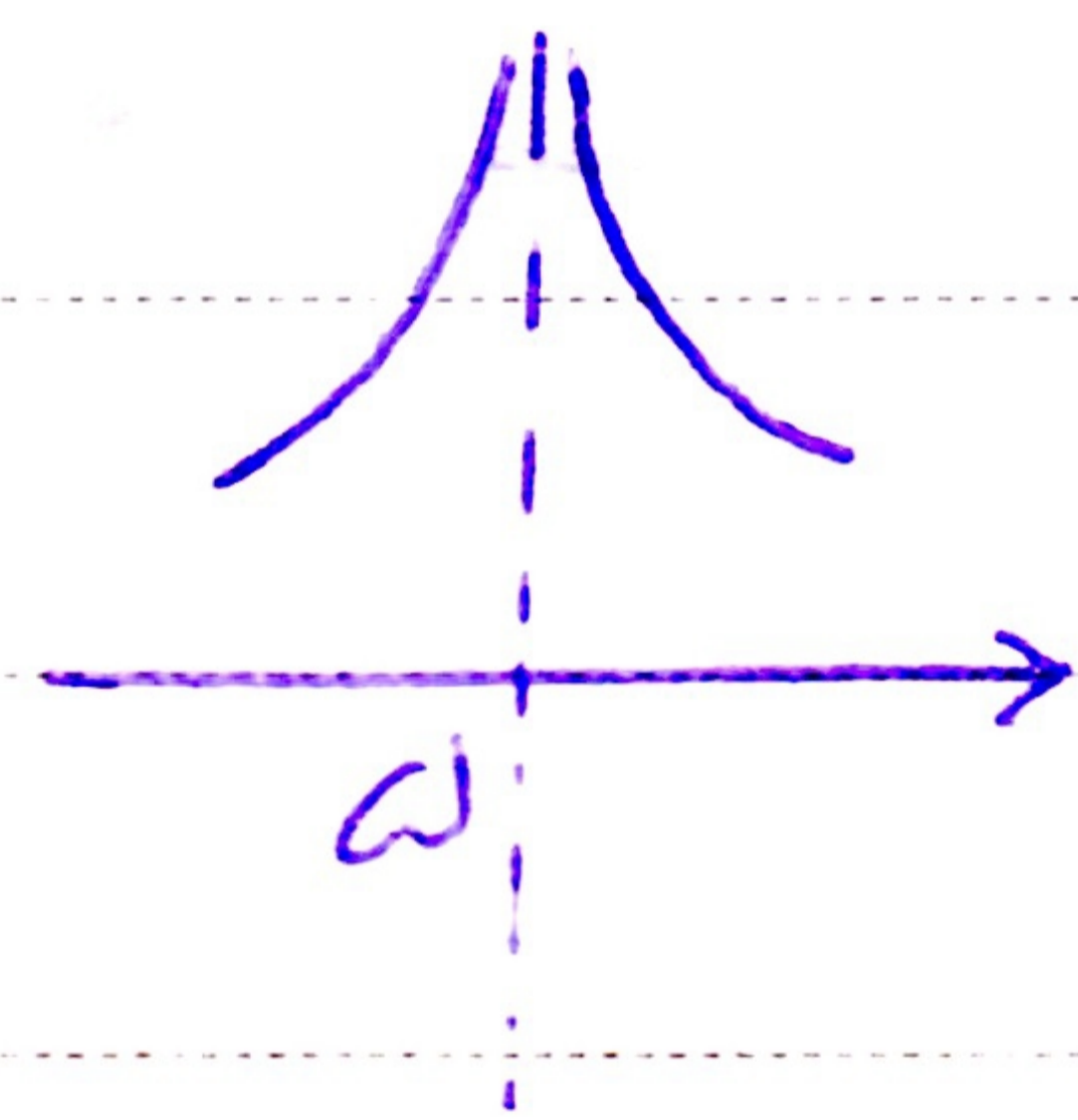
و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = -\infty$

سؤال: نمودار تابعی مانند f رسم کنید در همسایگی محذوف $x=2$ تعریف شده و

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f = +\infty$



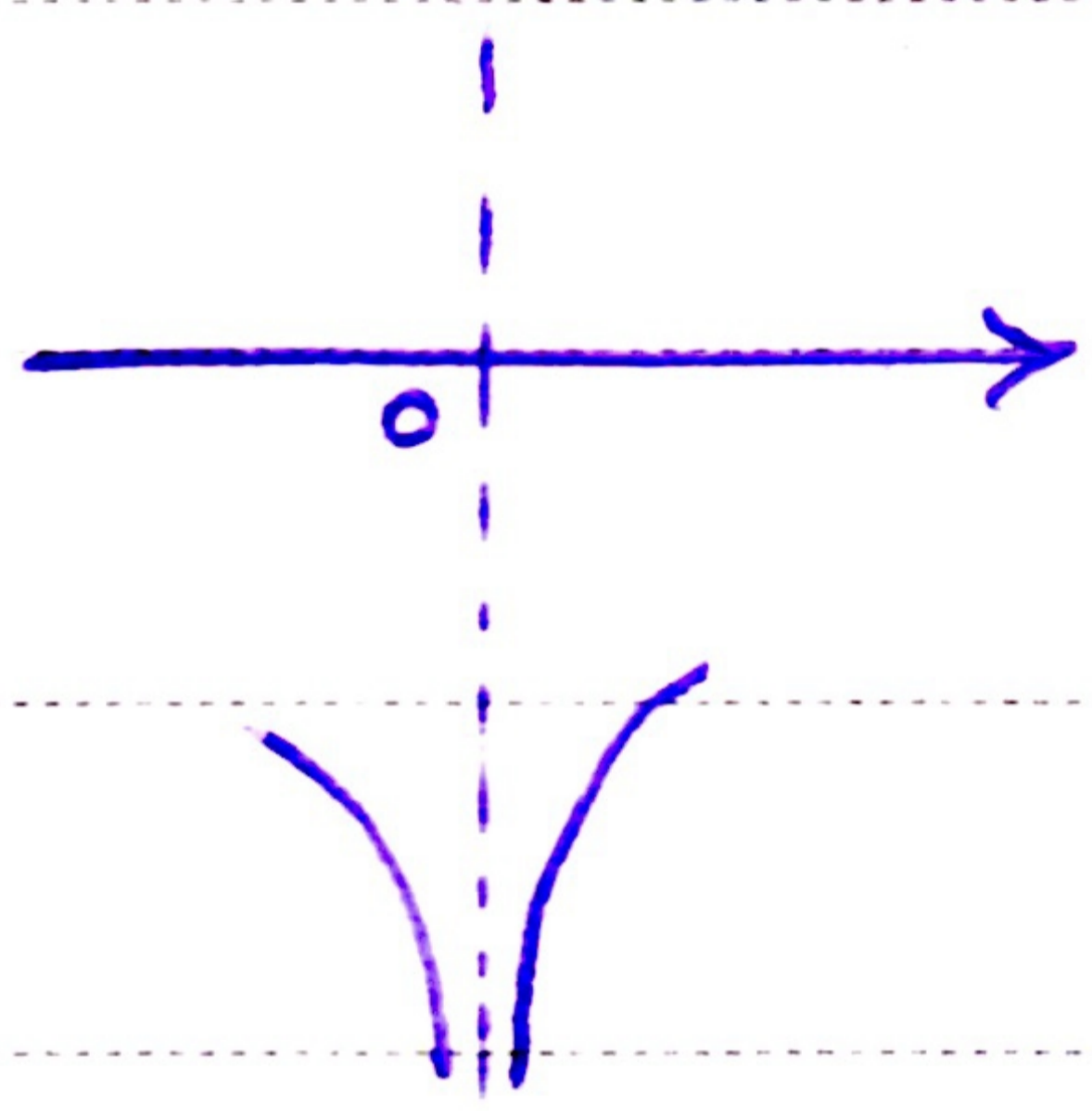
سؤال: تابع f در همسایگی محذوف $x=0$ تعریف شده و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ است



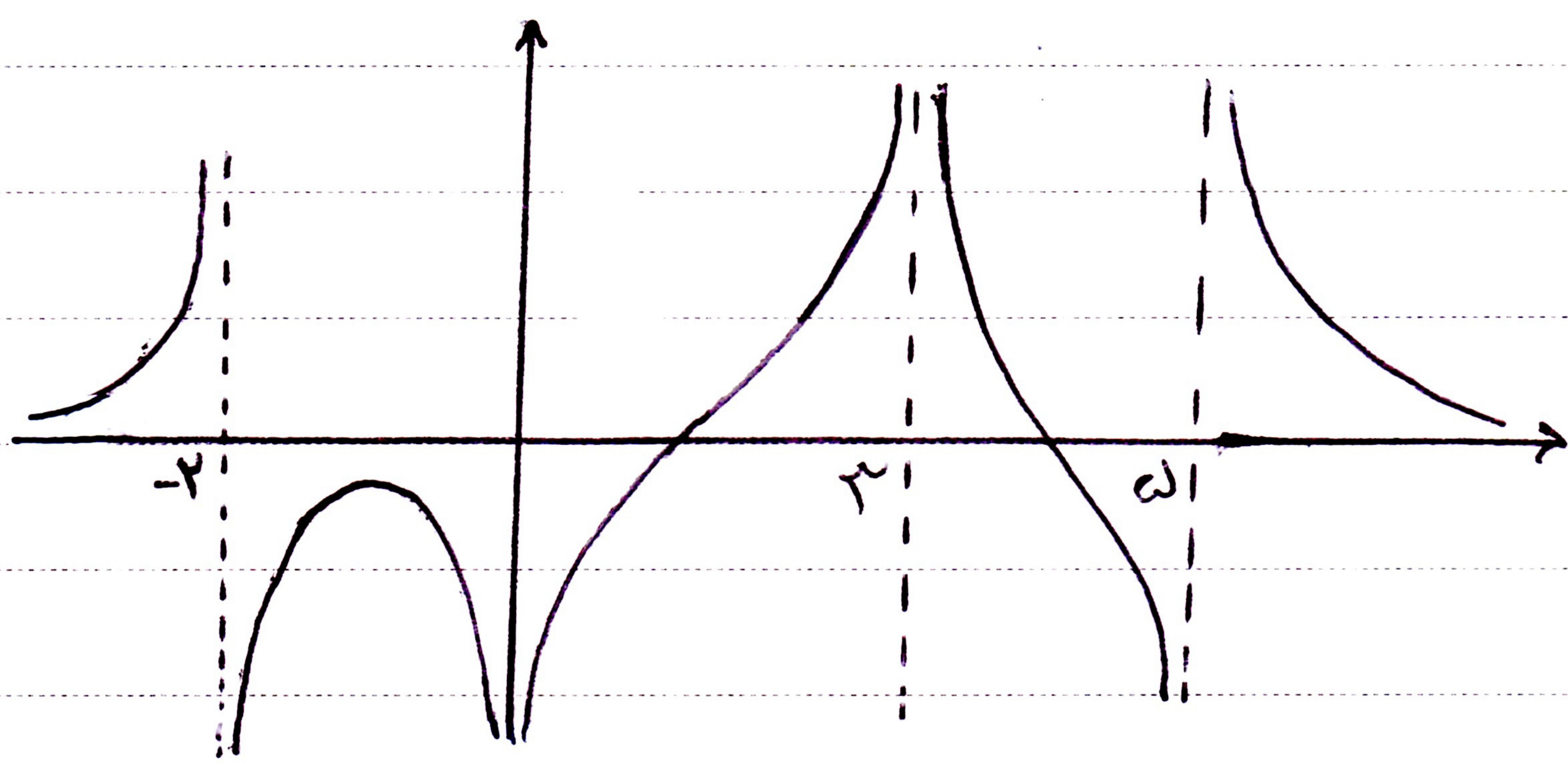
نمودار برابر آن رسم کنید.

سؤال: تابع f در همسایگی محذوف $x=0$ تعریف شده و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

است. نمودار متناسب با شرایط آن رسم کنید.



سؤال: با توجه به نمودار تابع f ، حد و خواص آن را محاسبه کنید.



$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$$

سؤال: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7}{x^2 + ax + b} = +\infty$ را با a, b محاسبه کنید.

$$\text{منخرج} = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow a = -4, b = 9$$

سؤال: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{0}{-2x^2 + ax + b} = -\infty$ را با a, b محاسبه کنید.

$$\text{منخرج} = -2(x+2)^2 = -2(x^2 + 4x + 4) = -2x^2 - 8x - 8 \Rightarrow a = -8, b = -8$$

سؤال: در صورتی که $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{ax^2 + bx - 9} = +\infty$ باشد، a و b را محاسبه کنید.

$$\text{منخرج} = -(x+2)^2 = -(x^2 + 4x + 4) = -x^2 - 4x - 4 \Rightarrow a = -1, b = -4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + a}{x^2 - dx + b} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - dx - 6} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-6)} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

حد در بی نهایت: متصور حرکت تابع f در زمان t که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ بوده که از قاعده بیست و نهم می توان گفت که همیشه

توجه: $\frac{\infty}{\infty} = 0$ با $\infty \times \infty = \infty$ عددانفر $! (\pm\infty) = \pm\infty$ زوج $(\pm\infty) = +\infty$

$$J_1: \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 4x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = 2(-\infty)^2 = +\infty$$

$$J_2: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 4 + \sqrt{x} - x^3 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^3 = -(\pm\infty)^3 = \mp\infty$$

$$J_3: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + x^2 - 2x^4 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2x^4 = -2(\pm\infty)^4 = -\infty$$

$$J_4: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{-5x^2 + 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-5x^2} = -\frac{2}{5}$$

$$J_5: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 4x}{3 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x}{-\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$J_6: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2} - 8x + 1}{9 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-2x} = \frac{\sqrt{(\pm\infty)^2}}{-2} = \mp\infty$$

$$J_7: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + x - 9}{2x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2} = \frac{(\pm\infty)^2}{2} = +\infty$$

$$J_8: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x^2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$J_9: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{-x} = \frac{4}{-(\pm\infty)} = 0$$

$$J_{10}: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\text{Jlo: } \lim_{x \rightarrow -\infty} 9 + \frac{v}{x^r} = 9 + \frac{v}{-\infty} = 9 + 0 = 9$$

$$\text{Jlo: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r + \frac{1}{x^r}}{\frac{e}{x} - d} = \frac{r + 0}{0 - d} = \frac{r}{-d}$$

$$\text{Jlo: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x+1}}{2x - \sqrt{x+v}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{r}{d}$$

$$\text{Jlo: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \sqrt{9x^2 + vx + 1}}{1 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3x}{-4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{-4x} = -\frac{v}{4}$$

$$\text{Jlo: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{9x^2 + vx + 1}}{1 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 3x}{-4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-4x} = -\frac{1}{4}$$

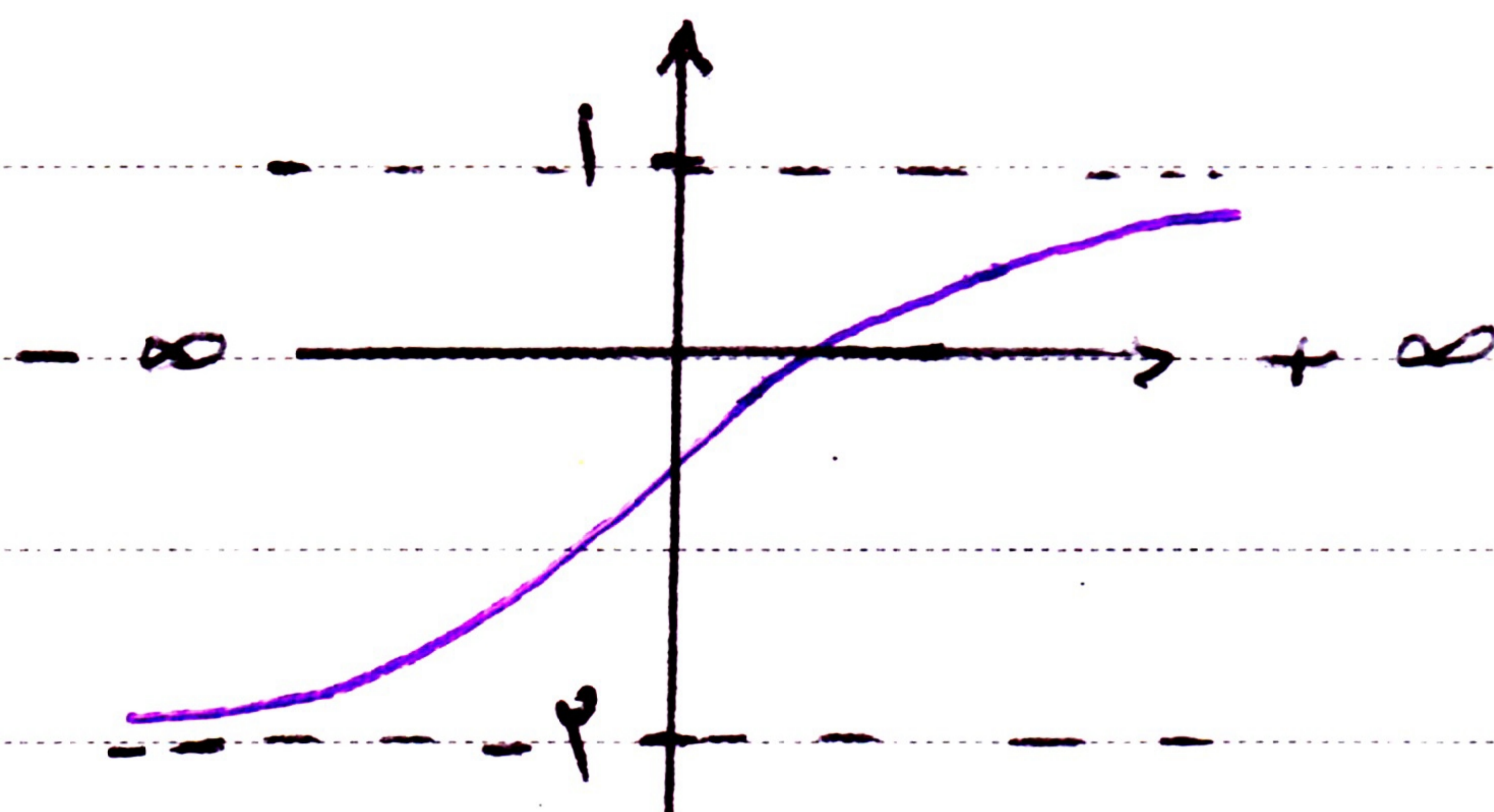
نوٲه: $\sqrt{9x^2}$ $\xrightarrow{+\infty} +3x$ $\xrightarrow{-\infty} -3x$

$$\text{Jlo: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + v} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

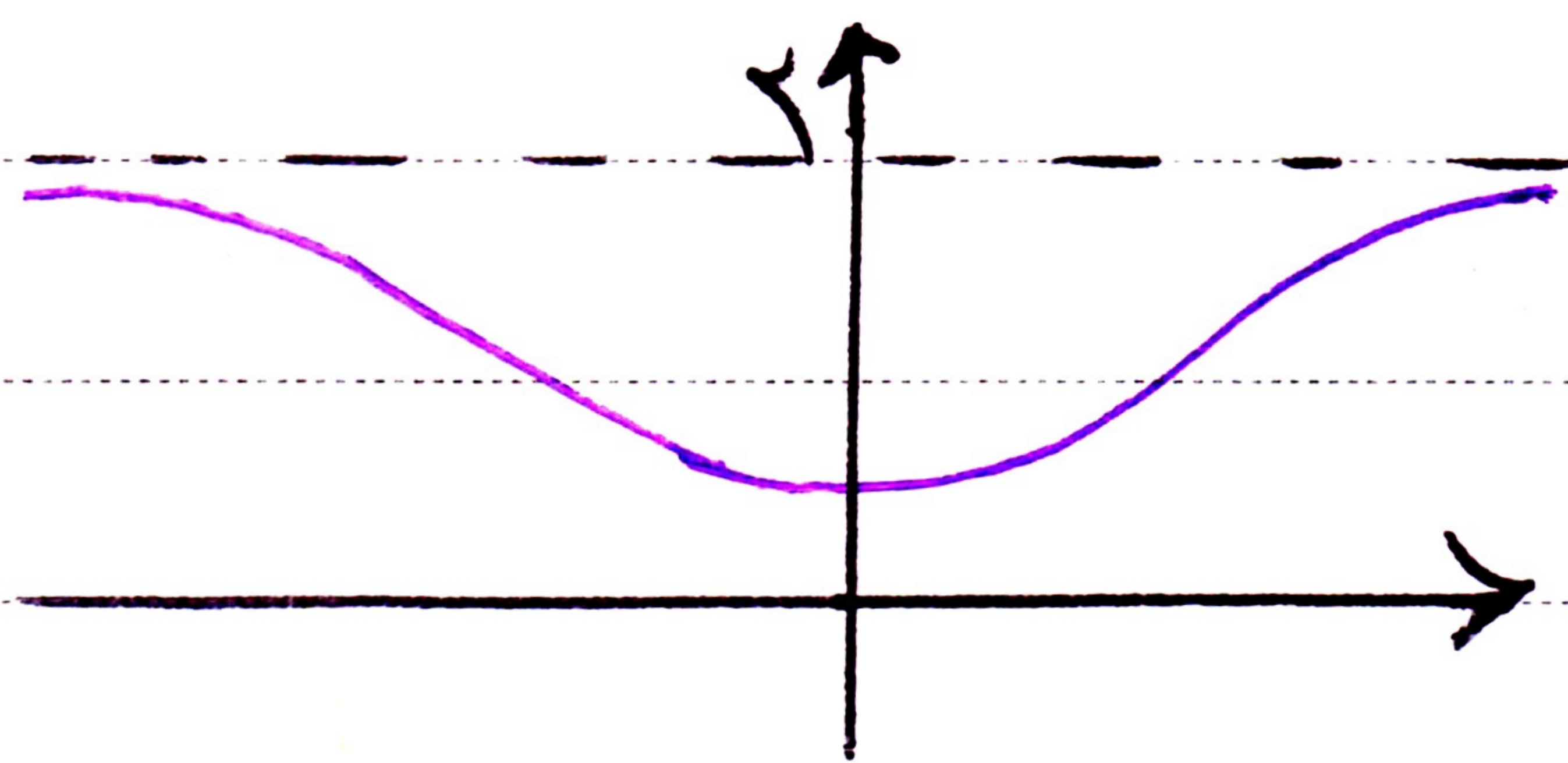
$$\text{Jlo: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + v} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{2x} = -\frac{3}{2}$$

مٲال: شوارر برابرتابع f تٲ شراٲ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

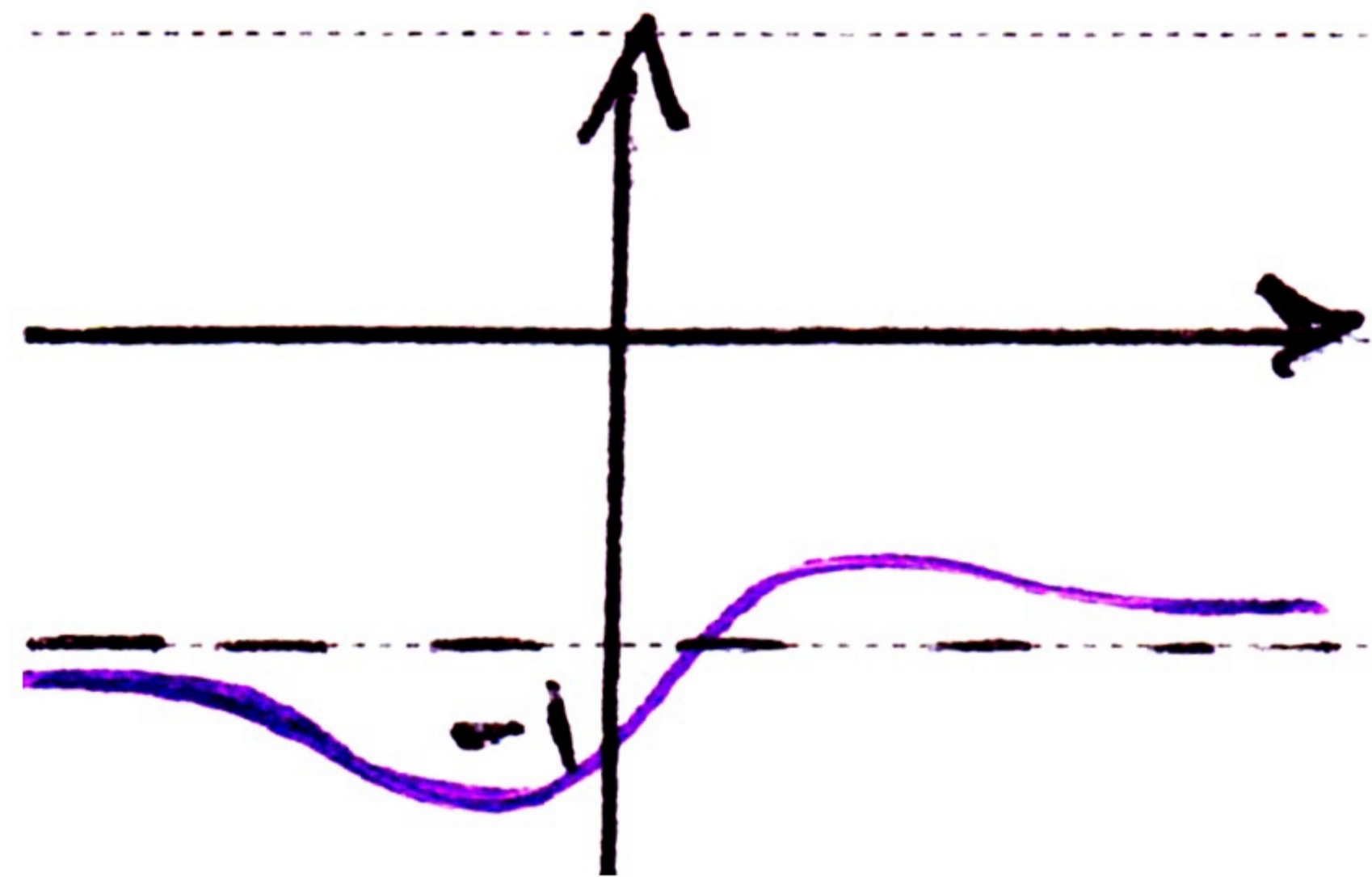
اسم كنه



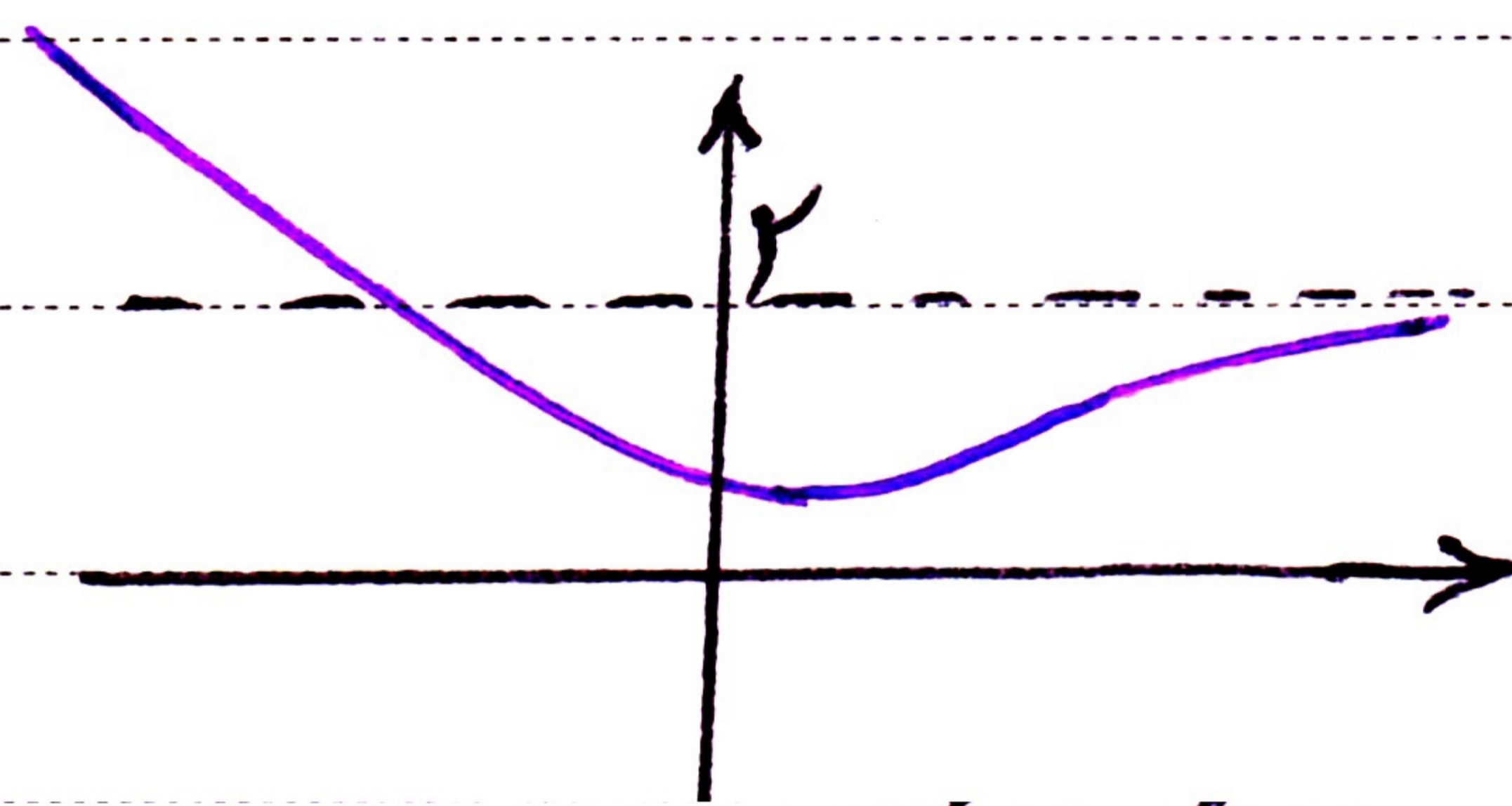
سؤال: نمودار برای تابع f رسم کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$



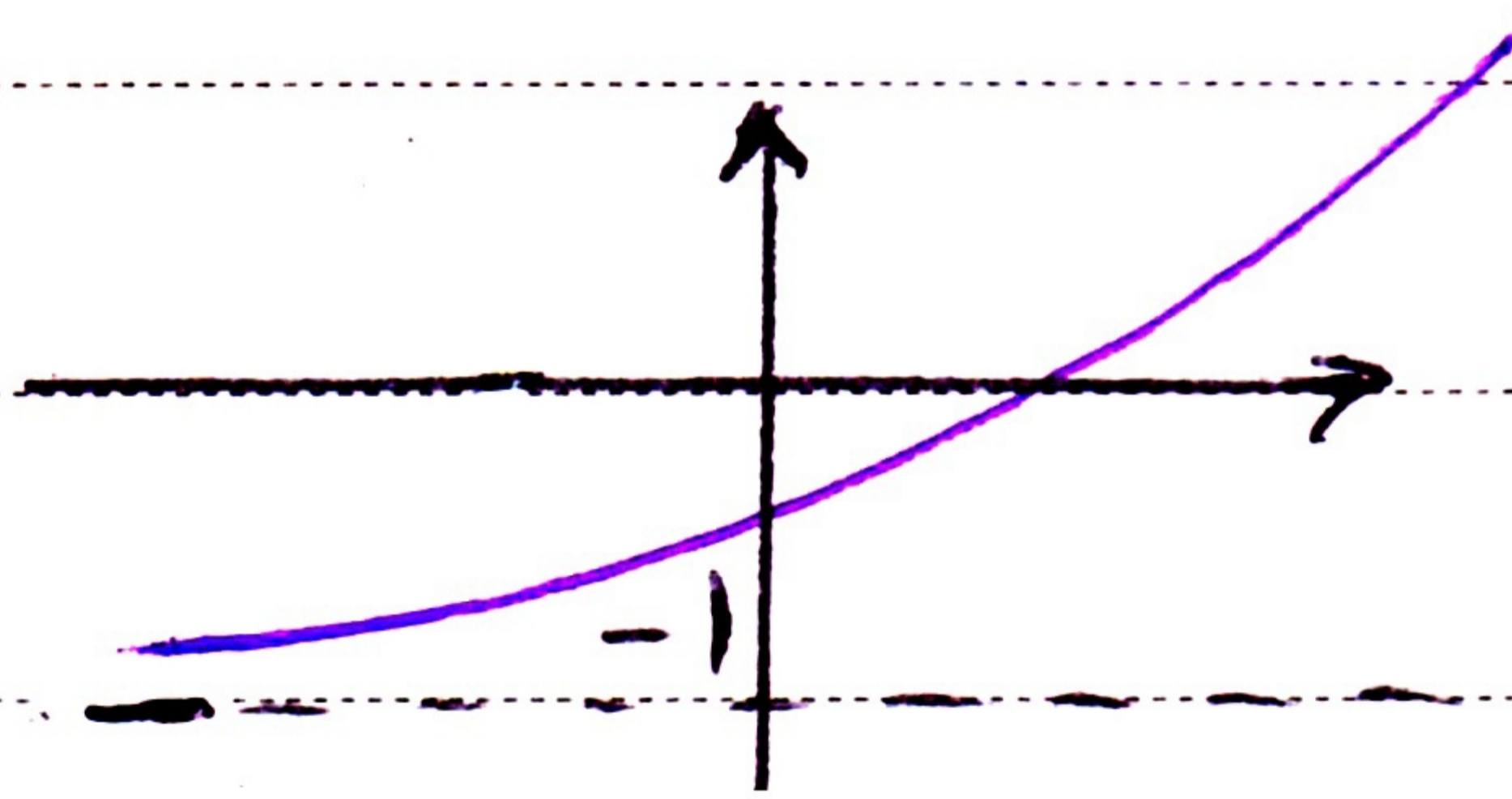
سؤال: نمودار برای تابع f رسم کنید $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$



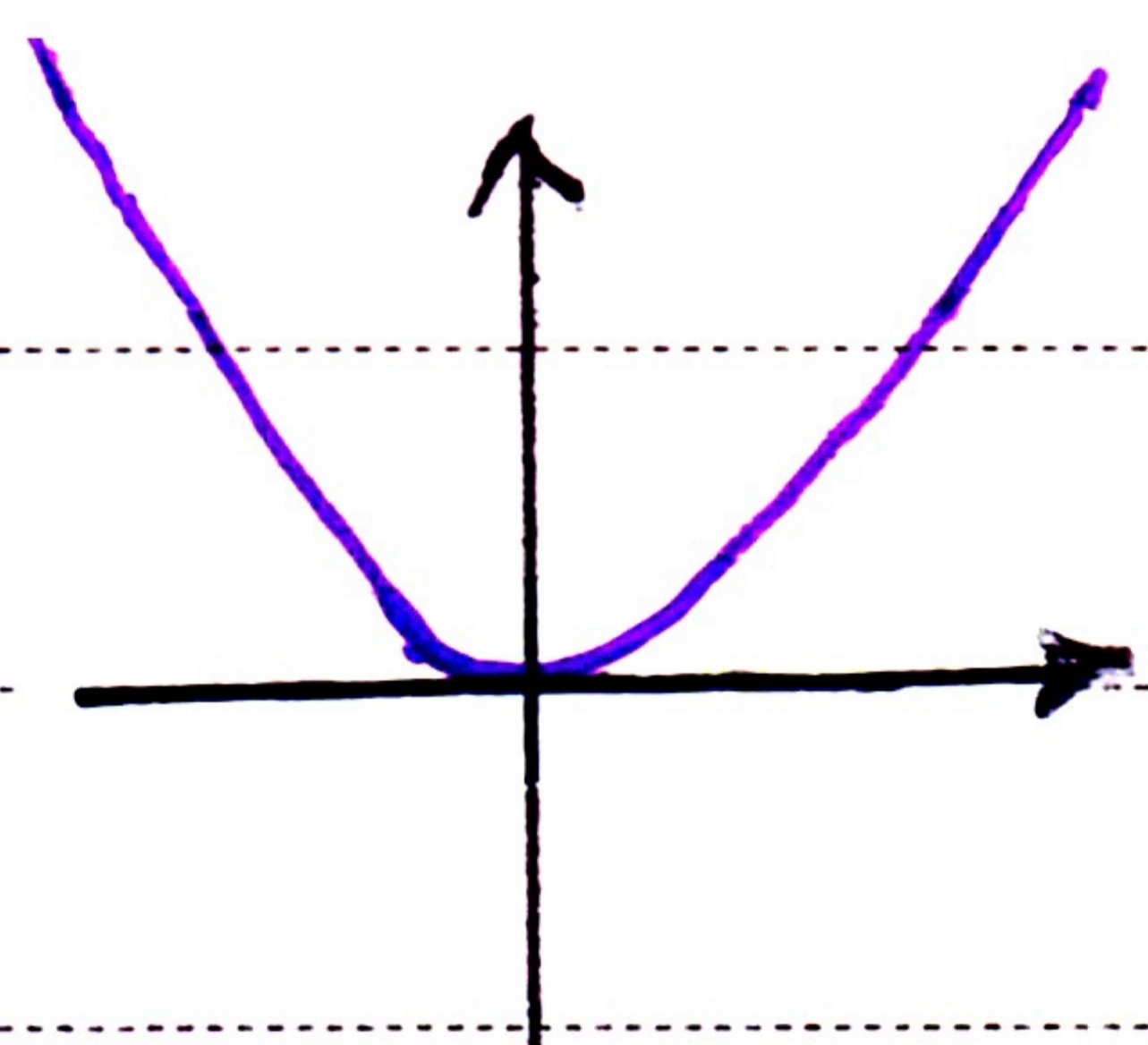
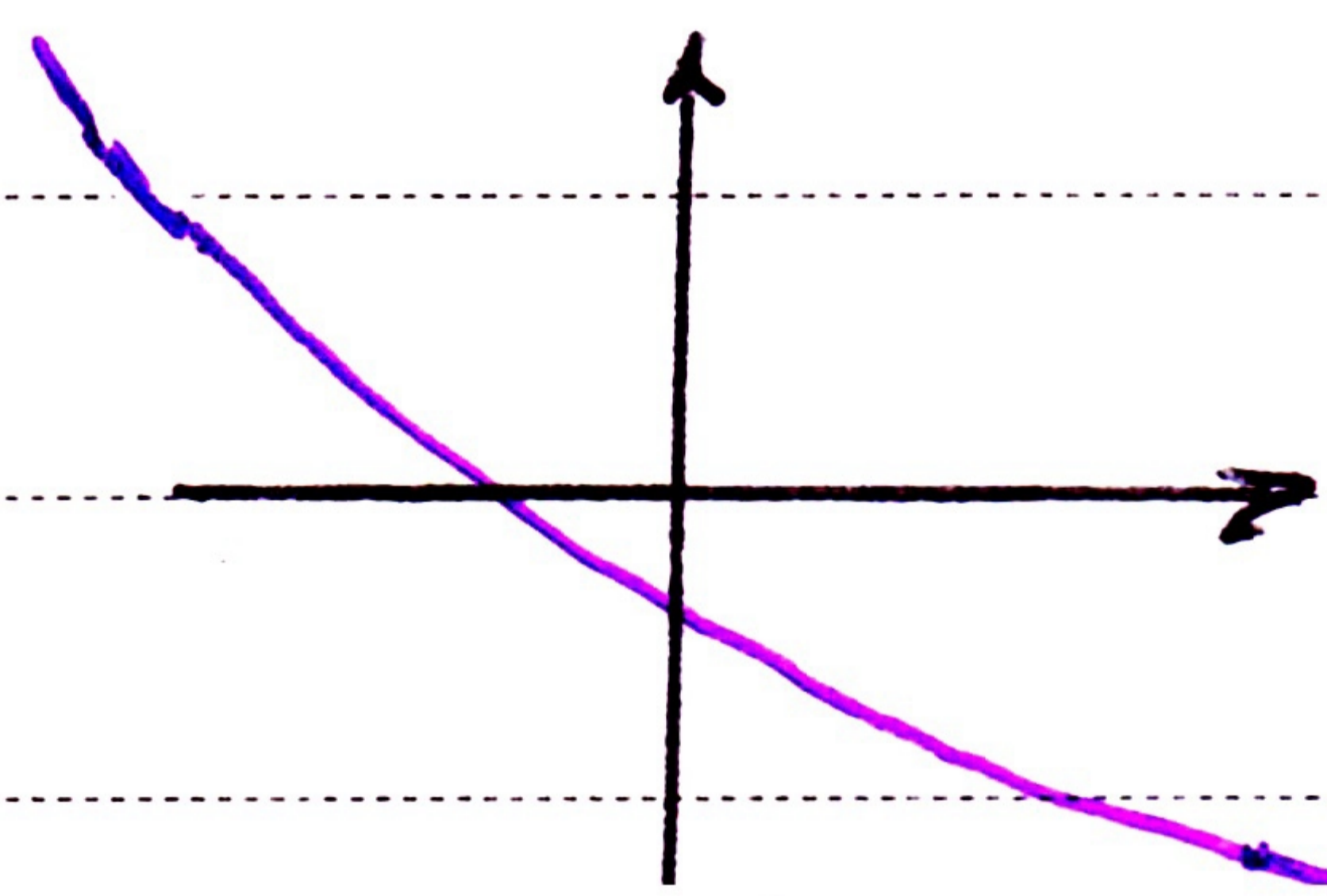
سؤال: نمودار برای تابع f رسم کنید $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$



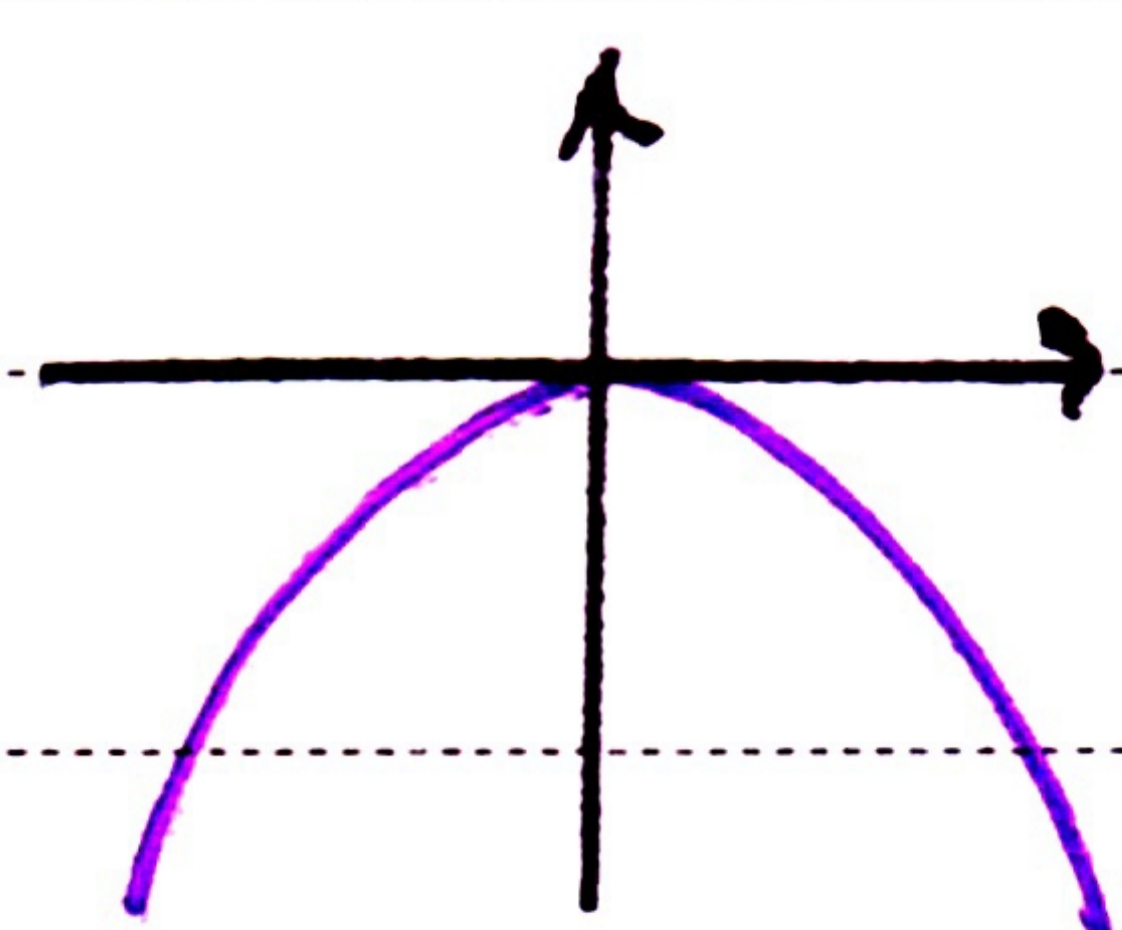
سؤال: نمودار برای تابع f رسم کنید $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



سؤال: نمودار برای تابع f رسم کنید $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

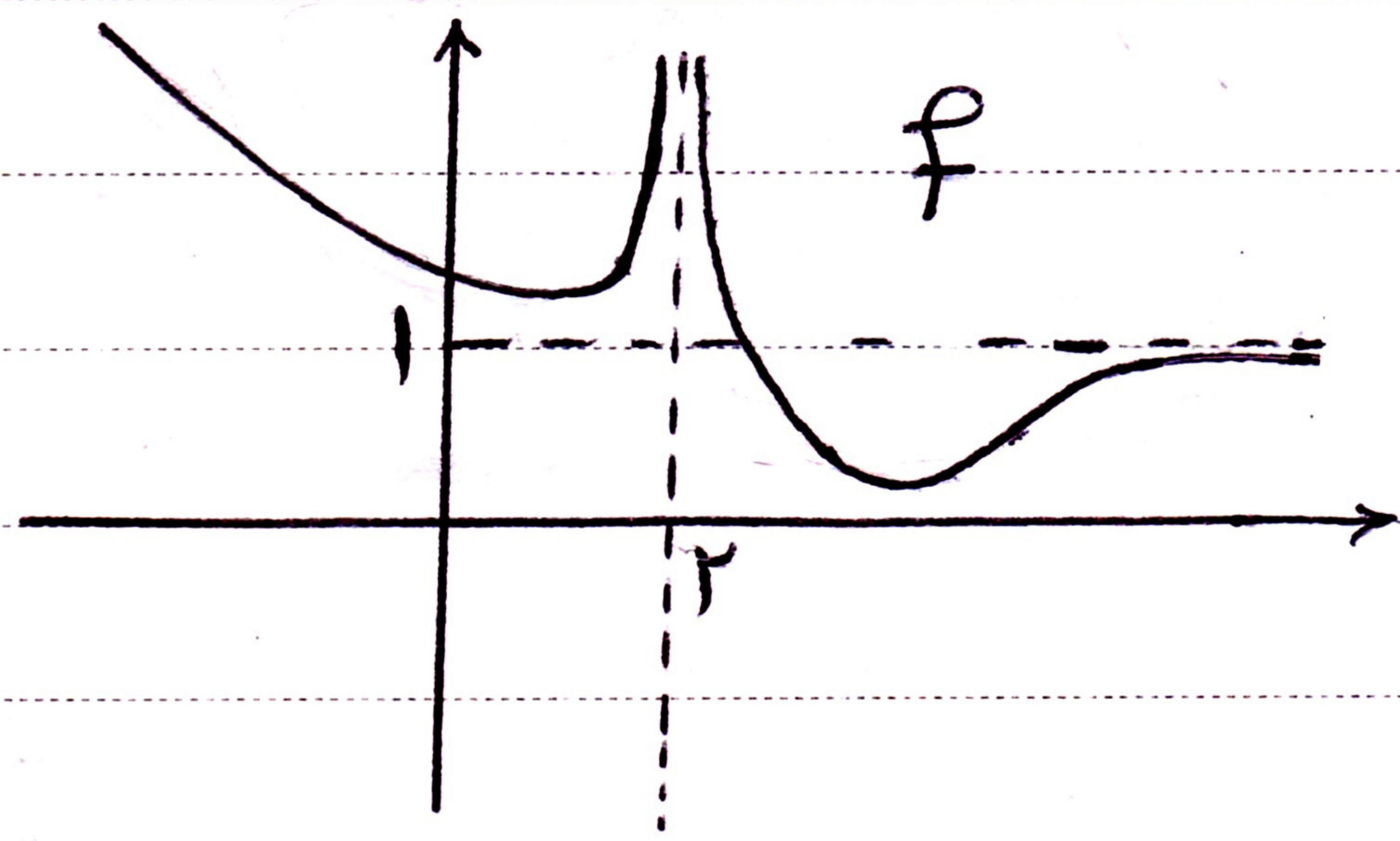


سؤال: نمودار برای تابع f رسم کنید $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$



سؤال: نمودار برای تابع f رسم کنید $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$

مثال: با توجه به نمودار تابع f و حدود زیر را محاسبه کنید.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 0$$

نکته: تابع f را در نظر بگیرید

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = ? \infty \iff \text{درجه مرتفع} > \text{درجه صورت} : \text{اگر}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \iff \text{درجه مرتفع} < \text{درجه صورت} : \text{اگر}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \text{عدد نامصغر} \iff \text{درجه مرتفع} = \text{درجه صورت} : \text{اگر}$$

مثال: a و b را چنان بیابید $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-d)x^3 + bx^2 - 4x + a}{(a-r)x^2 + bx - 1} = 4$

صورت نباید x^3 داشته باشد \Rightarrow باید صورت درجه ۲ باشد \Rightarrow مرتفع درجه ۲ است
(عدد نامصغر = حد)

$$\Rightarrow a-d=0 \Rightarrow a=d$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2 - 4x + a}{ax^2 + bx - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2}{ax^2} = \frac{b}{a} = 4 \Rightarrow b=4a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - b - 2}{x^2 - 2ax} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+1)x^2 + 2x - 1}{(b-1)x + a} = \frac{1}{2} \quad // \text{دالاس}$$

رابطه سبب

$$\Rightarrow a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{(b-1)x + a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{(b-1)x} = \frac{2}{b-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b-1=4 \Rightarrow \boxed{b=5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5 - 2}{x^2 - 2(-1)x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7}{x^2 + 2x} = \frac{0}{0} \text{ بی‌معنی}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

حل چند نمونه سوال

$$1- \text{ با فرض } x > 3 \text{ و } x \leq 2 \text{ مطلوب است } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x+1} & x > 3 \\ -d & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

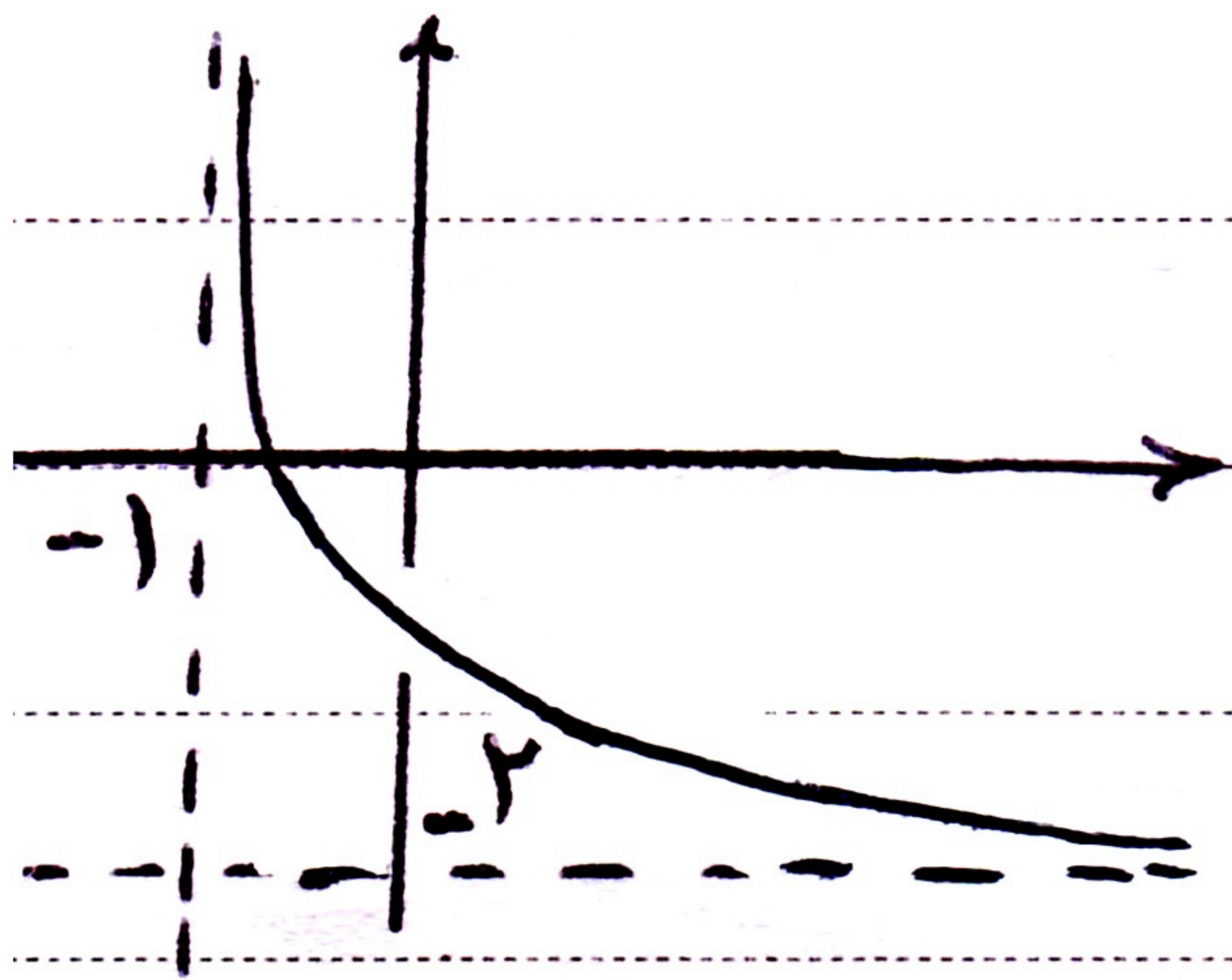
$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -d = -d$$

$$2- \text{ در صورتی که } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{ax^2 - 2x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases} \text{ ، حد های زیر را حساب کنید}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 - 2x}{-x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2}{-x^2} = -a$$

۳- با توجه به نمودار f حددار خواسته شده را بنویسید



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$

۴- حدها زیر را حساب کنید

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{x + |x-1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{2}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} = \frac{2 - 2}{0^-} = \frac{0}{0^-} = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x+1} + 2}{2 - \sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{-\sqrt{-x}} = -1$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 2}{|2x - 1|} = \frac{0 - 2}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \epsilon \right)^{\frac{x+1}{2x-1}} = \epsilon^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\epsilon} = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \omega x |x|}{x^2 + |2 - x^2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \omega x(-x)}{x^2 - 2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \omega x^2}{2x^2 - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\omega x^2}{2x^2} = \frac{\omega}{2}$

ح) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{1}{x} \right] = [2 + 0^+] = 2$

ز) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 + \frac{1}{x} \right] = [2 + 0^-] = 1$