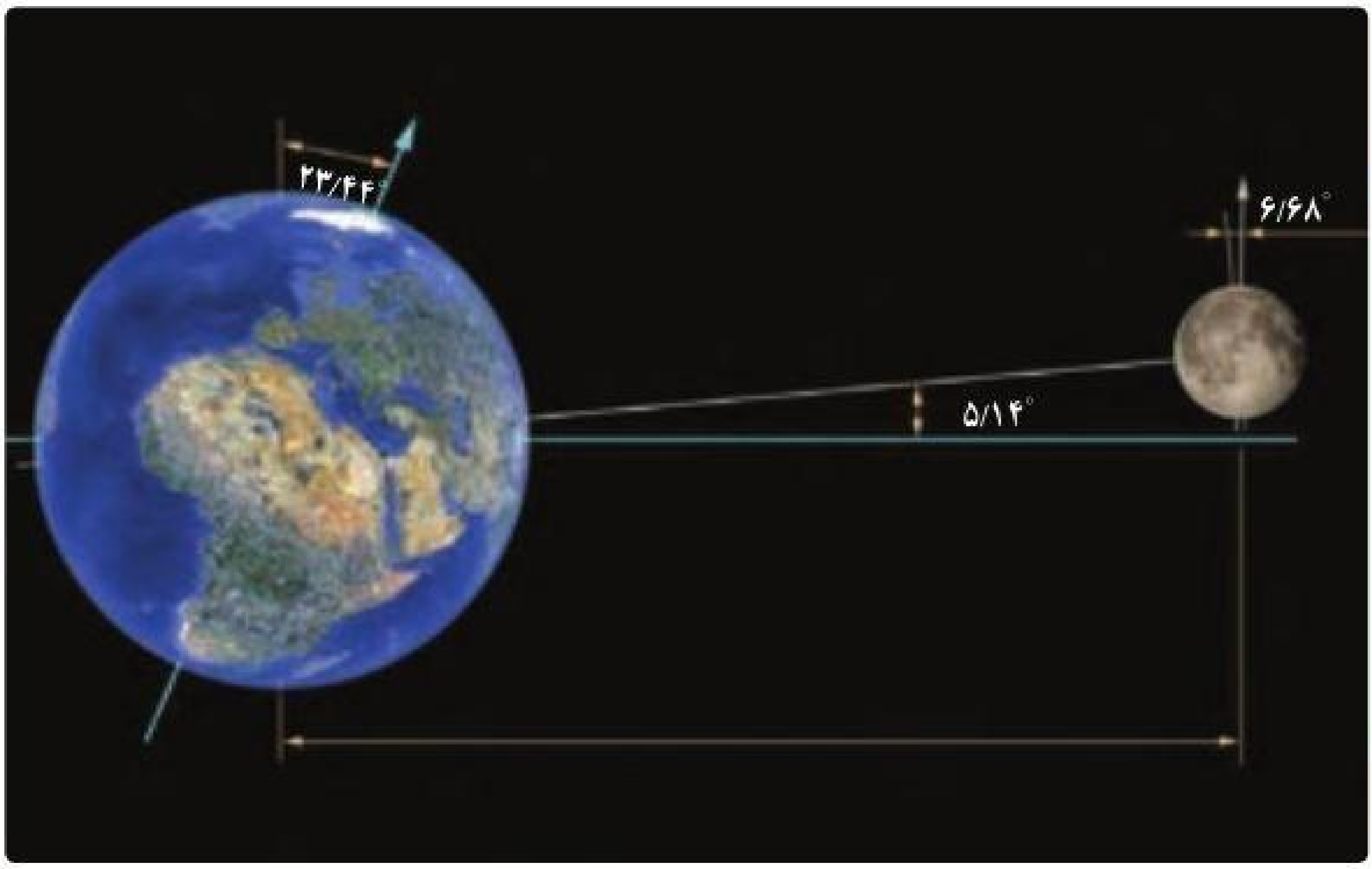
فصل ۲

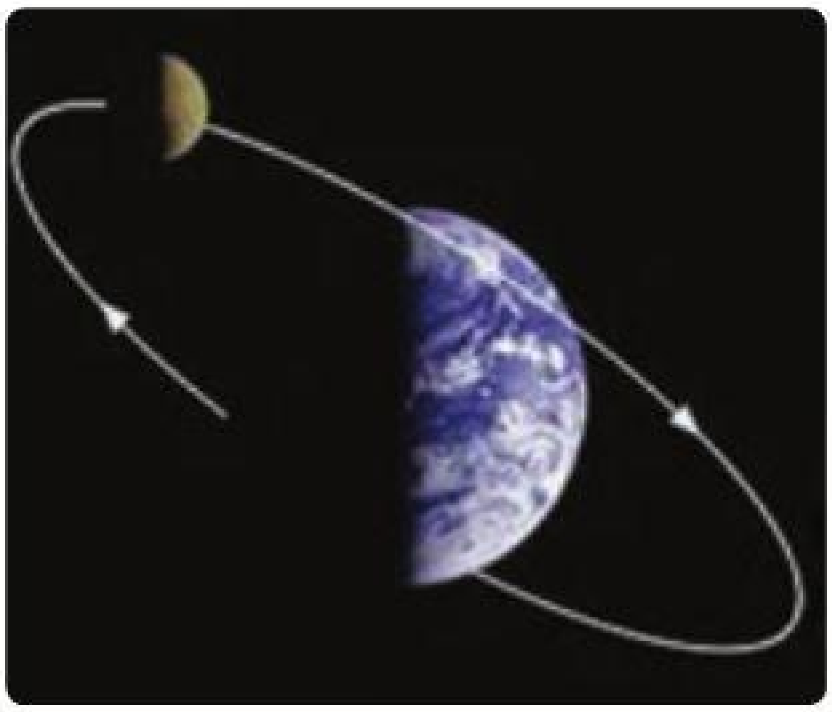
مثلثات

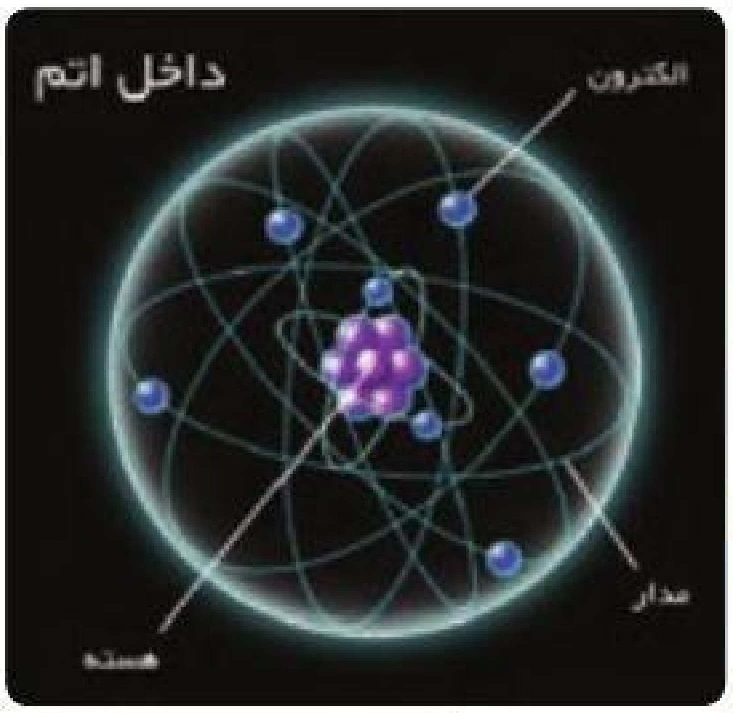
الشَّمْسُ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ (رحمان : ۵)

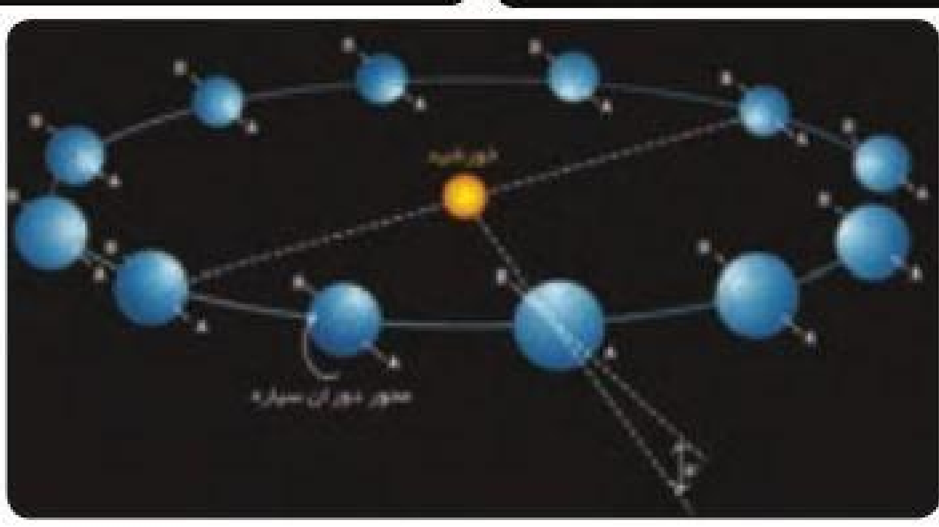
خورشید و ماه برابر حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.

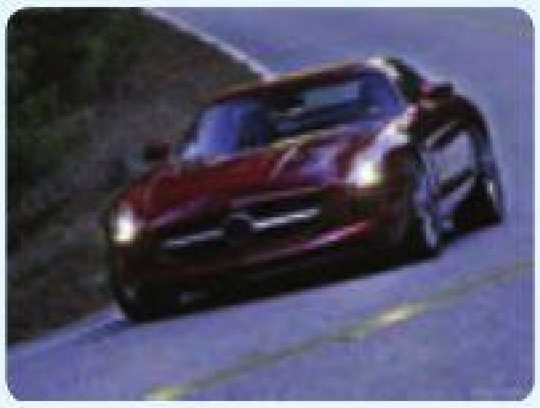


زمین هم به‌دور خودش و هم به‌دور خورشید می‌چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل‌های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می‌نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستارهٔ قطبی، ستاره‌ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی‌کند. اگر از سمت ستارهٔ قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه‌های ساعت به دور خود، دوران می‌کند.







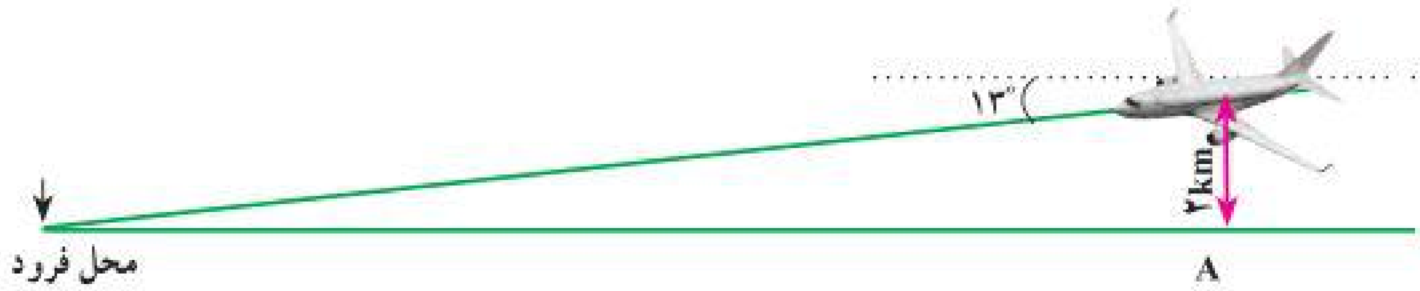


برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

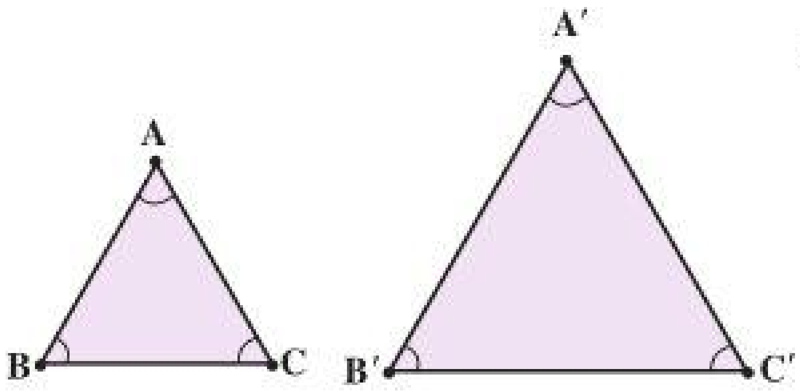
مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به‌صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

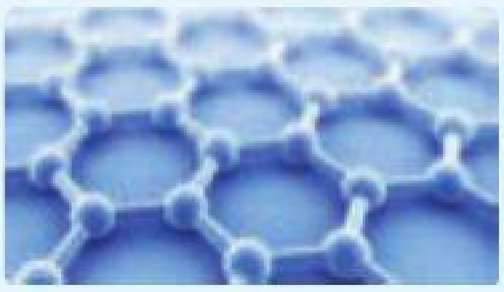
به‌عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



اگر زاویهٔ هواپیما با افق ۱۳° باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایهٔ نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ ، آنگاه داریم : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B'}$.



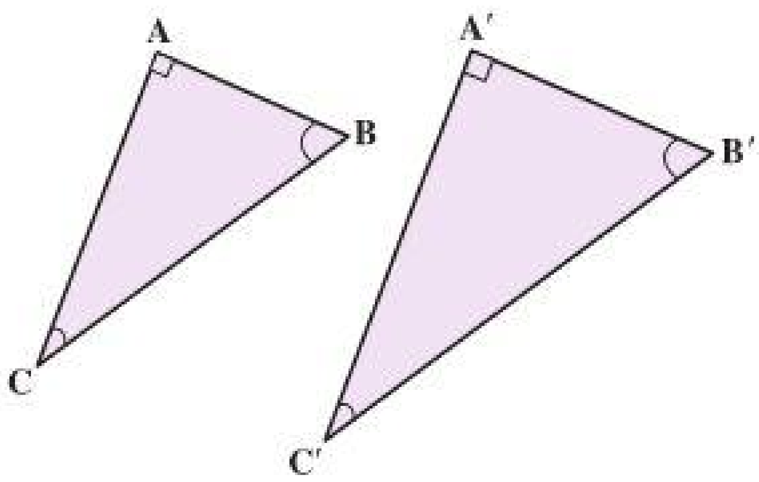


در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها ۱۲۰ درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفون‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفون‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنهٔ شدت شنوایی انسان را دارند.

در هندسه ثابت می‌شود :

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

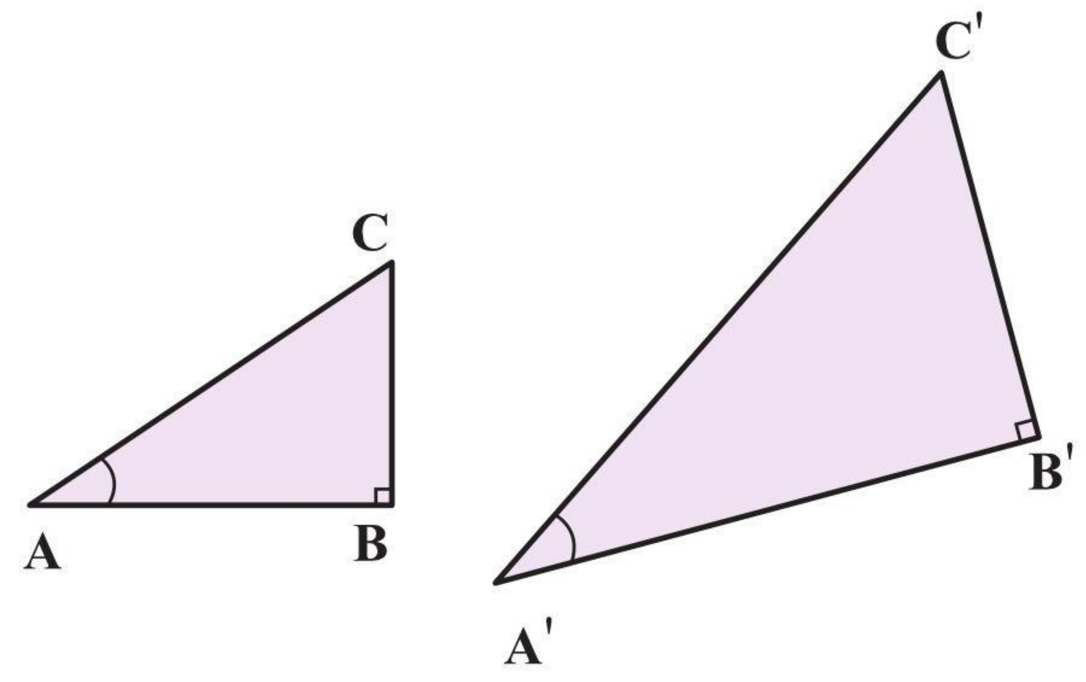
به‌عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید :



اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C'}$ ، آنگاه

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

کار در کلاس



۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و A'B'C'، $\hat{A} = \hat{A'}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\overset{\Delta}{ABC} \ \square \ \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید :

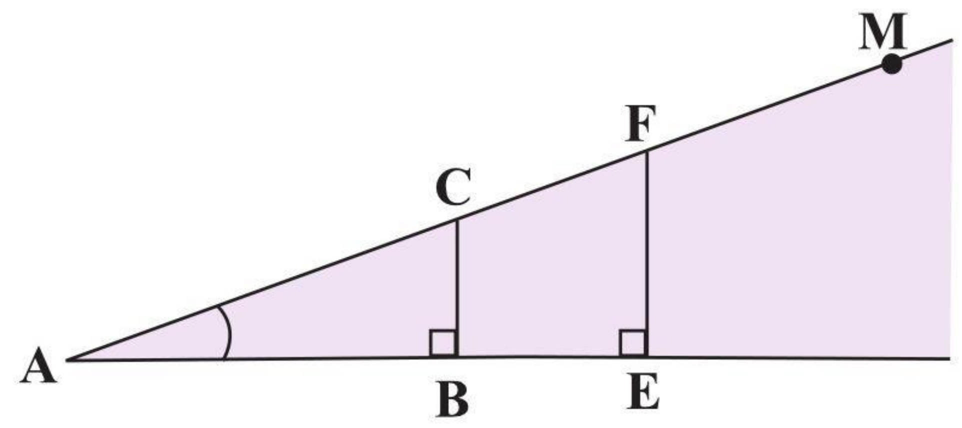
طبق خواص تناسب

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه : اگر زاویهٔ A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم‌الزاویه A'B'C' (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

فعالیت

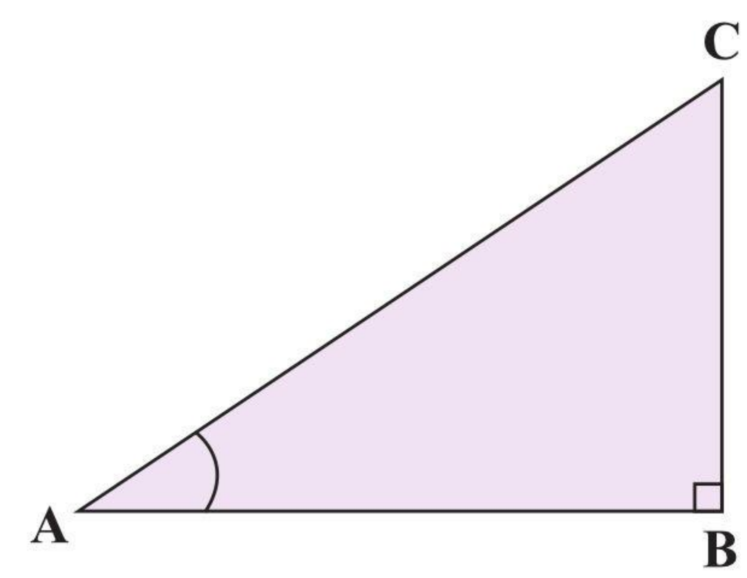


۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

$$\overset{\Delta}{ACB} \sim \overset{\Delta}{AFE} \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$$

۲ نقطهٔ دیگری مثل M را در امتداد AC درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرِ زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید :

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

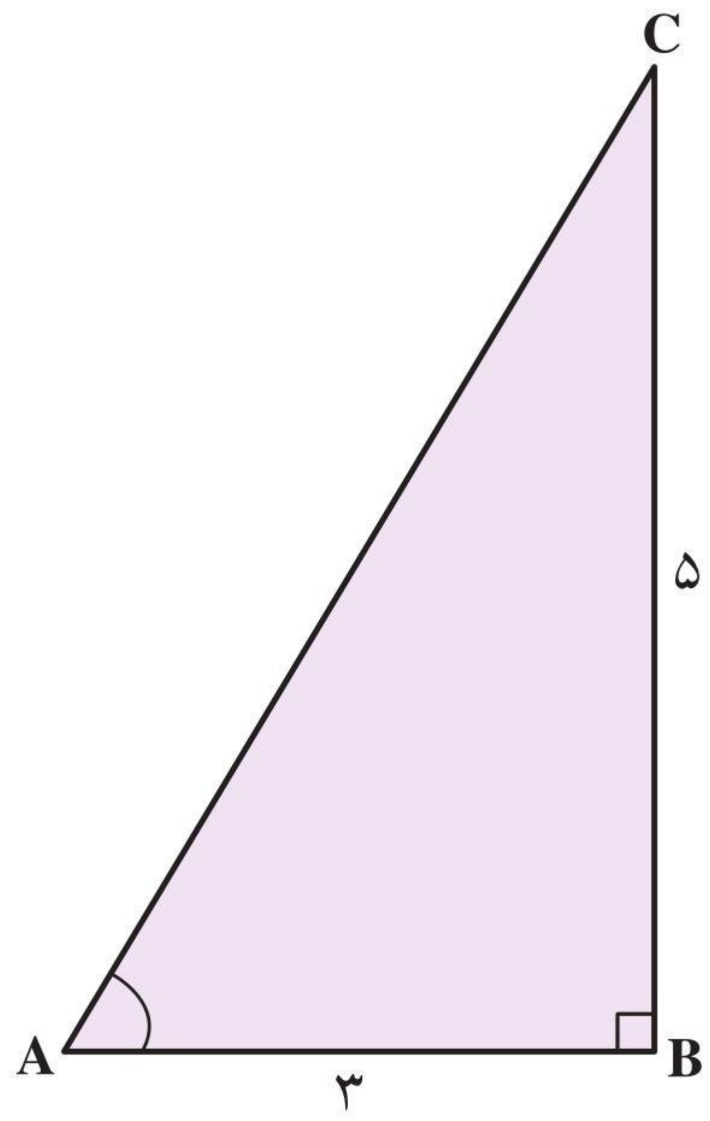


همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به‌طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با tanA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، داریم :

$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}} = \frac{BC}{AB}$$

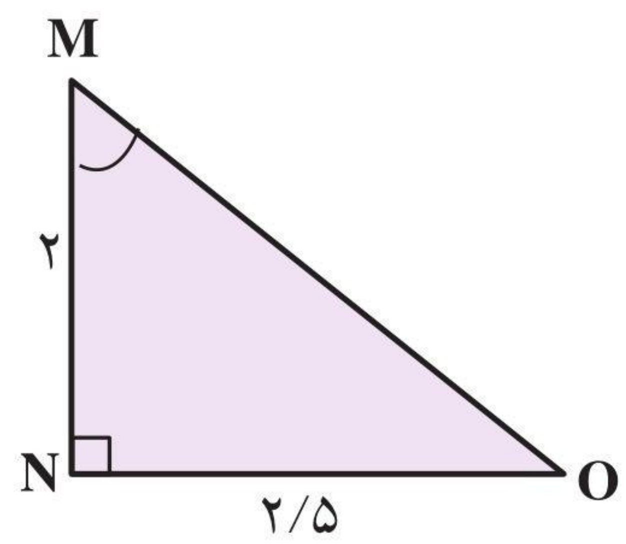
عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با cotA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

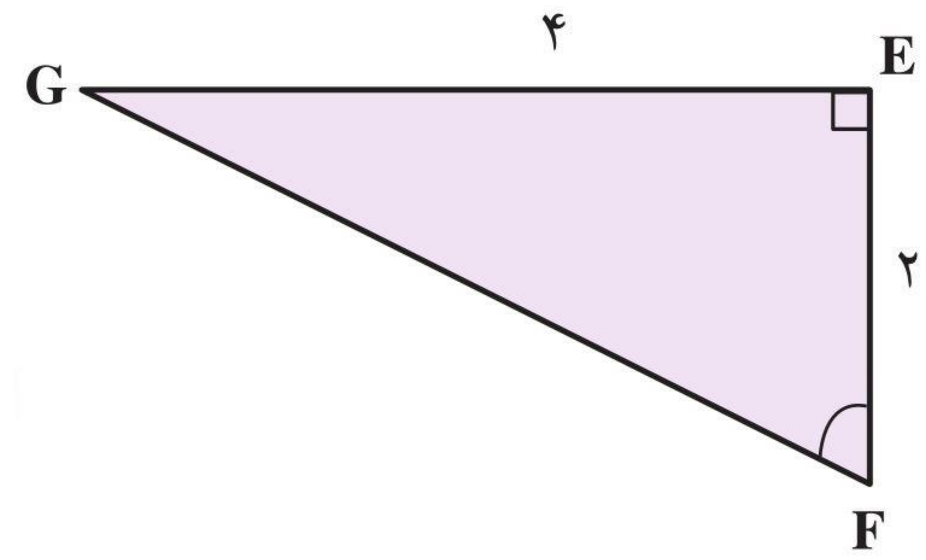
$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}} = \frac{AB}{BC}$$



فعالیت

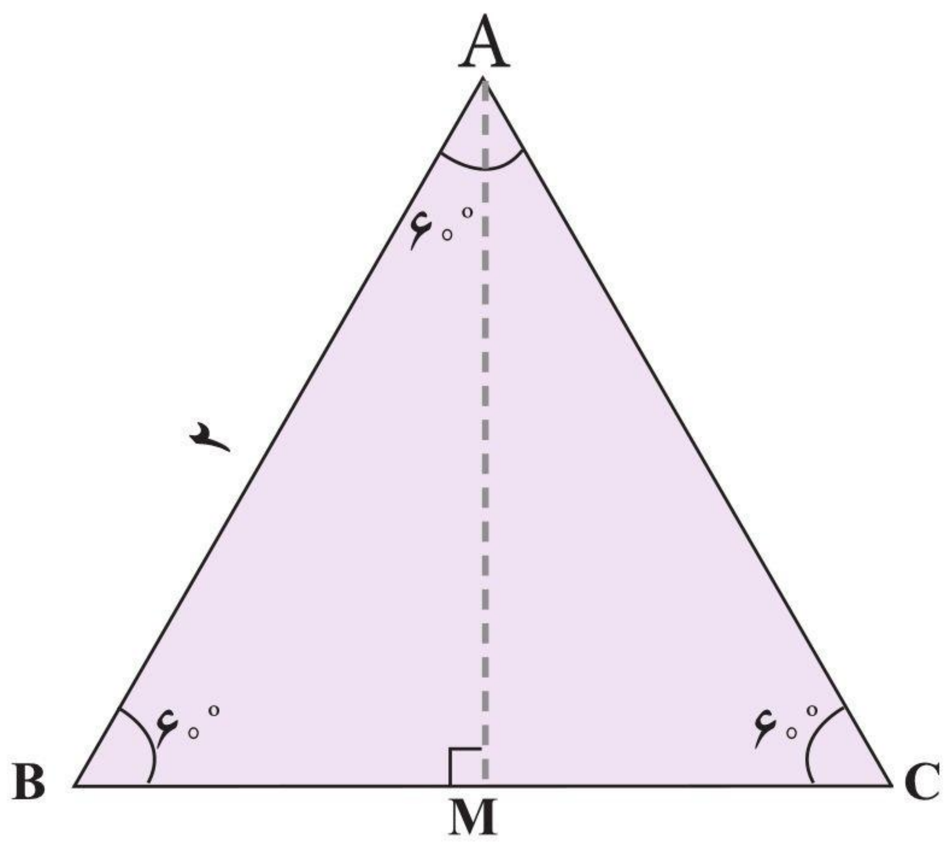
۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.





$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\qquad$ $\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲/۵}$ $\qquad$ $\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{۴}{۲}$

$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$ $\qquad$ $\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲/۵}{۲}$ $\qquad$ $\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$



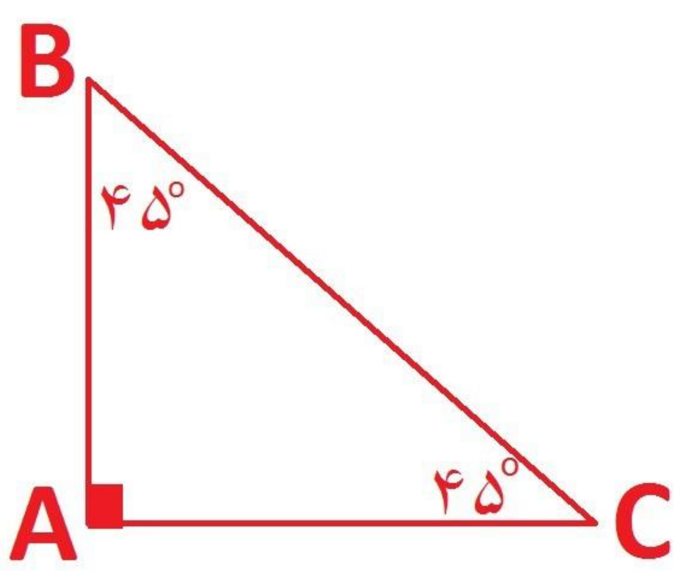
۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به‌طول **۲** واحد را درنظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM ...**میانه**... ضلع BC است. بنابراین

$BM = MC = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲}AB = ۱$

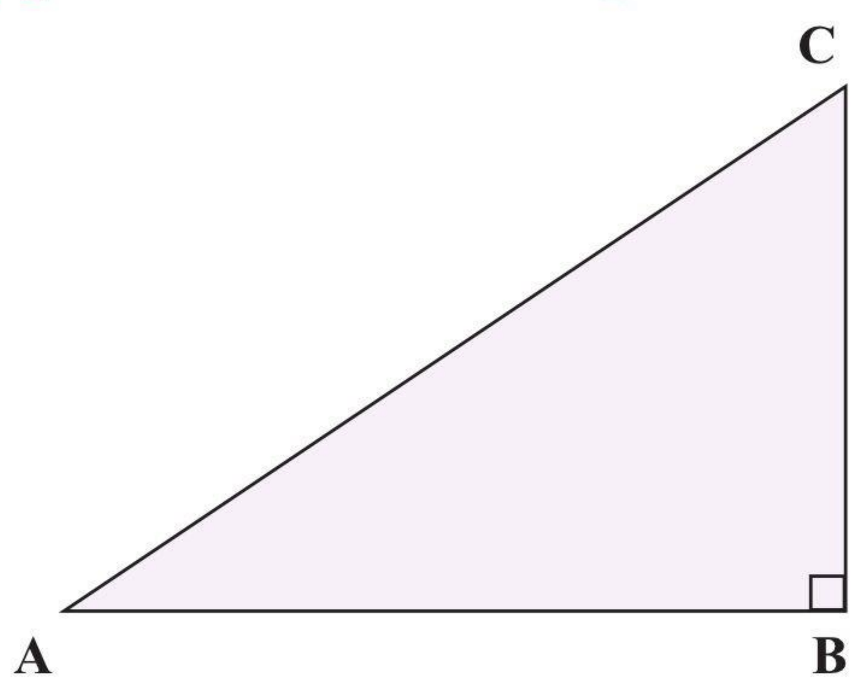
ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱}$ $\qquad$ $۱^۲ + AM^۲ = ۲^۲ \Rightarrow AM = \sqrt{۳}$



پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ ۴۵° را پیدا کنید.

$\tan ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = ۱$ $\qquad$ $\cot ۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = ۱$



در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن‌را سینوس زاویهٔ A می‌نامیم و با sinA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}\ .$$

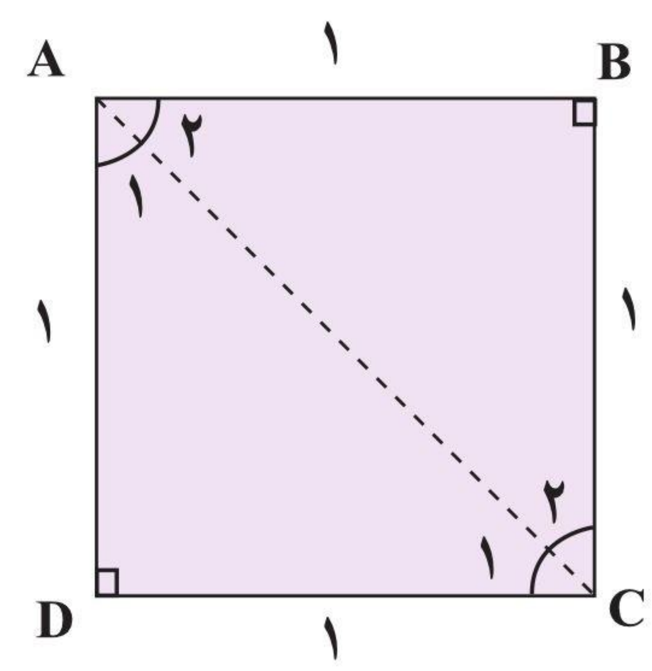
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم و آن‌را با cosA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $\cos A = \frac{AB}{AC}$.

به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ و از این‌رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. به‌طور مشابه، می‌توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش‌آموزان خواست تا نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن‌را حساب کنند.



فریبا : با توجه به اینکه مثلث ADC قائم‌الزاویه است، داریم $(AD)^۲+(DC)^۲=(AC)^۲$. در نتیجه $(AC)^۲=۱^۲+۱^۲$ و از این‌رو $(AC)^۲=۲$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC=\sqrt{۲}$.

معلم : با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی‌الساقین است، از این‌رو $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱=$ ...۴۵°... .

مبینا : طبق تعریف سینوس، $\sin A_۱=\sin ۴۵^\circ=\frac{DC}{\text{وتر}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

سبا : من هم می‌توانم با توجه به روابط بالا کسینوس ۴۵° را پیدا کنم.

$$\cos A_۱=\cos ۴۵^\circ=\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ .$$

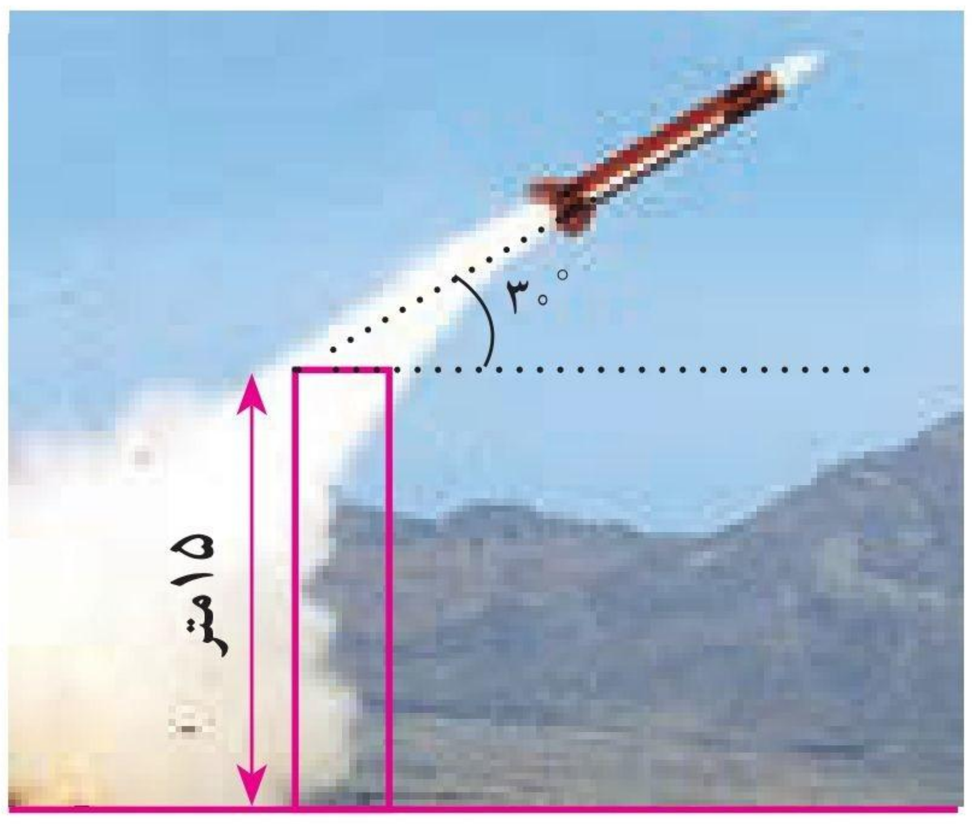
مریم : اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، طبق تعریف داریم

$$\tan A_۱=\tan ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱ \quad \text{و} \quad \cot A_۱=\cot ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱\ .$$

کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰°، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sinA	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cosA	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tanA	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cotA	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

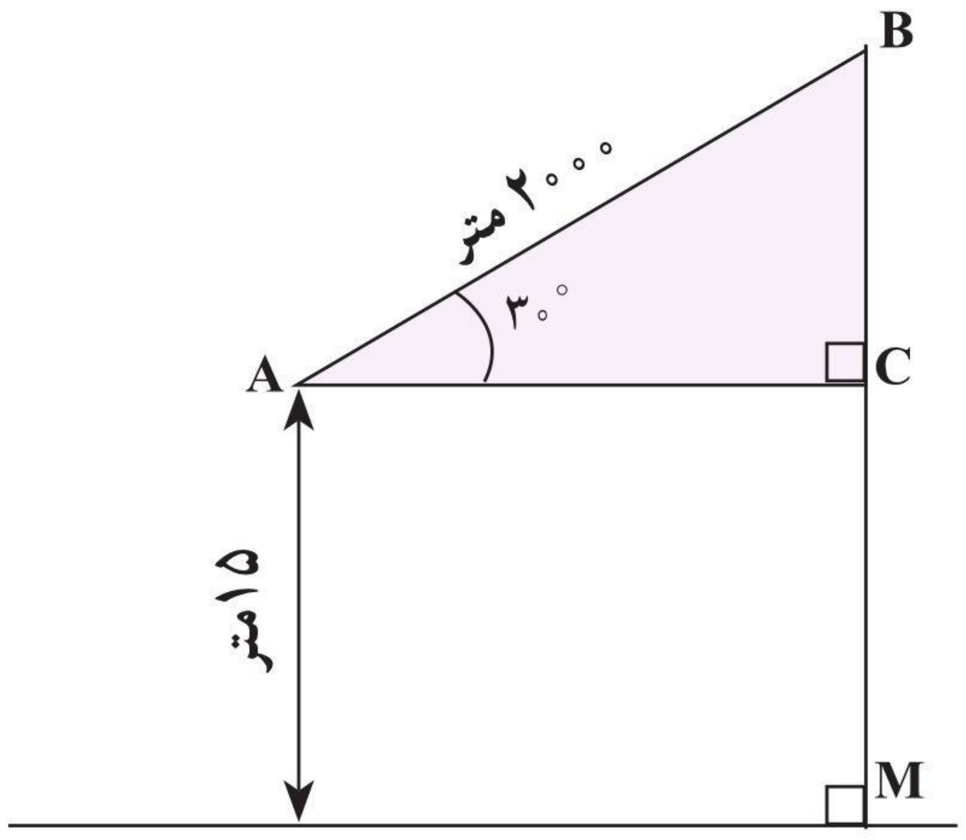


مثال

یک موشک در ارتفاع ۱۵متری از سطح زمین و با زاویهٔ °۳۰ پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

حل : ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به‌سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با :

BC+ MC= BC + ...۱۵...



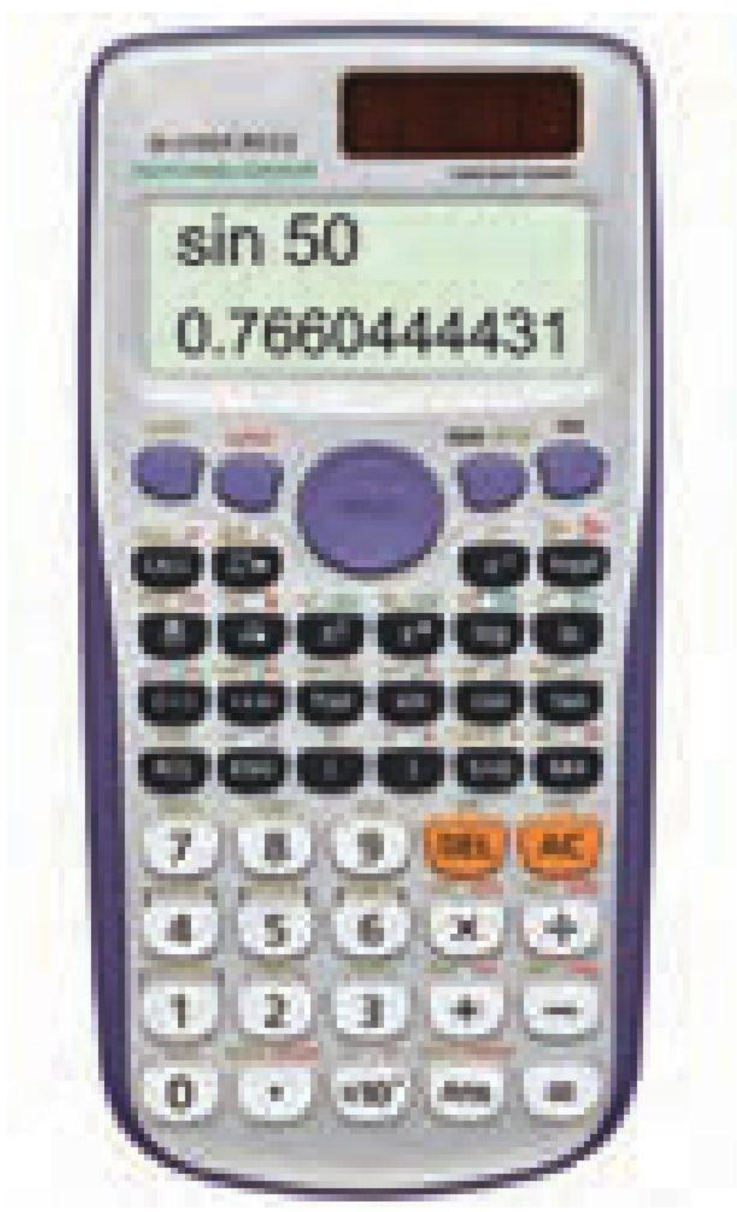
بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۲۰۰۰} \Rightarrow BC = ۱۰۰۰$$

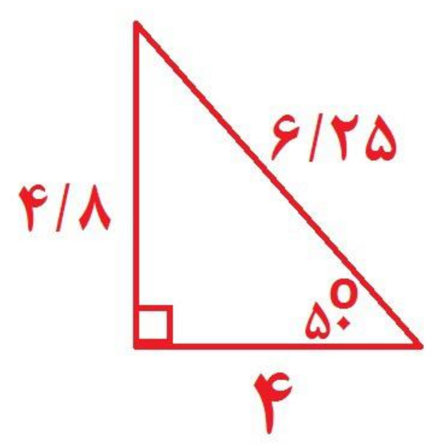
و از این‌رو

ارتفاع موشک = ...۱۰۰۰... + ...۱۵... = ...۱۰۱۵...

فعالیت



۱ یک زاویهٔ °۵۰ رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه °۵۰ را به‌صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به‌دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



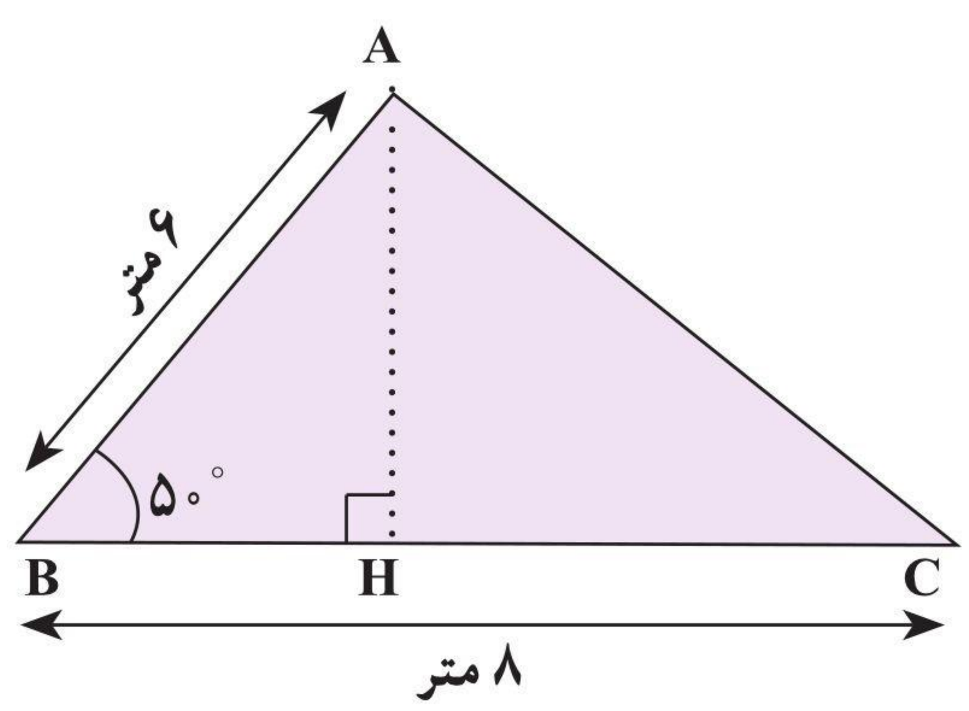
$$\sin ۵۰^\circ = \frac{۴/۸}{۶/۲۵} = ۰/۷۶۸$$

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم :

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷۶$، داریم :

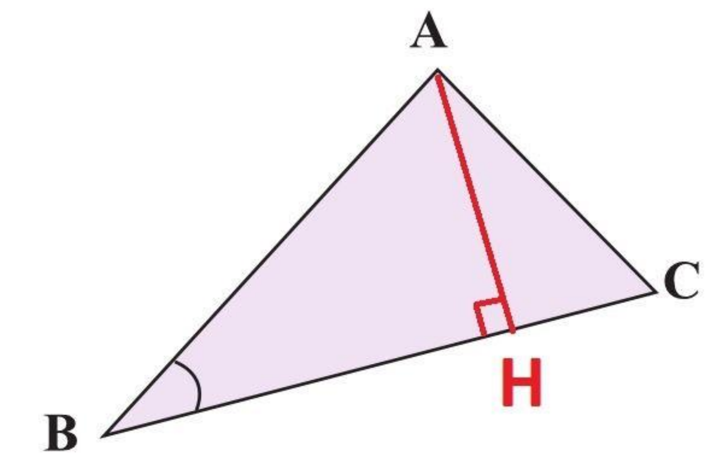
$$\sin ۵۰^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{۶} \Rightarrow AH \simeq ۰/۷۶ \times ۶ = ۴/۵۶$$



ب) با توجه به قسمت (الف) داریم :

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲} AH \times BC \simeq \frac{۱}{۲} \times ۴/۵۶ \times ۸ = ۱۸/۲۴$$

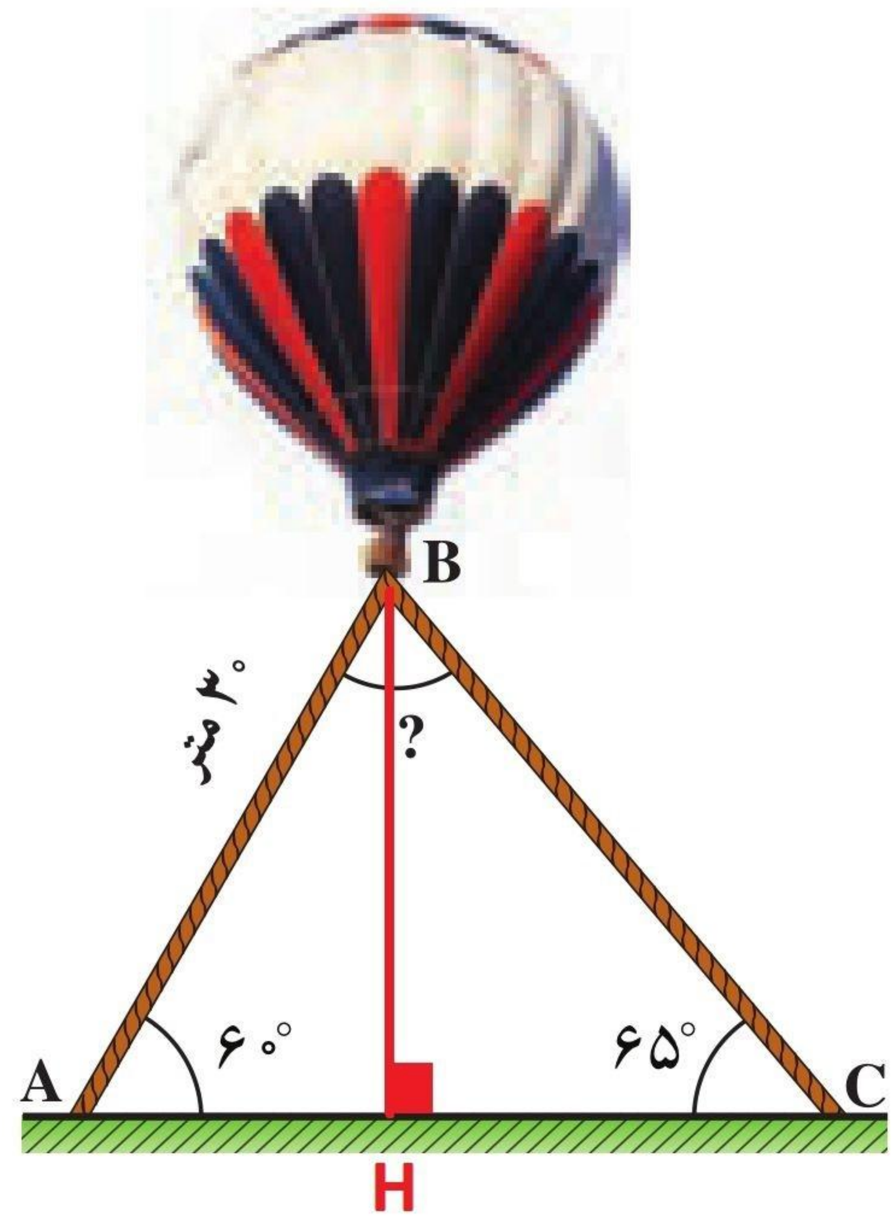
کار در کلاس



۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آنها نشان دهید :

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B.$$

$$\left.\begin{aligned} S &= \tfrac{۱}{۲} BC \times AH \\ \sin B &= \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin B \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = \tfrac{۱}{۲} BC \times AB \times \sin B$$



۲ در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن‌را BH بنامید.

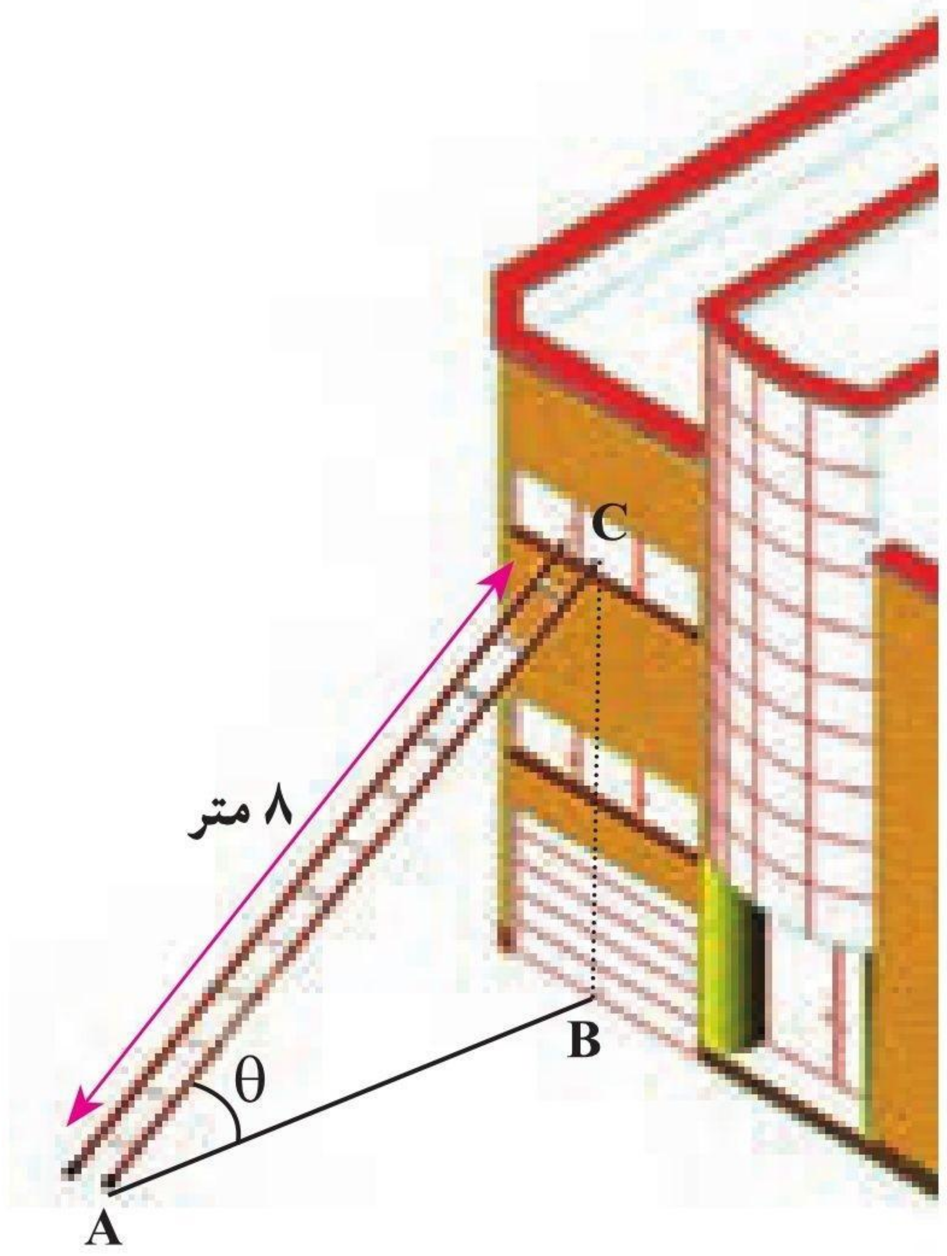
$$\widehat{B} + ۶۰^\circ + ۶۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} = ۵۵^\circ$$

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به‌دست آورید.

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۳۰} \Rightarrow BH = ۱۵\sqrt{۳}$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ °۶۵، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow ۰/۹۰۶ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰/۹۰۶} \simeq ۲۸/۶۶۶۵$$



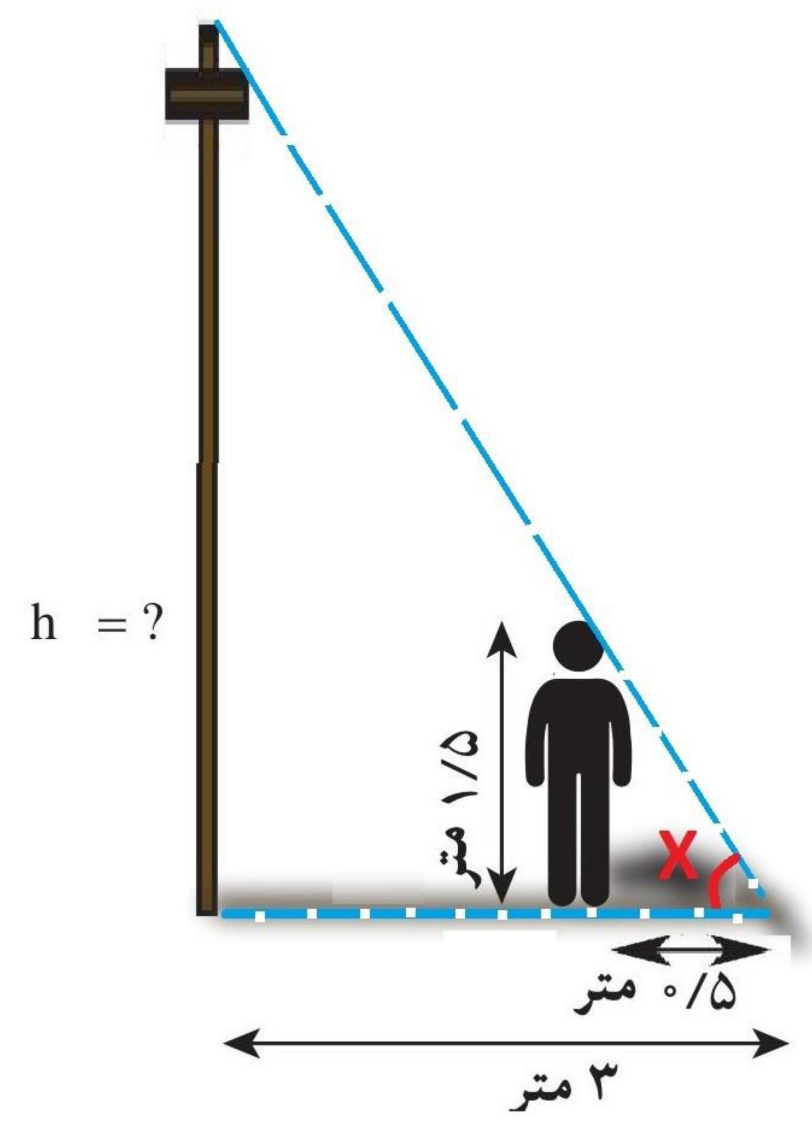
۲ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین °۳۰=θ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Rightarrow ۲BC = ۸ \Rightarrow BC = ۴$$

اکنون به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم :

$$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ = ۴۸ \Rightarrow AB = \sqrt{۴۸}$$

تمرین



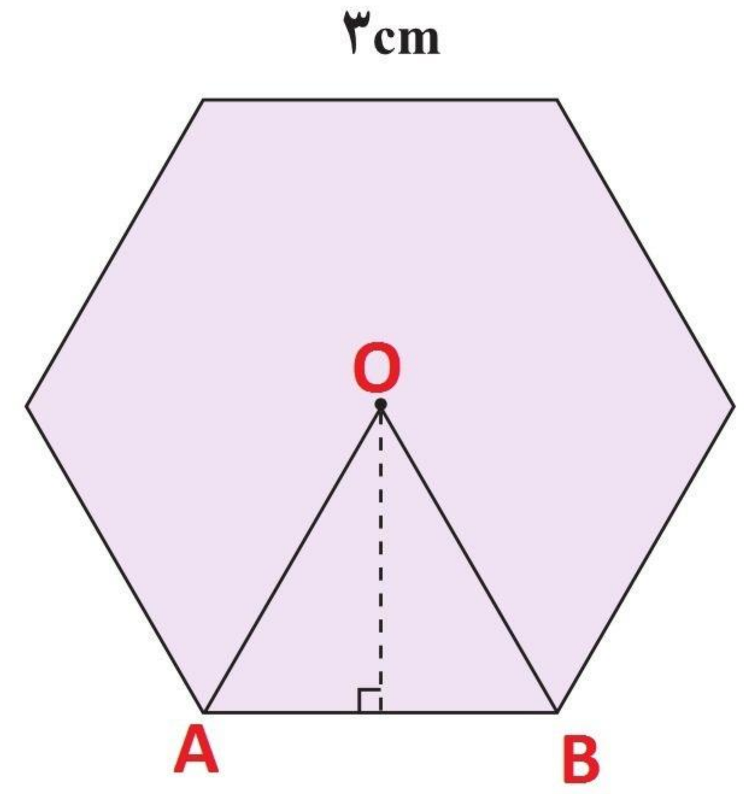
۱ نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

شکل کتاب ایراد داشته که آن را اصلاح کرده و جواب می دهیم :

در مثلث قائم الزاویه ی کوچک $\tan x = \frac{۱/۵}{۰/۵}$ و در مثلث قائم الزاویه ی بزرگ $\tan x = \frac{h}{۳}$

می باشد . در نتیجه می توان نوشت : $\frac{۱/۵}{۰/۵} = \frac{h}{۳} \Rightarrow h = ۹$. یعنی ارتفاع تیر برق ۹ متر است .

۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید.

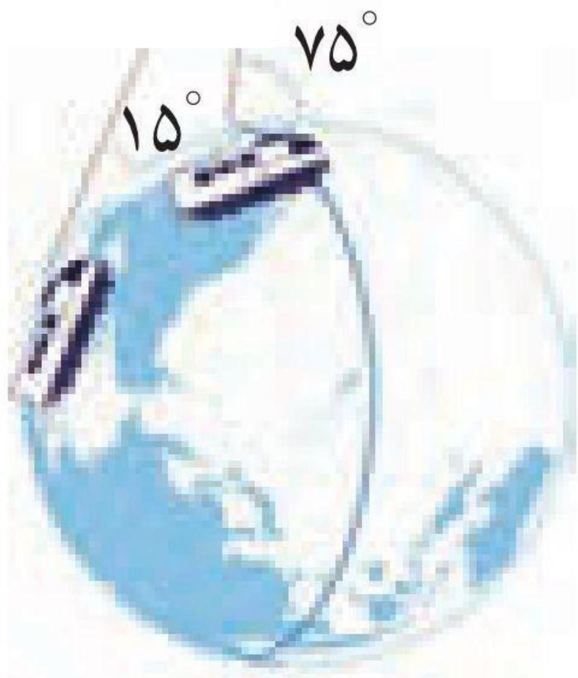


مطابق شکل ، هر شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است بنابراین مثلث AOB متساوی الاضلاع است

بنابراین : $\left.\begin{array}{l} OA=۳ \\ \widehat{A}=۶۰^\circ \end{array}\right\}$

$$S_{AOB}=\frac{۱}{۲}OA\times AB\times \sin ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

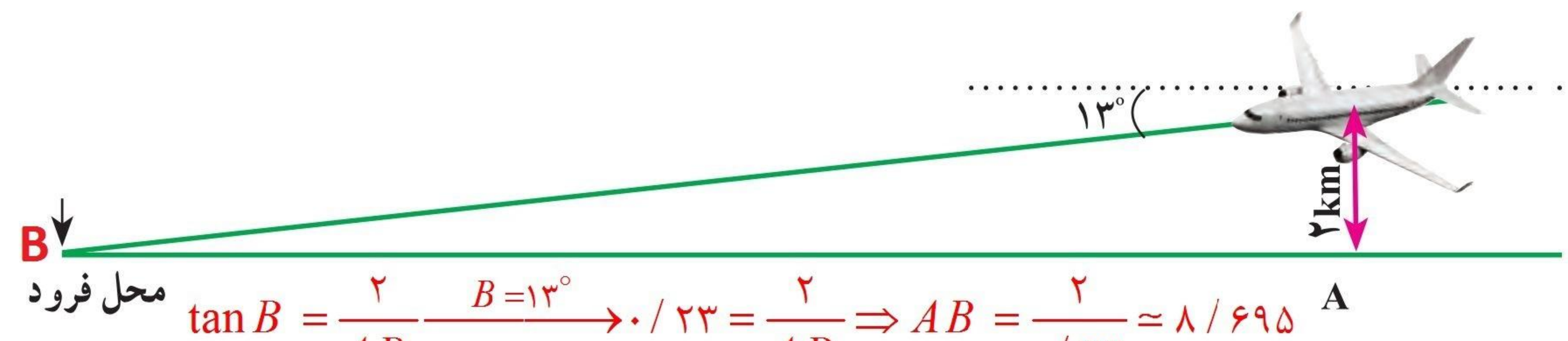
$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم}=۶\times S_{AOB}=۶\times \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$



۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرودآمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود °۱۳ باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید.

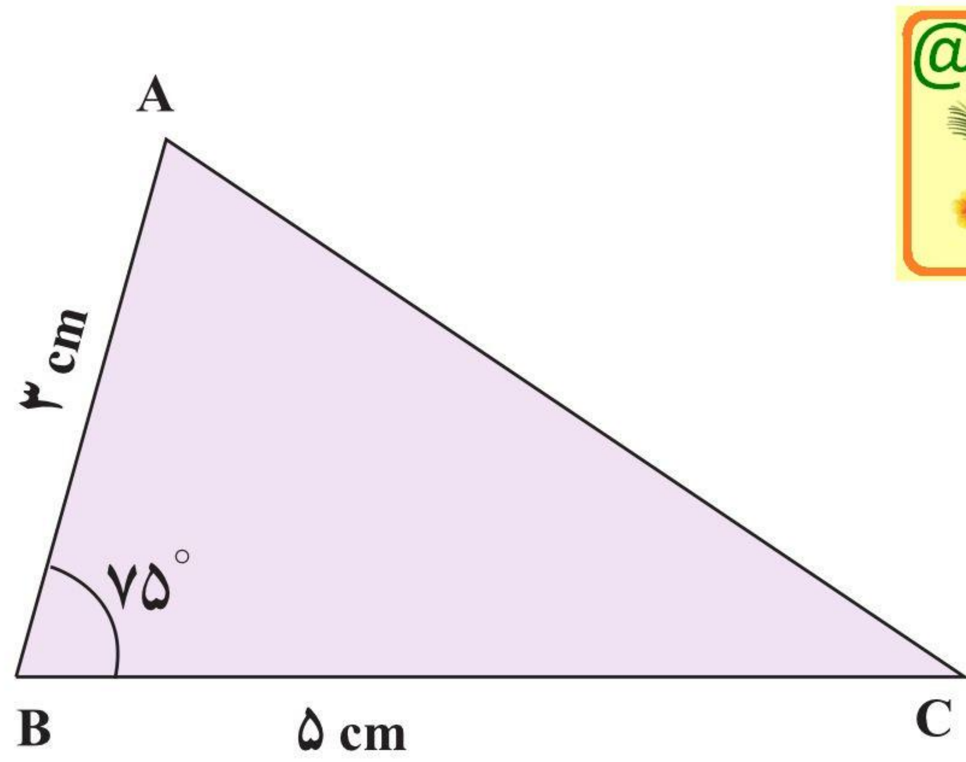
$\tan ۱۳^\circ \simeq ۰/۲۳$

طبق قضیه ی خطوط موازی ، زاویه ی B نیز ۱۳ درجه است.



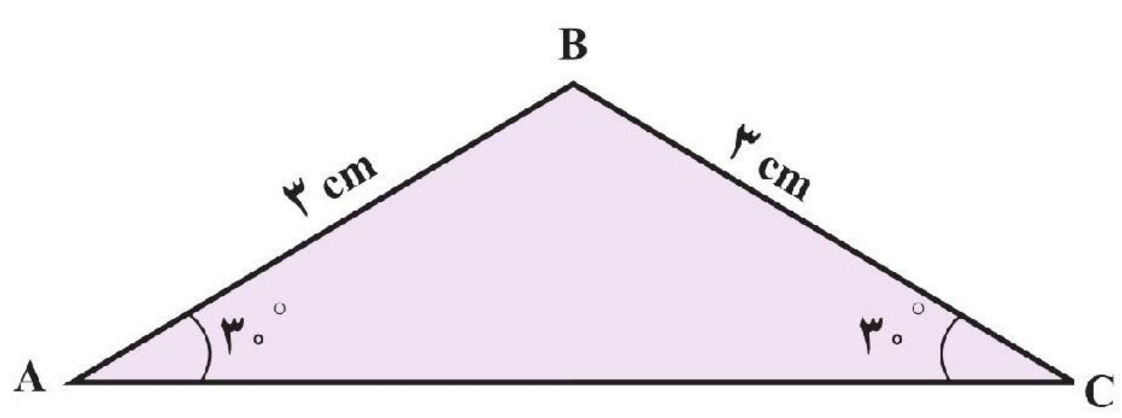
$$\tan B=\frac{۲}{AB}\xrightarrow{B=۱۳^\circ}۰/۲۳=\frac{۲}{AB}\Rightarrow AB=\frac{۲}{۰/۲۳}\simeq ۸/۶۹۵$$

۴ فرض کنید $\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.



$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times \sin ۷۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۵\times ۰/۹۶=۷/۲$$

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



روش اول (با استفاده از ماشین حساب) :

$$\widehat{B}+۳۰^\circ+۳۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B}=۱۲۰^\circ$$

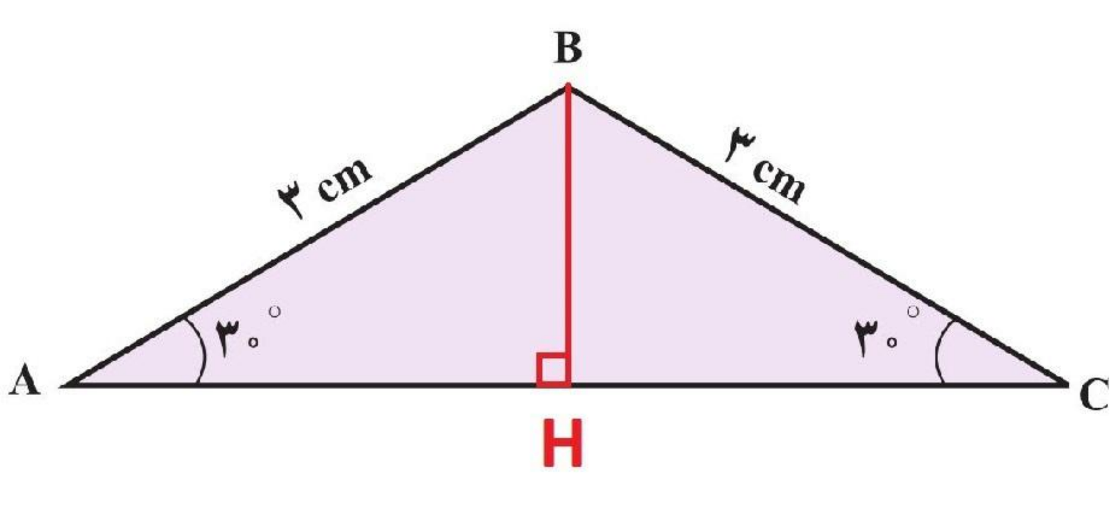
$$S=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳\times \sin ۱۲۰^\circ=\frac{۹}{۲}\times ۰/۸۶۶=۳/۸۹۷$$

روش دوم (بدون استفاده از ماشین حساب) :

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AH}{۳}\Rightarrow AH=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABH}}=\frac{۱}{۲}AH\times AB\times \sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times ۳\times \frac{۱}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۲\times S_{\overset{\Delta}{ABH}}=۲\times \frac{۹\sqrt{۳}}{۸}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}=۳/۸۹۷$$



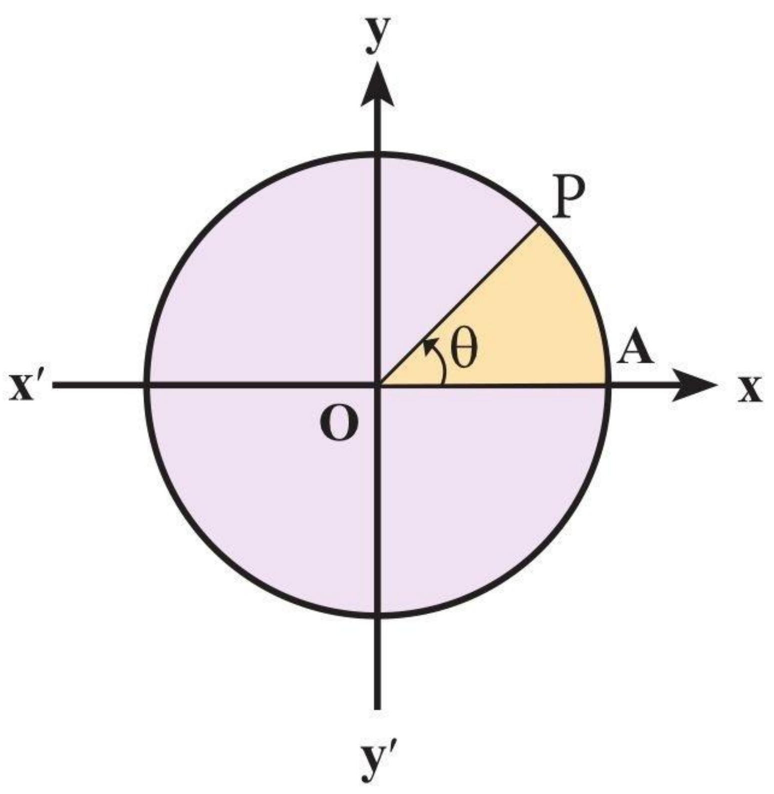
ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیرِ بسته، که آن را مَدار می‌نامند، درحال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند :

ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً هم‌زمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بینند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آنتن نیست و آنتن هر ماهواره می‌تواند حداکثر ۴/۴۲ درصد سطح کره زمین را بپوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

درس دوم: دایره مثلثاتی

می‌توان از دایرهٔ مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.

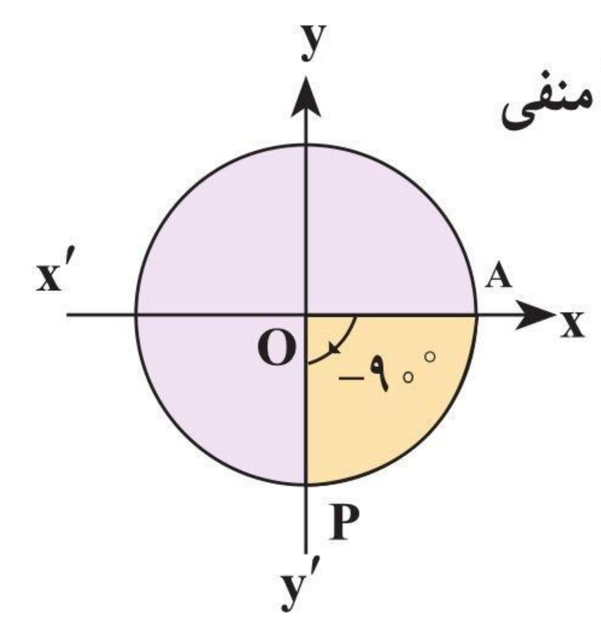


دایرهٔ روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را درنظر بگیرید. نقطهٔ A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.

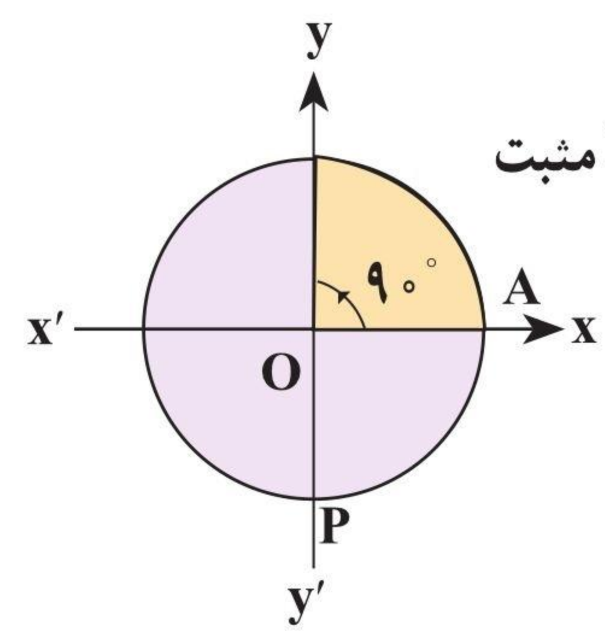
مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های -۹۰°، ۹۰°، -۲۱۰° و ۲۲۵° داده شده‌اند.

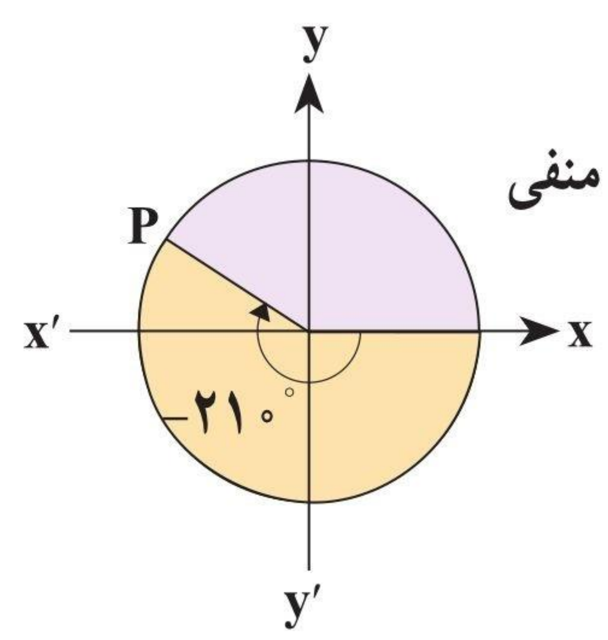
زاویهٔ منفی



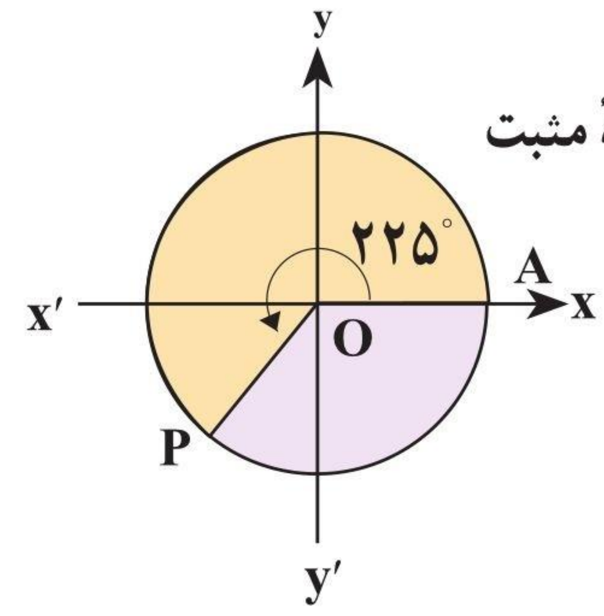
زاویهٔ مثبت



زاویهٔ منفی

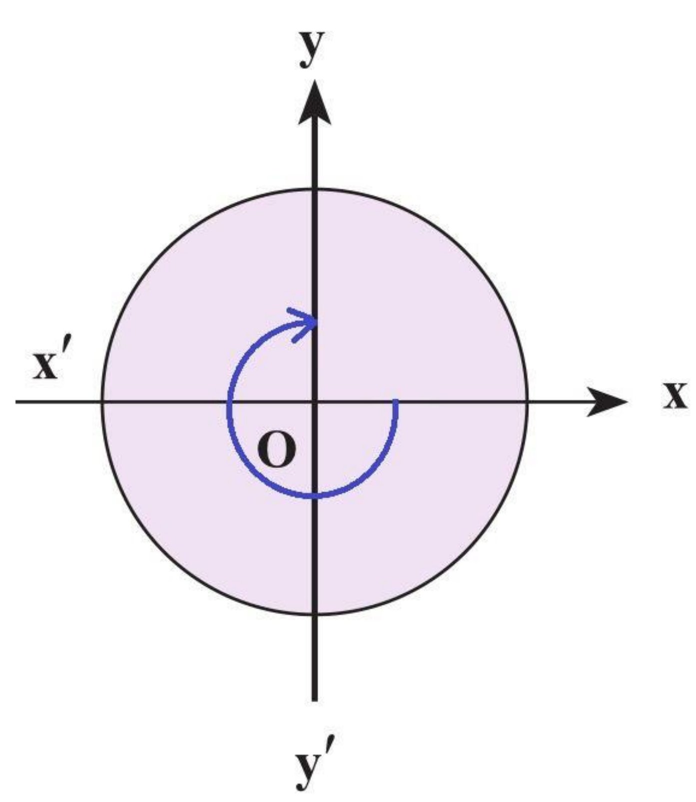


زاویهٔ مثبت

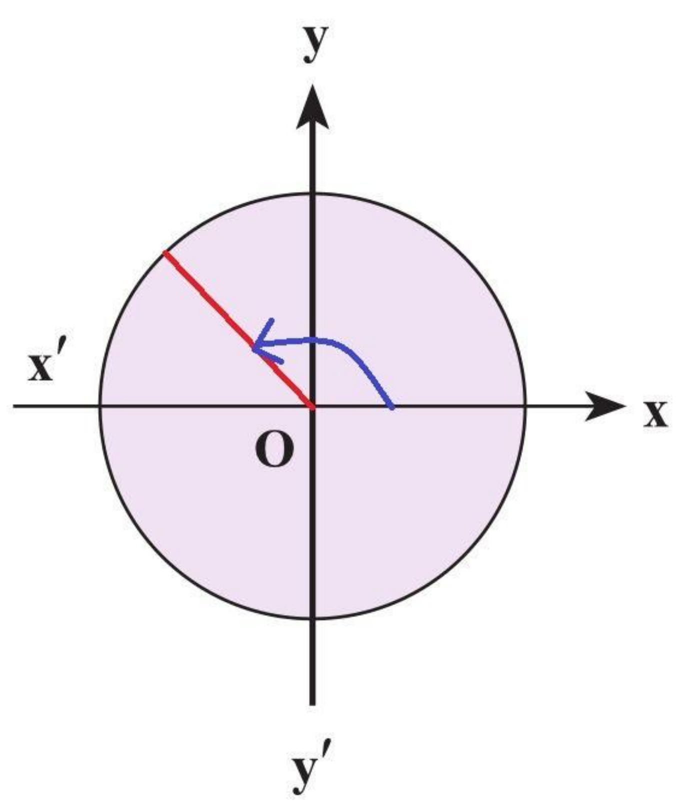


فعالیت

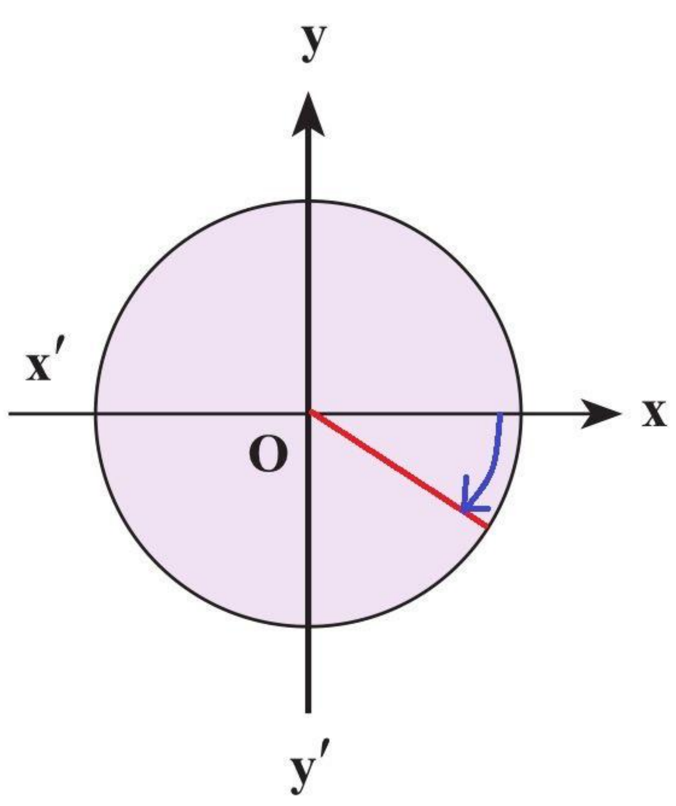
۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



-۲۷۰°



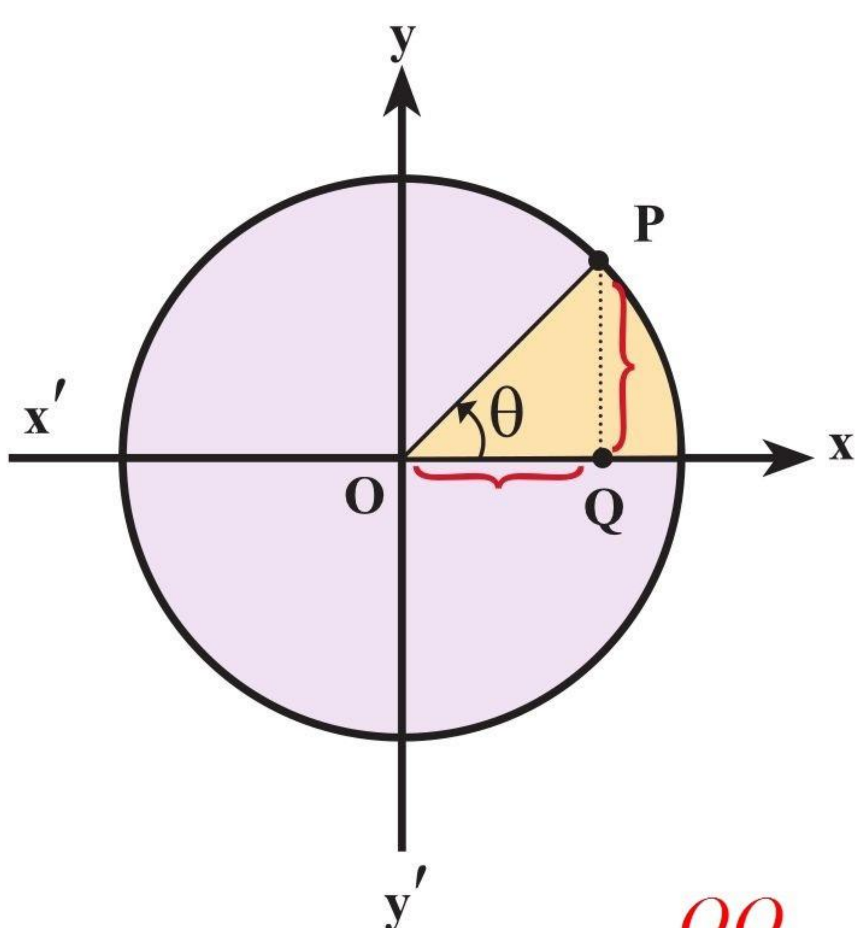
۱۳۵°



-۳۰°

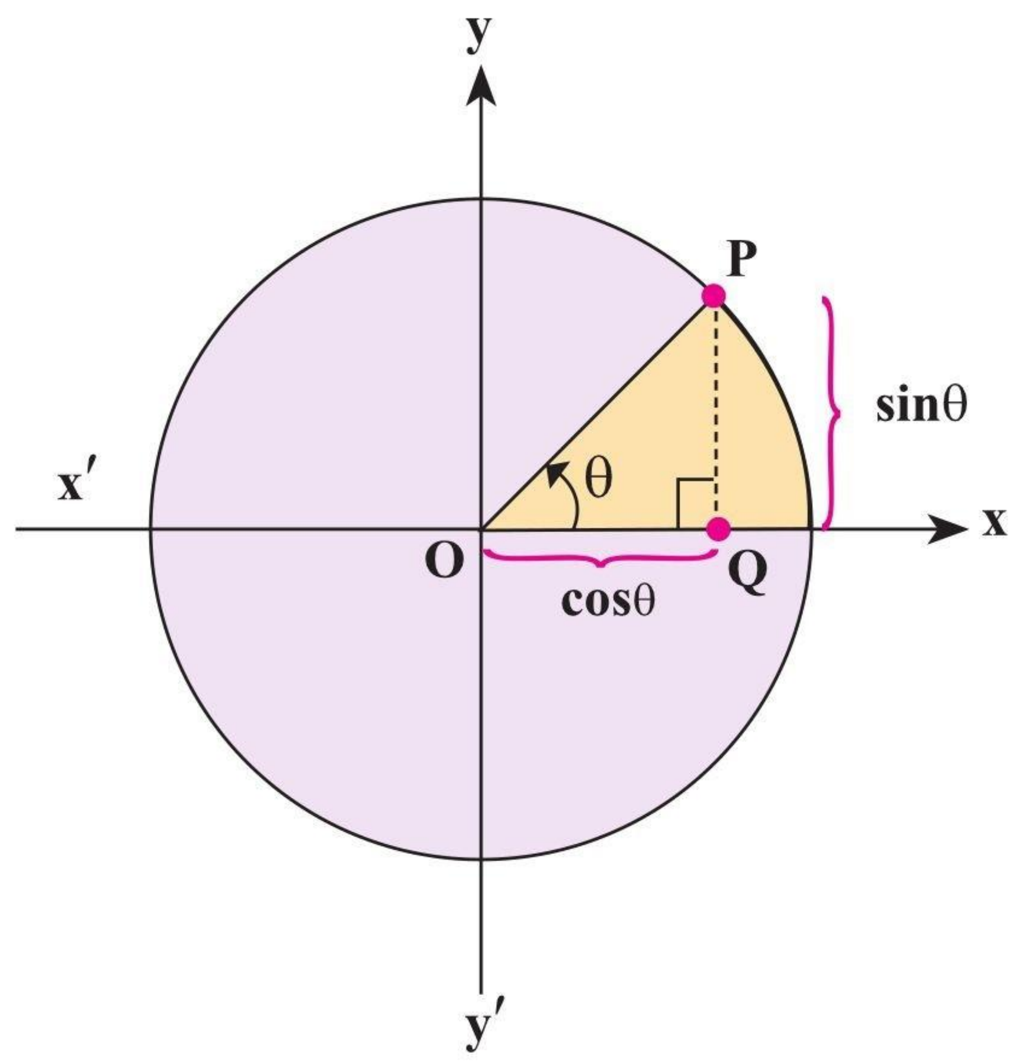
۲ فرض کنید P(x,y) نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور $\overrightarrow{Ox}$ عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.

الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.

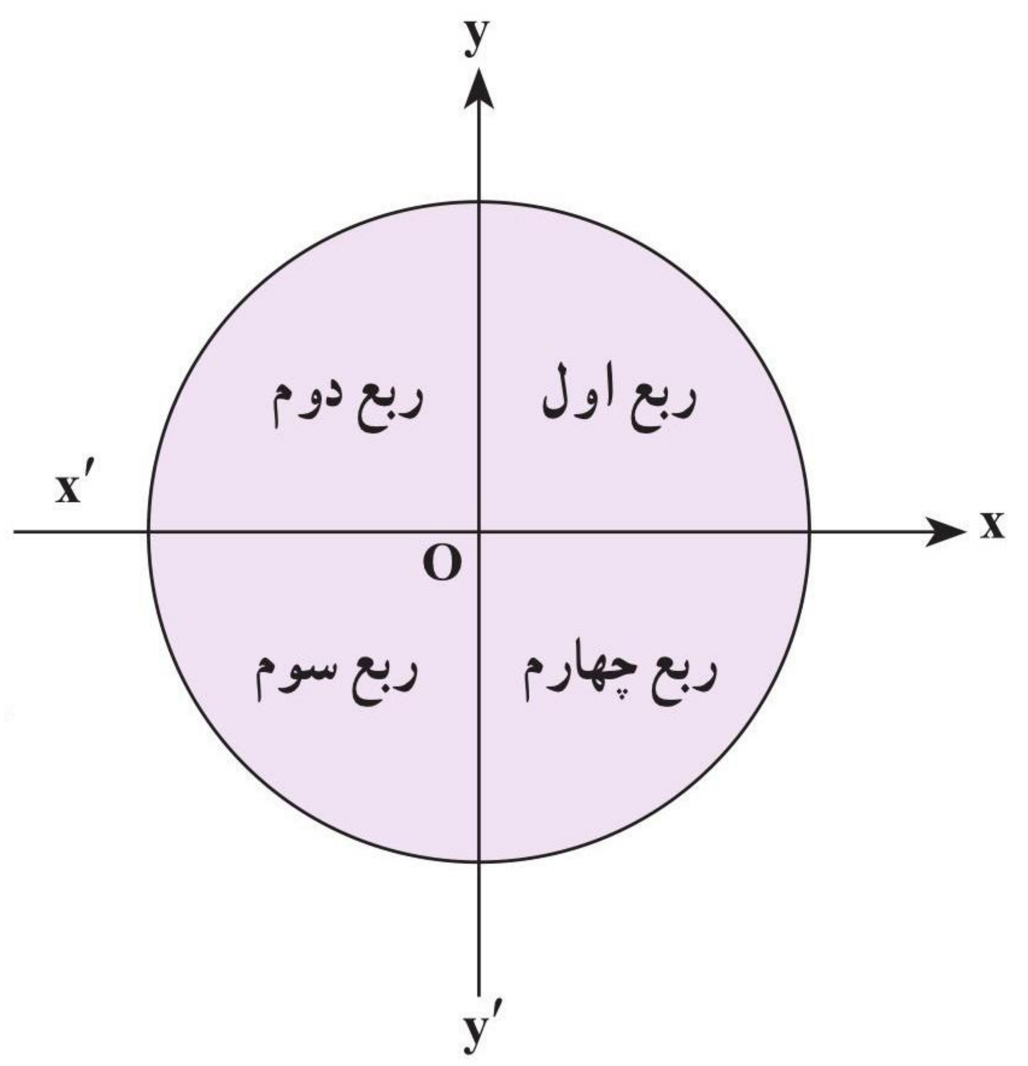


$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{۱} = OQ$ و $\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{۱} = PQ$ و $\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصلهٔ Q تا مبدأ با $\cos\theta$ برابر است و فاصلهٔ نقطهٔ P تا پای عمود، یعنی نقطهٔ Q با $\sin\theta$ برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور x′ox یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور y'oy یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. به‌عبارت دیگر، اگر P نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی باشد که نیم‌خط OP با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن x=cosθ و y=sinθ.



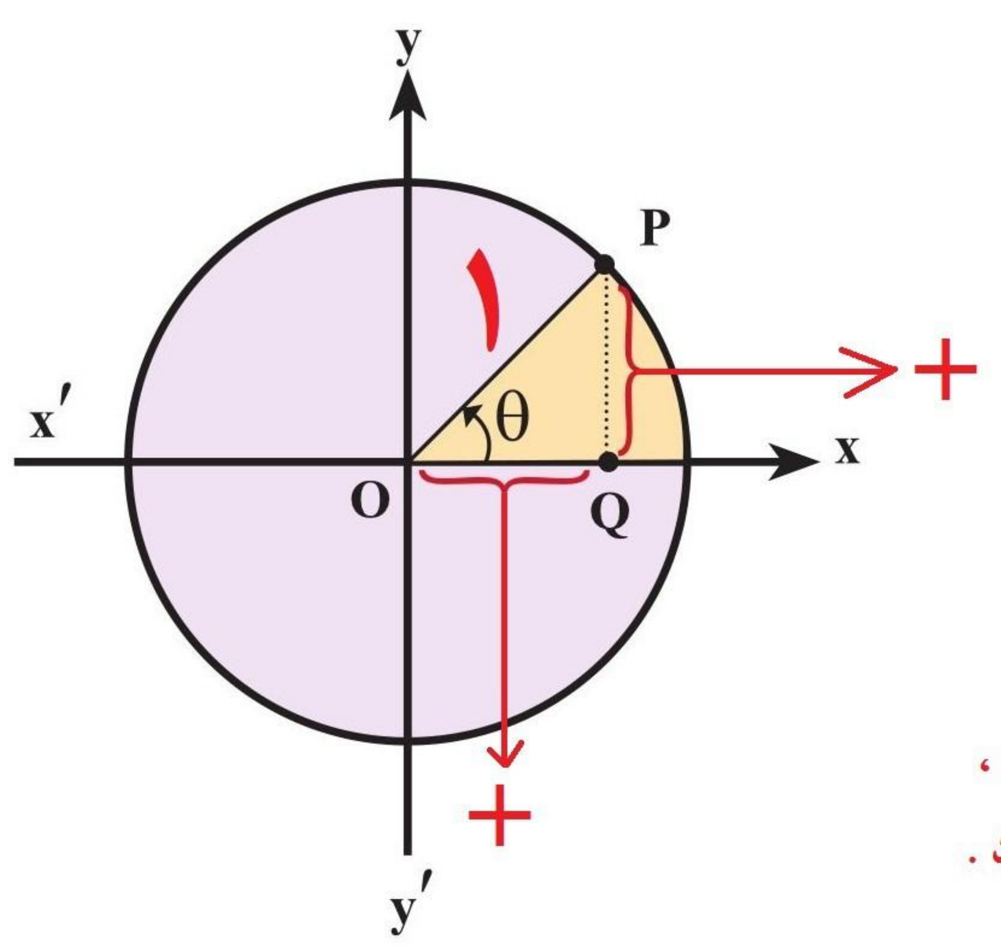
نکته : دو محور عمود بر هم x′ox و y′oy صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایرهٔ مثلثاتی، ناحیهٔ xoy را ربع اول، ناحیهٔ x′oy را ربع دوم، ناحیهٔ x′oy′ را ربع سوم و ناحیهٔ xoy′ را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

نکته : زاویه‌های ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

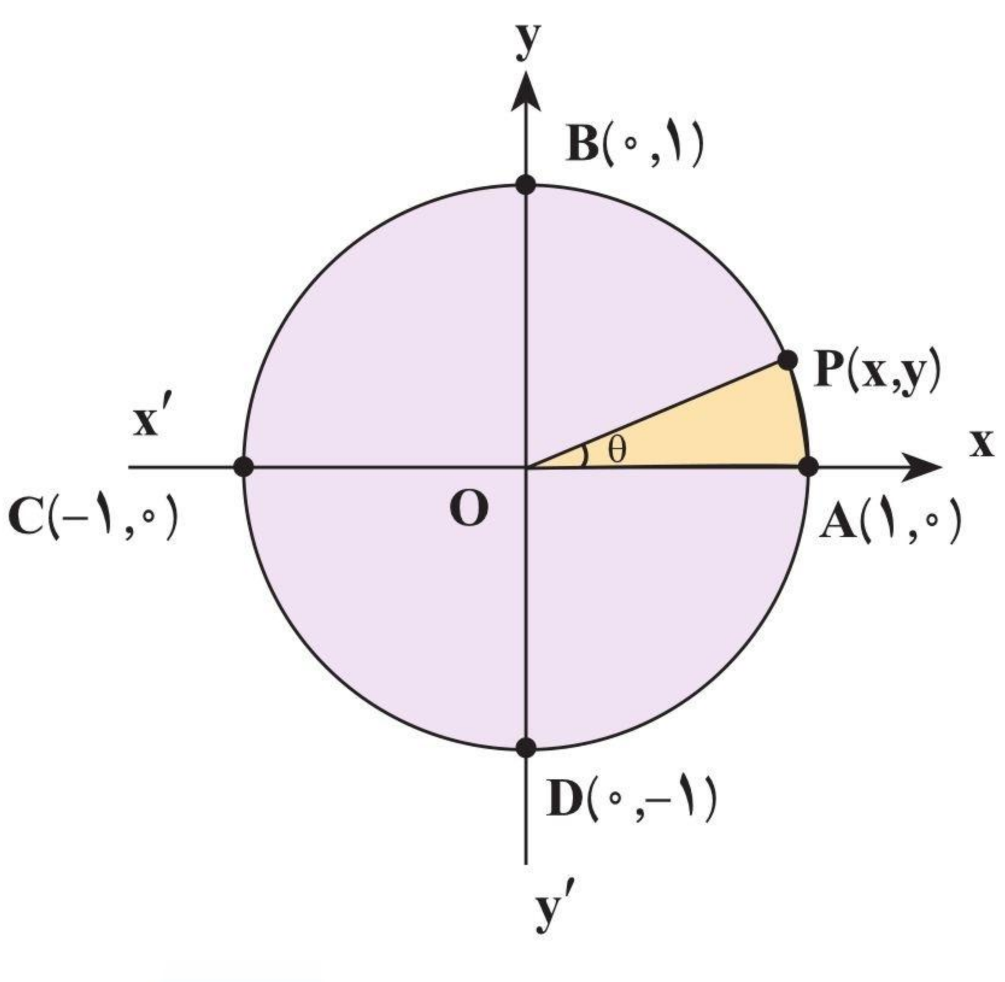
الف) -۳۰° چهارم ب) ۶۵° اول پ) ۱۸۲° سوم ت) -۹۵° سوم



۲ با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به‌دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

در ناحیه ی اول ، قسمت های مثبت دو محور مختصات وجود دارد (شکل روبرو) . و می دانیم طبق تعریف ، نسبت های مثلثاتی ، همان نسبت اندازه های مشخص شده در شکل هستند لذا همگی مثبت خواهند بود .

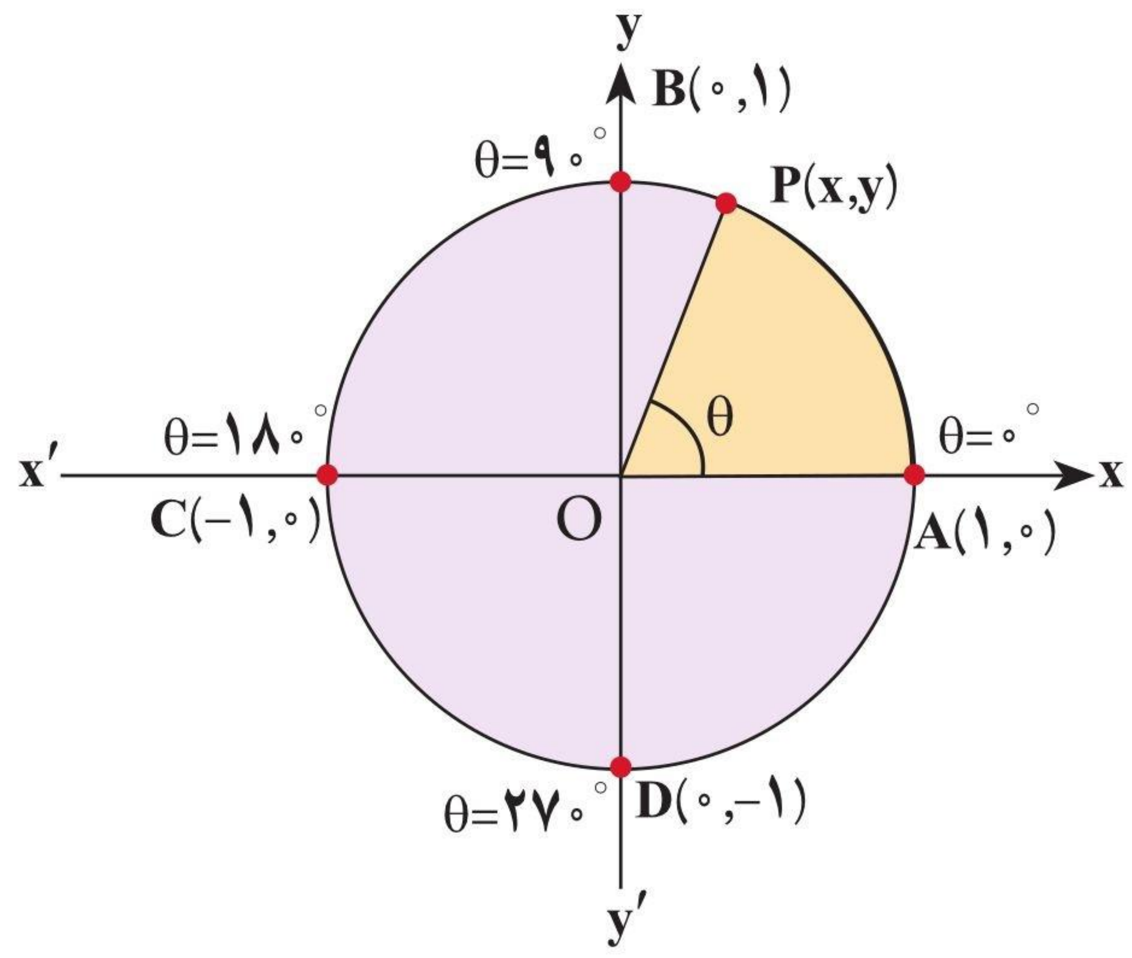
مثال



می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۰° را به‌دست آوریم. می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو، sinθ=y و cosθ=x. اگر $θ=۰^\circ$، آنگاه نقطه P روی نقطهٔ A قرار می‌گیرد و داریم $\sin ۰^\circ = ۰$، همچنین $\cos ۰^\circ = ۱$ و $\tan ۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{۰}{۱} = ۰$، اما $\cot ۰^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟).

زیرا $\cot o^\circ = \frac{x}{y} = \frac{۱}{۰}$

فعالیت



۱ در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta=90^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

90° روی نقطه ی $B(0,1)$ واقع است بنابراین: $\sin 90^\circ = y_B = 1$ و $\cos 90^\circ = x_B = 0$ و تعریف نشده $= \frac{1}{0} = \frac{y}{x} = \tan 90^\circ$

۲ اگر $\theta=180^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

180° روی نقطه ی $C(-1,0)$ واقع است بنابراین: $\sin 180^\circ = y_C = 0$ و $\cos 180^\circ = x_C = -1$ و $\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

۳ اگر $\theta=270^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

270° روی نقطه ی $D(0,-1)$ واقع است بنابراین: $\sin 270^\circ = y_D = -1$ و $\cos 270^\circ = x_D = 0$ و تعریف نشده $= \frac{-1}{0} = \frac{y}{x} = \tan 270^\circ$

کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	۰°	۹۰°		۲۷۰°	۳۶۰°
sinθ	۰	۱	۰	−۱	۰
cosθ	۱	۰	−۱	۰	۱
tanθ	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cotθ	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

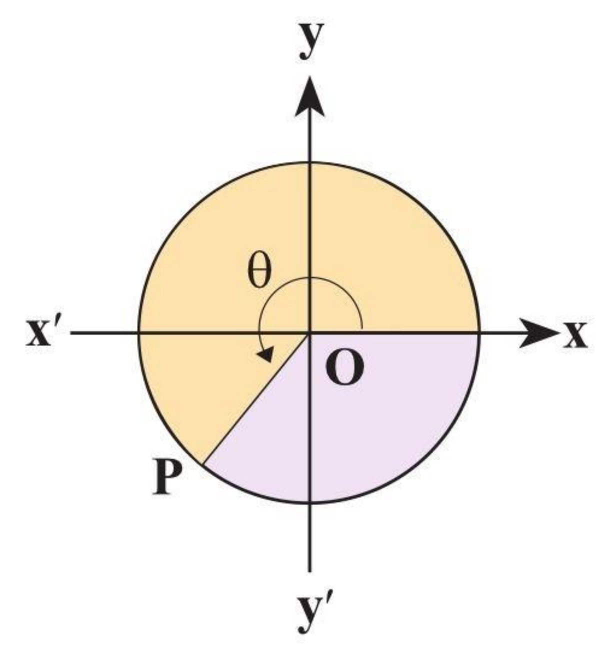
α در ربع اول است $\Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

α در ربع دوم است $\Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

α در ربع سوم است $\Rightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$

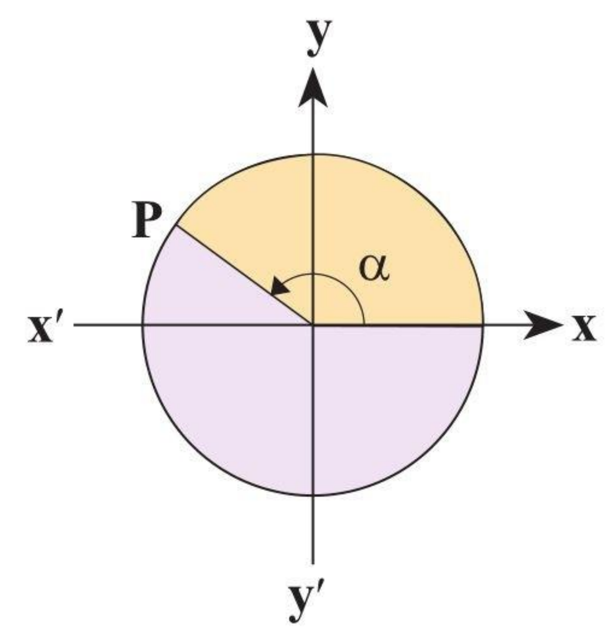
α در ربع چهارم است $\Rightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

فعالیت



۱ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه y=sinθ و x=cosθ و در ربع سوم، $x, y<0$، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

$\sin\theta < 0 \quad , \quad \cos\theta < 0 \quad , \quad \tan\theta > 0$



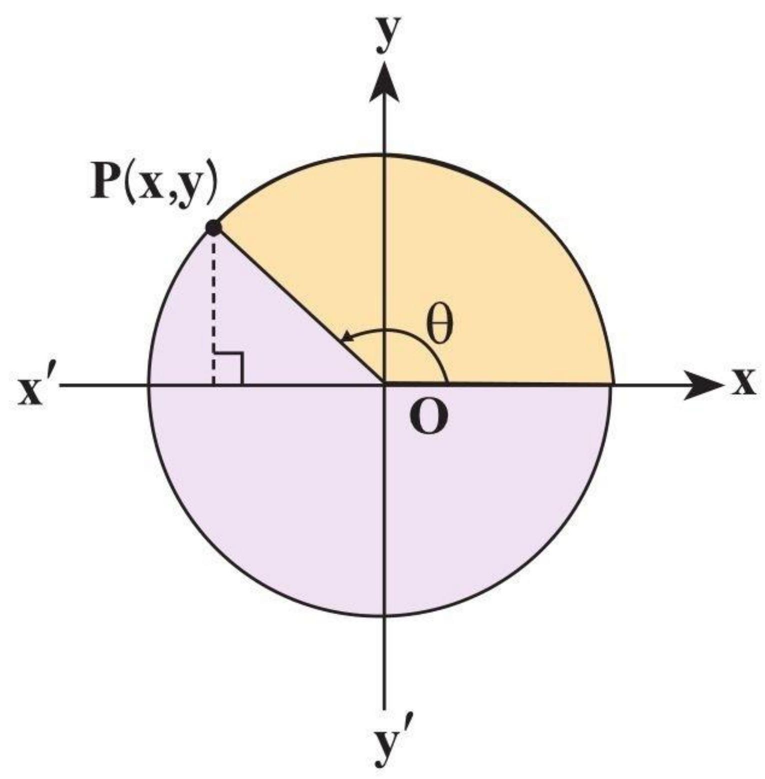
۲ فرض کنید α زاویه‌ای در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

$\sin\theta > 0 \quad , \quad \cos\theta < 0 \quad , \quad \tan\theta < 0$

۳ جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	ربع اول x,y>۰	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم ....
sinθ	+	+	−	−
cosθ	+	−	−	+
tanθ	+	−	+	−
cotθ	+	−	+	−

نکته: برای هر زاویهٔ دلخواه θ، $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$.



مثال

آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید : اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{5}{7}$ ،
آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین : می‌دانیم $\sin\theta = y = \frac{5}{7}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض ... $\frac{5}{7}$ .. است.

معلم : درست است و حالا طول نقطه P چگونه به‌دست می‌آید؟

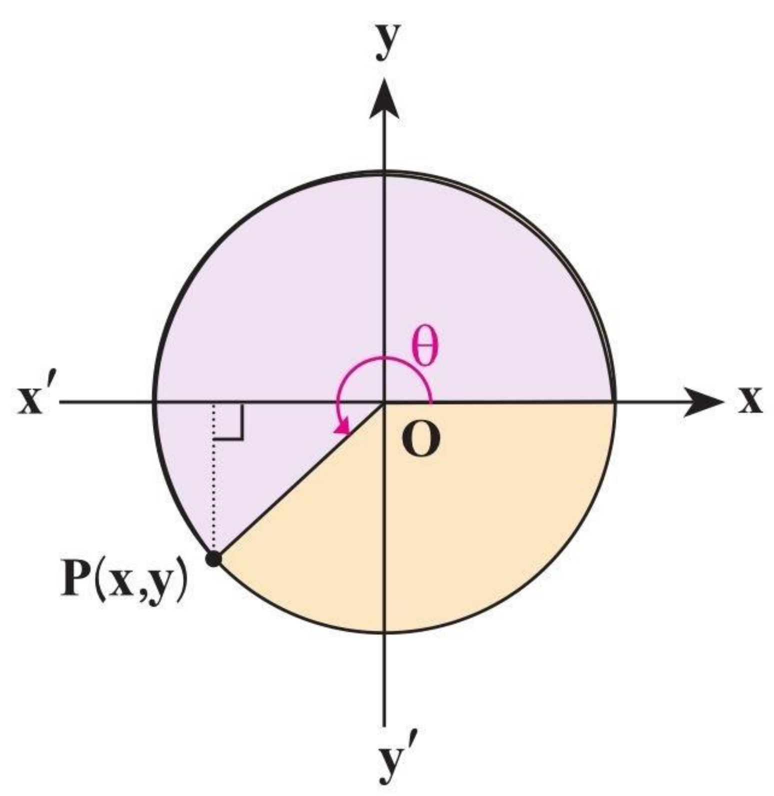
امیرعلی : طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم : $x^2+y^2=1$. بنابراین $x^2 + \frac{25}{49} = 1$ و در نتیجه $x^2 = \frac{24}{49}$. اکنون داریم $x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

معلم : آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی : چون θ زاویه‌ای در ربع ..دوم.. است، پس طول نقطهٔ P منفی است و از این‌رو $x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$ قابل قبول است.

معلم : استدلال محمدمهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات $(-\frac{2\sqrt{6}}{7} \text{ و } \frac{5}{7})$ است. در نتیجه :

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-2\sqrt{6}} \quad , \quad \cos\theta = x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$$



فعالیت

۱ فرض کنید نقطه P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری که $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y = \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

الف) مختصات نقطهٔ P را به‌دست آورید. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید. $\tan\theta = \frac{y}{x} = 1$ و $\cot\theta = \frac{x}{y} = 1$

۲ اگر $\cos\alpha = \frac{-2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

α فقط می تواند در نواحی دوم یا سوم باشد ، زیرا فقط در این نواحی کُسینوس منفی است

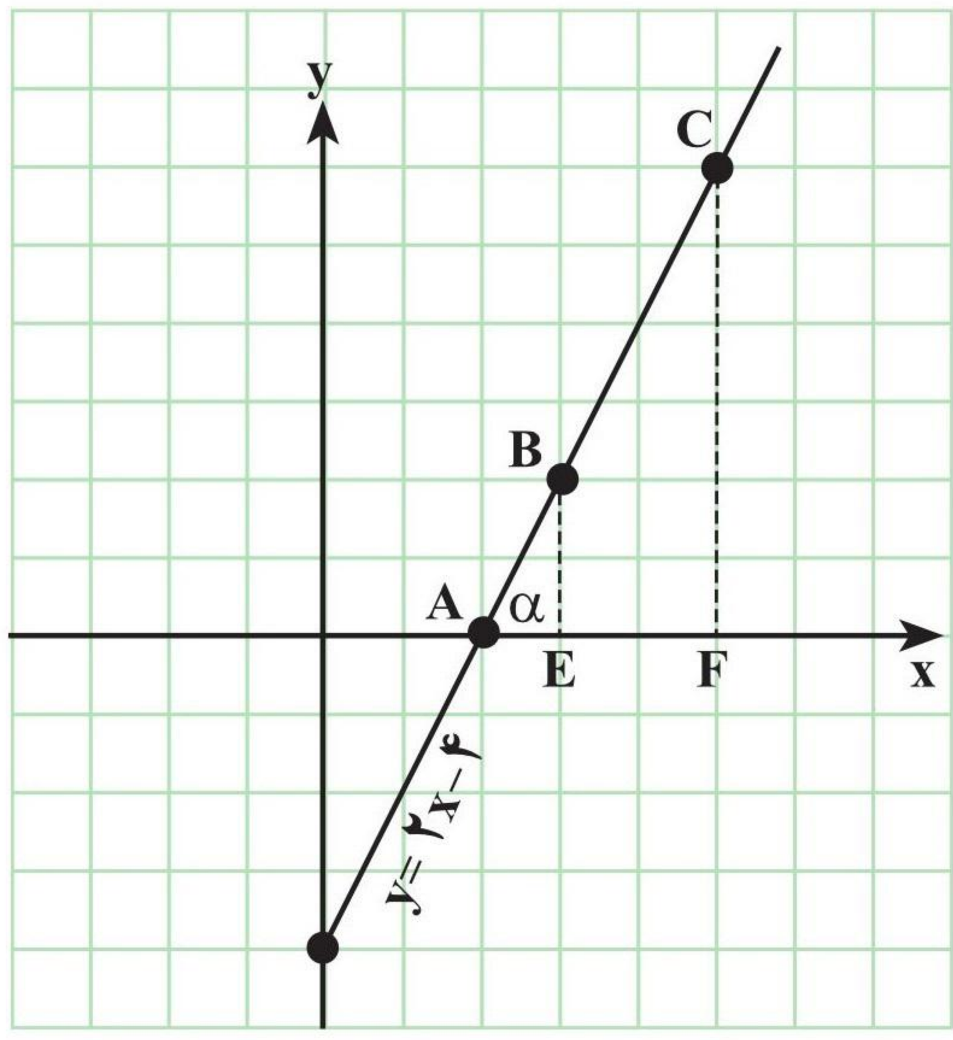
۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

این زاویه باید در ناحیه ی چهارم باشد پس هر زاویه از این ناحیه قابل قبول است به طور مثال زاویه ی ۳۰۰ درجه می تواند جواب باشد .

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت

نمودار خط $y=۲x-۴$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطهٔ B و C روی این خط را درنظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.



الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\tan\alpha=\frac{BE}{AE}=\frac{۲}{۱}=۲$$

ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$A(۲,۰)\,,\,B(۳,۲) \Rightarrow \text{شیب خط}=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{۲-۰}{۳-۲}=۲$$

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

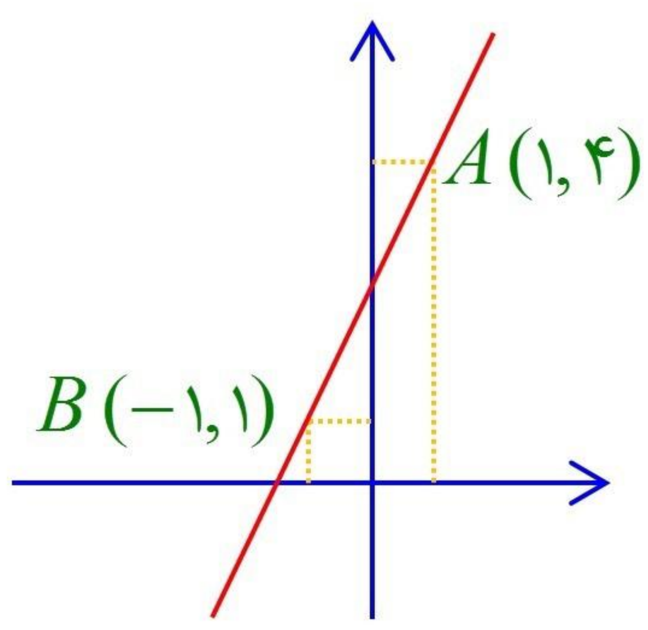
می توان نیجه گرفت تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی ، برابر شیب خط است .

> شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه :
>
> شیب خط $=\tan\alpha$

کار در کلاس

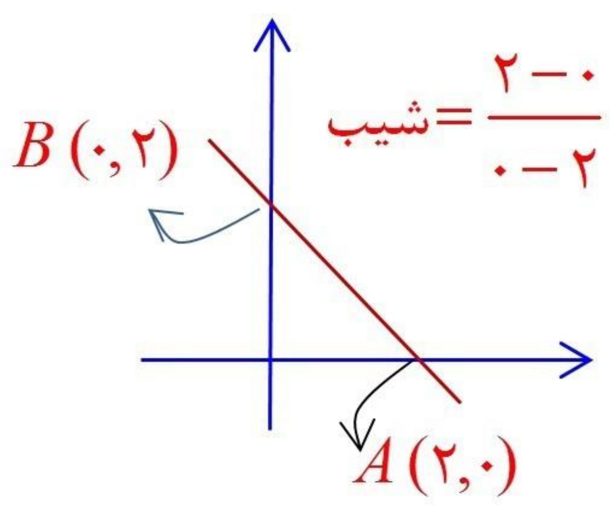
۱ فعالیت بالا را برای خط‌های زیر،تکرار کنید.

الف) $۲y-۳x=۵$



$$\text{شیب}=\frac{۴-۱}{۱-(-۱)}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

ب) $x+y=۲$



$$\text{شیب}=\frac{۲-۰}{۰-۲}=-۱\Rightarrow \tan\alpha=-۱$$

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها ۳۰° است و از نقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد.

$$m=\tan ۳۰^\circ \Rightarrow m=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

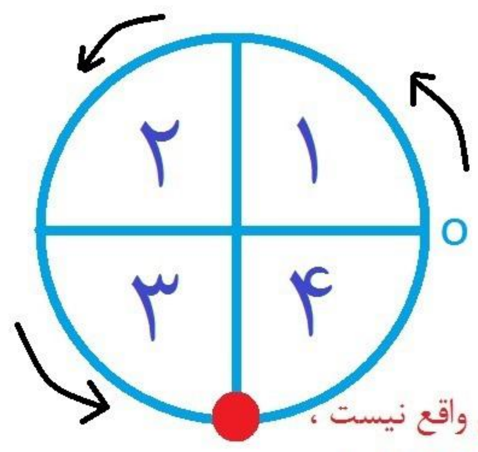
$$y=mx+h \xrightarrow{m=\frac{\sqrt{۳}}{۳}} y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+h \xrightarrow{x=۱,\,y=۰} ۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}+h \Rightarrow h=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین

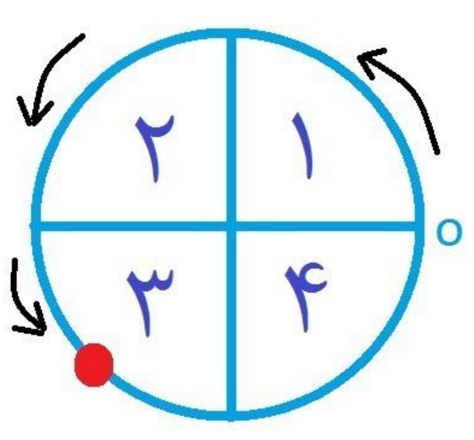
۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) $+۲۷۰^\circ$

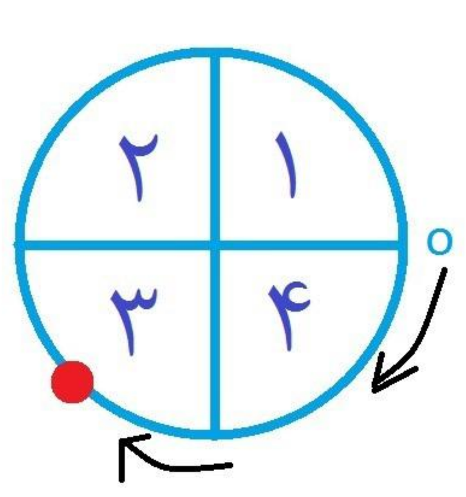


در هیچ کدام از نواحی واقع نیست ، بلکه در مرز دو ناحیه ی ۳و۴ قرار دارد

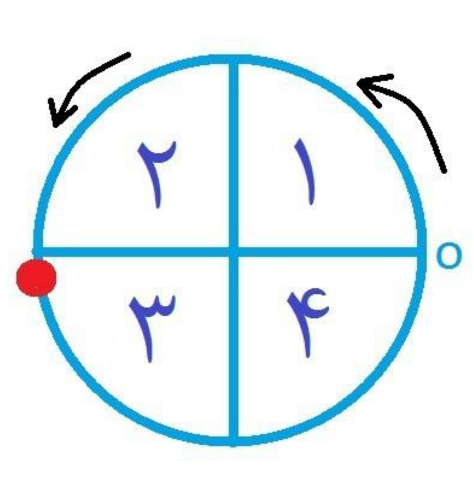
ب) ۲۲۵°



پ) -۱۳۵°



ت) ۱۸۵°



۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم)   همچون مثال صفحه ی ۳۹ عمل می کنیم :

$$x = \frac{۳}{۷} \xrightarrow{x^۲+y^۲=۱} \frac{۹}{۴۹} + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۴۰}{۴۹} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۷} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۷} \quad , \tan\alpha = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۳}$$

ب) $\sin\beta = \frac{-۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

$$y = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x^۲+y^۲=۱} x^۲ + \frac{۱}{۴} = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad , \tan\beta = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

۳ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

در صورتی که هر دو مثبت باشند ، در ربع اول ، اما اگر هر دو منفی باشند در ربع چهارم

۴ حدود زاویهٔ θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin\theta>۰ , \cos\theta>۰$ ربع اول   ب) $\sin\theta<۰ , \cos\theta>۰$ ربع چهارم

۵ اگر $\sin\alpha\times\cos\alpha<۰$، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

ضرب آنها منفی شده است ، پس دو حالت داریم :
اگر سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد ، جواب ربع دوم است .
اما در صورتی که سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد ، جواب ربع چهارم است .

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری‌که $\tan\alpha > \cot\alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری‌که $\cot\beta > \tan\beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \quad , \quad \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ > \cot ۶۰^\circ$

$\beta = ۳۰^\circ \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳} \Rightarrow \cot ۳۰^\circ > \tan ۳۰^\circ$

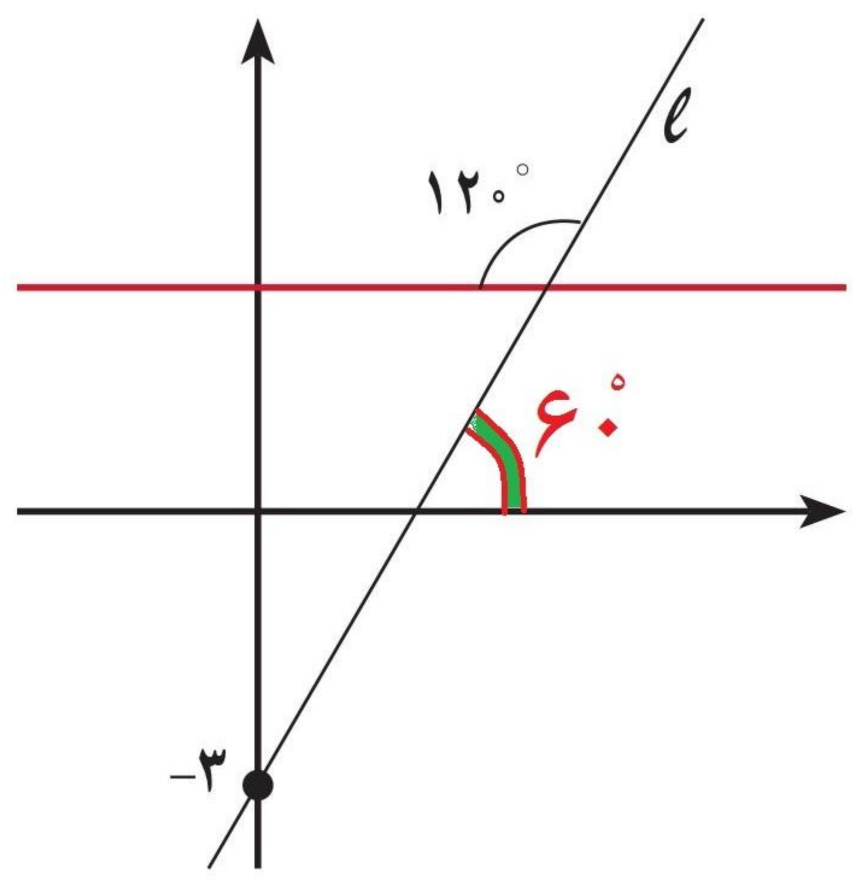
در ربع اول اگر زاویه بیشتر از ۴۵ درجه باشد ، تانژانت آن بیشتر از کتانژانت آن است . و اگر کمتر باشد ، برعکس است .

۷ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها ۴۵° است و نقطهٔ (۲,۰) روی آن قرار دارد.

$$m = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$y = mx + h \xrightarrow{m=۱} y = x + h \xrightarrow{x=۰,\, y=۲} ۲ = h \Rightarrow y = x + ۲$$

۸ با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط ℓ را به‌دست آورید.



$m = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \quad , \quad (۰,-۳)$

$y = mx + h \xrightarrow{m=\sqrt{۳}} y = \sqrt{۳}x + h$

$\xrightarrow{x=۰,\, y=-۳} -۳ = h \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۳$

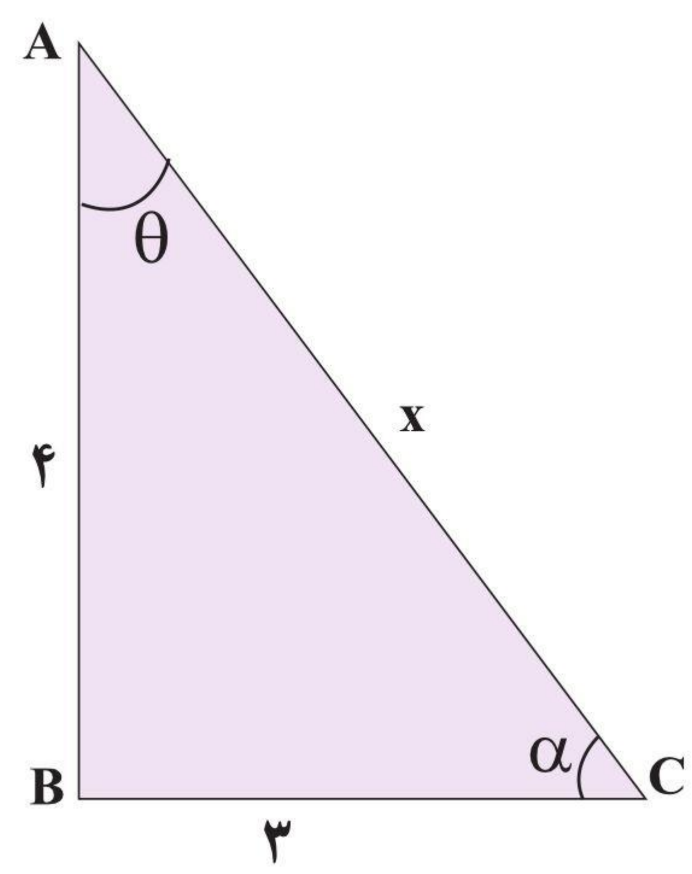
در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره بر حسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدرمطلق برابر با نصف طول وتری به‌اندازهٔ دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و وترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همین‌جا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیپارک، اخترشناس سدهٔ دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همهٔ کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً ۳۰ درجه به ۳۰ درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تانژانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به‌وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه‌نصیرالدین‌طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادلهٔ درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سدهٔ پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کنیم.

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر بگیرید.



الف اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.

$\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$

$\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$

$\cos\theta = \frac{۴}{۵}$

$\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۳}{۴}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$

$\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۴}{۳}$

ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta$ و $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$ را به‌دست آورید.

$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ و $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

$\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^۲=\sin^۲\theta$

پ درستی رابطهٔ $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^۲+(\cos\theta)^۲=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=(\frac{BC}{AC})^۲+(\frac{AB}{AC})^۲=\frac{BC^۲+AB^۲}{AC^۲}=\frac{AC^۲}{AC^۲}=۱$$

ت مشابه قسمت (پ) درستی رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ را بررسی کنید.

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=(\frac{AB}{AC})^۲+(\frac{BC}{AC})^۲=\frac{AB^۲+BC^۲}{AC^۲}=\frac{AC^۲}{AC^۲}=۱$$

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ جاهای خالی را پر کنید:

الف) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

ب) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

تذکر: در رابطه‌هایی که به‌دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویهٔ α با توجه به ناحیه‌ای که زاویهٔ α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha=\frac{-4}{5}$، آنگاه مقدار $\tan\alpha$، $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ درناحیه سوم}} \cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3} \qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به‌دست می‌آوریم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (\cos\alpha\neq 0) \quad (1)$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (\sin\alpha\neq 0) \quad (2)$$

۳ اگر $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۵}$$

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ ، $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}\ (\cos\alpha \neq ۰)$ و $۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}\ (\sin\alpha \neq ۰)$ را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک **اتحاد مثلثاتی** می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به‌طرف دیگر برسیم. به مثال زیر توجه کنید :

ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شبانه‌روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایهٔ میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

مثال

درستیِ اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta\right)(۱ - \sin\theta) = \cos\theta$$

$$(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta) \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=\!=} ۱ - \sin^۲\theta = \cos^۲\theta$$

حل :

$$\text{طرف چپ} = \left(\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta\right)(۱ - \sin\theta) = \left(\frac{۱}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(۱ - \sin\theta)$$

$$= \left(\frac{۱ + \sin\theta}{\cos\theta}\right)(۱ - \sin\theta) = \frac{۱ - \sin^۲\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta} = \cos\theta = \text{طرف راست}$$

کار در کلاس

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$

$$\text{طرف چپ} = \sin^۴\theta - \cos^۴\theta \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=\!=} (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) \times (\sin^۲\theta + \cos^۲\theta) = (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) \times ۱ = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$$

ب) $\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

طرف راست $=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}+\cot\alpha=\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha$

۲ کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin\alpha\cos\alpha$

$\alpha=۳۰^\circ \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^۴+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴=۱-۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\frac{۹}{۱۶}=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow$ تساوی صحیح نیست

ب) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

$\alpha=۳۰^\circ \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^۴+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴=۱-۲\times(\frac{۱}{۲})^۲\times(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\frac{۹}{۱۶}=۱-\frac{۶}{۱۶}\Rightarrow$ تساوی صحیح است

حال باید درستی آن را در حالت کلی اثبات نماییم :

$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=(\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

۳ با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید.

$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\xrightarrow{\times\cot\alpha}\cot\alpha+\cot\alpha\tan^۲\alpha=\cot\alpha\times\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cot\alpha+\underbrace{\cot\alpha\tan\alpha}_{۱}\tan\alpha=\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\sin\alpha}\times\frac{۱}{\cos^{\cancel{۲}}\alpha}\Rightarrow\boxed{\cot\alpha+\tan\alpha=\frac{۱}{\sin\alpha.\cos\alpha}}$

تمرین

۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۴}{۵}\div\frac{-۳}{۵}=\frac{۴}{۵}\times\frac{-۵}{۳}=-\frac{۴}{۳}$

۲ اگر $\tan\alpha=\frac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha=۱+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ و $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{-۴}{۳}\times\frac{۳}{۵}=-\frac{۴}{۵}$

۳ اگر $\sin۱۳۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به‌دست آورید.

$\cos^۲۱۳۵^\circ=۱-\sin^۲۱۳۵^\circ=۱-\frac{۲}{۴}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow\cos۱۳۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\tan۱۳۵^\circ=\frac{\sin۱۳۵^\circ}{\cos۱۳۵^\circ}=\frac{\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}{-\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=-۱$

۴ اگر $\tan۲۴۰^\circ=\sqrt{۳}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ ۲۴۰° را به‌دست آورید.

$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha=۱+۳=۴\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۱}{۲}$ و $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\sqrt{۳}\times\frac{-۱}{۲}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

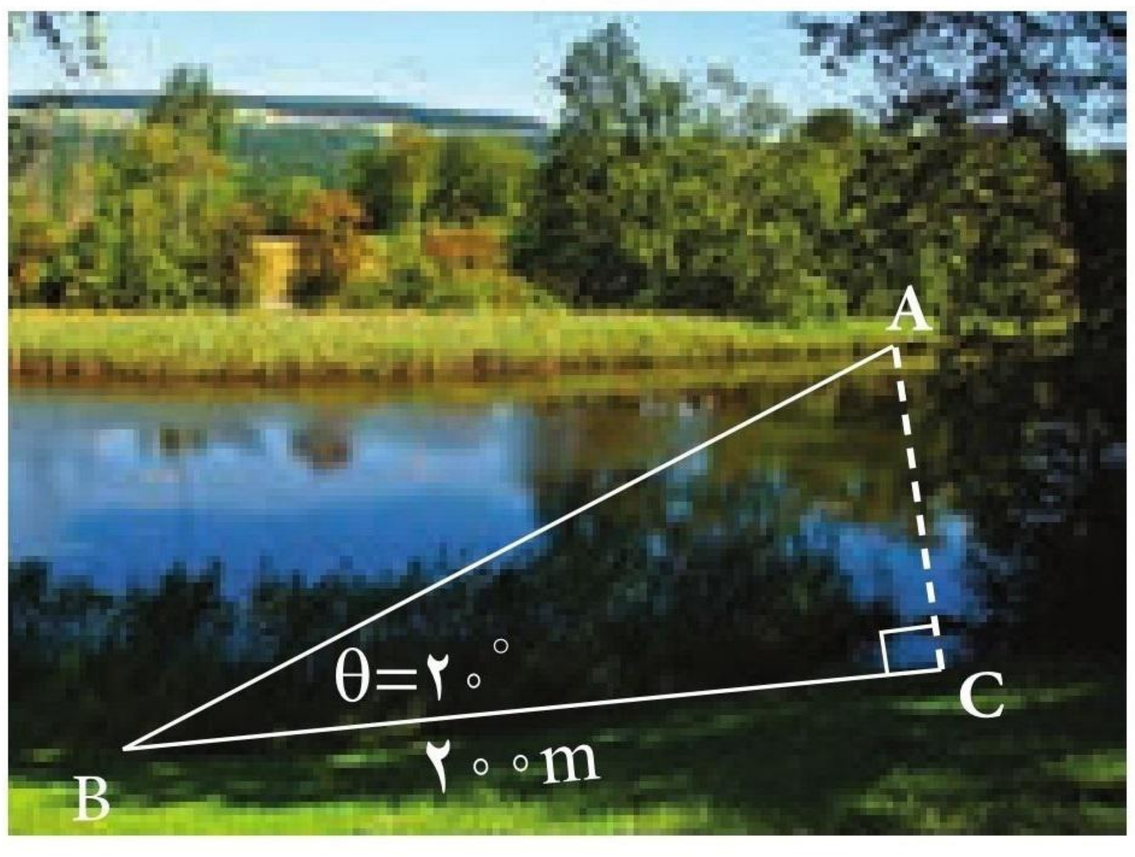
۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به‌صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد. اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A)، ۲۰° باشد و $\sin۲۰^\circ\simeq۰/۳۴$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)

$\cos^۲۲۰^\circ=۱-\sin^۲۲۰^\circ=۱-۰/۱۱۵۶=۰/۸۸۴۴\Rightarrow\cos۲۰^\circ=۰/۹۴۰۴$

$\tan۲۰^\circ=\frac{\sin۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\frac{۰/۳۴}{۰/۹۴۰۴}=۰/۳۶۱۵$

$\tan۲۰^\circ=\frac{AC}{BC}\Rightarrow۰/۳۶۱۵=\frac{AC}{۲۰۰}\Rightarrow AC=۷۲/۳$

البته روش های متفاوتی برای حل این سوال وجود دارد . و ممکن است جواب های بدست آمده با توجه به میزان دقت ، با هم تفاوت داشته باشند .



۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$

$$\text{چپ}=\frac{۱}{\cancel{\sin\theta}}\times\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta}=\frac{۱}{\cos\theta}$$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\text{چپ}=\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{۱-\sin^{۲}\theta}=\frac{\cancel{\cos\theta}(۱-\sin\theta)}{\cos^{\cancel{۲}}\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

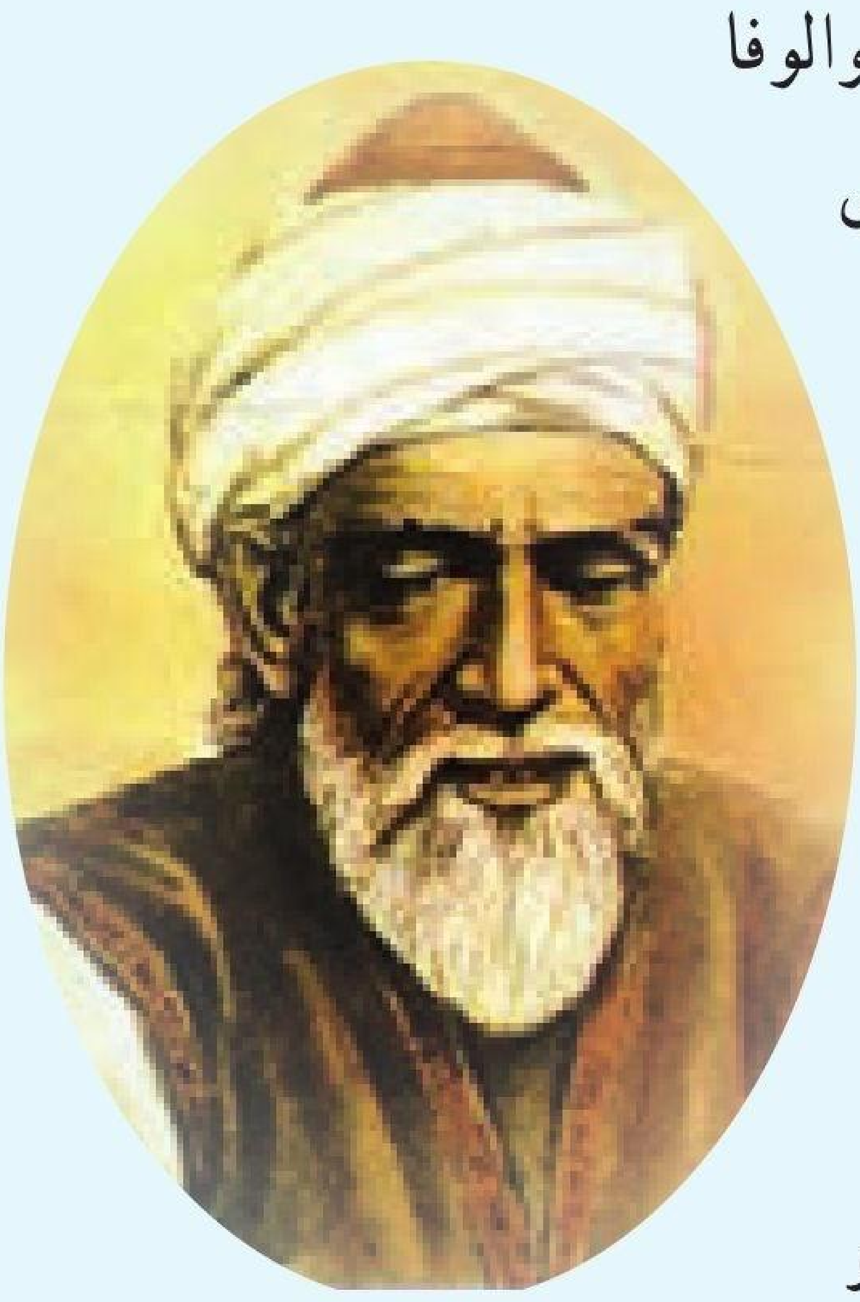
$$\text{چپ}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\frac{۱}{\tan\alpha}}=\frac{\tan\alpha\,\cancel{(۱+\tan\alpha)}}{\cancel{\tan\alpha+۱}}=\tan\alpha$$

ت) $۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\sin x$

$$\text{چپ}=۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=۱-\frac{۱-\sin^{۲}x}{۱+\sin x}=۱-\frac{(۱-\sin x)\cancel{(۱+\sin x)}}{\cancel{۱+\sin x}}=۱-۱+\sin x=\sin x$$

ث) $\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

$$\text{چپ}=\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}=\frac{۱-\sin^{۲}x}{\cos x\,(۱+\sin x)}=\frac{\cos^{\cancel{۲}}x}{\cancel{\cos x}\,(۱+\sin x)}=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$$



اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (هـ.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (هـ.ق) در بغداد درگذشت.