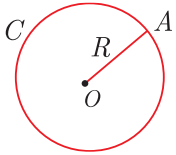




### مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

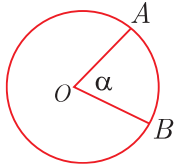
#### تعریف دایره:

دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابتی قرار داشته باشند.



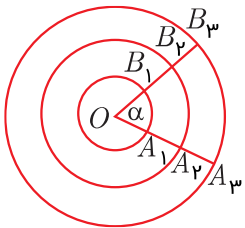
#### اندازه کمان

طبق قرارداد، اندازه کمان در دایره، برابر با اندازه روبروی آن کمان است.

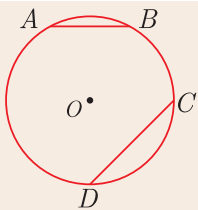


#### طول کمان

اندازه یک کمان را نباید با طول آن کمان اشتباه کرد!



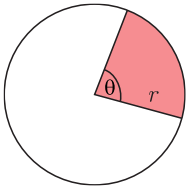
در دایره  $(O, R)$  دو وتر  $AB = R$  و  $CD = \sqrt{2}R$  رسم شده‌اند. مجموع اندازه دو کمان  $BC$  و  $AD$  کدام است؟



- (۱) ۲۱۰
- (۲) ۱۵۰
- (۳) ۱۸۰
- (۴) ۲۴۰

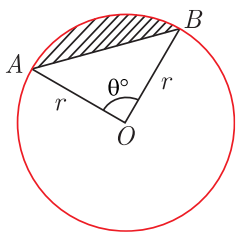
#### قطاع

قسمتی از دایره که بین دو شعاع از دایره محدود شده است.



#### قطعه

قسمتی از دایره که به کمان و وتر نظیرش محدود شده است.



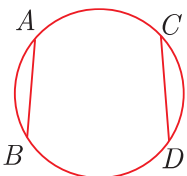
مساحت قطعه رنگی در شکل مقابل چقدر است؟



- (۱)  $8\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)$
- (۲)  $2\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)$
- (۳)  $4\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)$
- (۴)  $2\left(\frac{\pi}{6} - 1\right)$

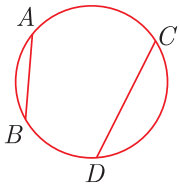
#### خواص وترهای دایره

در هر دایره کمان‌های نظیر وترهای مساوی با یکدیگر برابرند و برعکس.

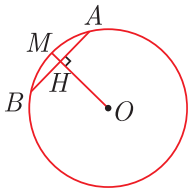




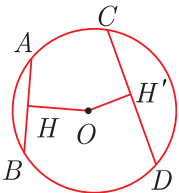
در هر دایره اگر دو وتر نامساوی باشند، کمان نظیر وتر بزرگتر، بزرگتر است و برعکس.



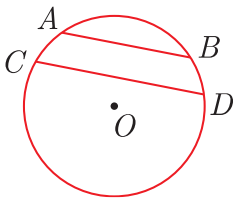
در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند.



در هر دایره با دو وتر نامساوی، فاصله مرکز از وتر بزرگتر، کوچکتر از فاصله آن از وتر کوچکتر است و برعکس.



در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، برابرند و برعکس.



فاصله مرکز دایره از دو وتر به طول‌های  $AB = 2x + 9$  و  $CD = 15 - x$  به ترتیب ۴ و ۵ واحد است.  $x$  چند مقدار طبیعی می‌تواند داشته باشد؟

۱۴ (۴)

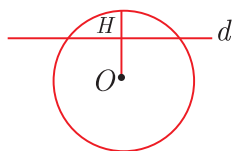
۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

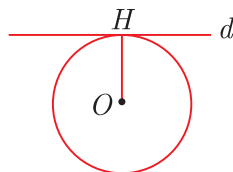
۱۰ (۱)

### اوضاع نسبی خط و دایره

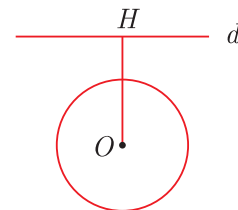
خط  $d$  و دایره  $C(O, R)$  در یک صفحه نسبت به هم سه وضع دارند.



$OH < R$



$OH = R$



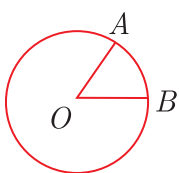
$OH > R$

خط مماس در نقطه تماس!!!

### زاویه‌ها در دایره

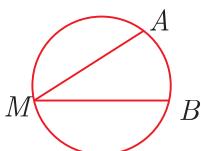
۱. زاویه مرکزی

زاویه‌ای که راس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌هایی از دایره است.



۲. زاویه محاطی

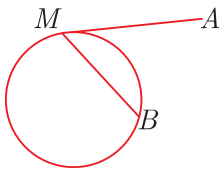
زاویه‌ای که راس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهایی از دایره است.



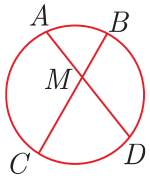


۳. زاویه ظلی

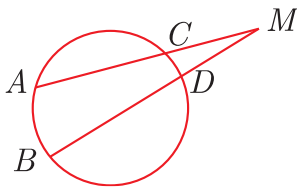
زاویه‌ای که راس آن روی محیط دایره و یک ضلعش وتر و دیگری بر دایره مماس است.



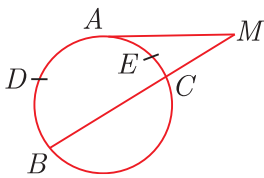
۴. زاویه حاصل از برخورد دو وتر درون دایره



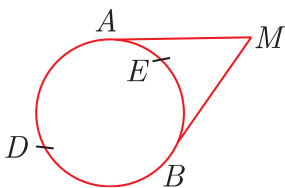
۵. زاویه حاصل از برخورد دو وتر خارج دایره



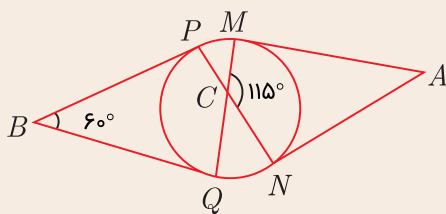
۶. زاویه بین مماس و قاطع بر دایره



۷. زاویه بین دو مماس بر دایره



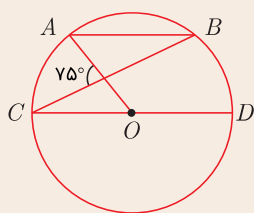
پاره‌خط‌های  $AM$  و  $AN$  و  $BP$  و  $BQ$  مطابق شکل زیر بر دایره مماس‌اند.



زاویه  $A$  چند درجه است؟ (ریاضی ۱۴۰۰ خارج)

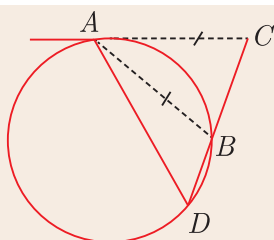
- ۶۰ (۱)
- ۶۵ (۲)
- ۷۰ (۳)
- ۷۵ (۴)

در دایره  $C(O, R)$  داریم  $AB \parallel CD$  اندازه کمان  $AB$  چند درجه است؟



- ۵۰ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۷۰ (۳)
- ۸۰ (۴)

در شکل زیر اندازه قطعه مماس  $AC$  برابر وتر  $AB$  است. الزاماً کدام برابری درست است؟ (ریاضی ۹۹)



- $BC = BA$  (۱)
- $BD = AC$  (۲)
- $BC = BD$  (۳)
- $DA = DC$  (۴)



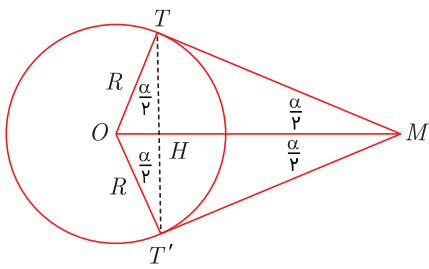
روابط طولی در دایره



مماس بر دایره :



اگر از نقطه  $M$  خارج دایره دو مماس بر آن رسم کنیم آن گاه



وضعیت دو دایره و مماس مشترک‌ها

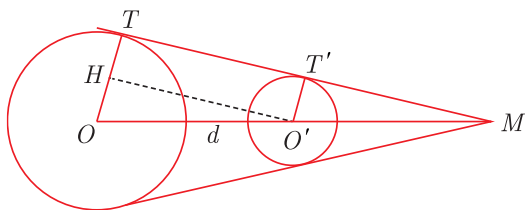


تعداد م.م داخلی	تعداد م.م خارجی	شرط	شکل	وضعیت نسبی
				متخارج
				مماس خارج
				مقاطع
				مماس داخل
				متداخل



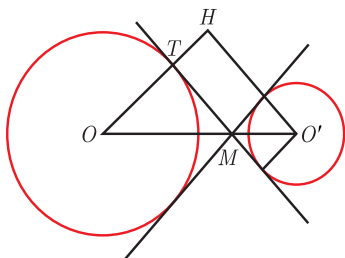
### اندازه مماس مشترک و زاویه بین آن‌ها

۱. مماس مشترک خارجی:



طول مماس مشترک خارجی دو دایره در حالتی که مماس بیرونی هستند \_\_\_\_\_ .

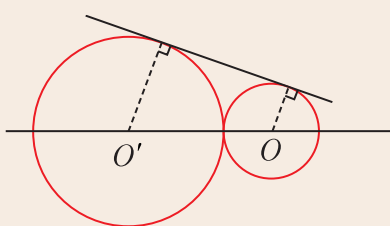
۲. مماس مشترک داخلی:



✓= دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس بر هم هستند. دایره‌ای به قطر  $OO'$  با

مماس مشترک خارجی در نقطه تماس  $M$  مشترک است. فاصله  $M$  از نقطه تماس

دو دایره کدام است؟ (ریاضی ۹۸ خارج)



۶ (۱)      ۶٫۵ (۲)

۷ (۳)      ۷٫۵ (۴)

✓= از نقطه  $M$  واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس  $MA$  و  $MB$  بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه  $M$  تا

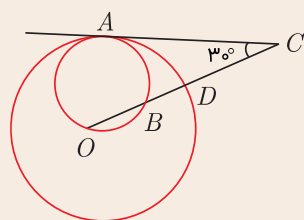
نزدیکترین نقاط دایره  $(\sqrt{2} - 1)$  باشد، فاصله مرکز دایره از وتر  $AB$  کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱)  $\sqrt{2}$       ۲) ۳      ۳)  $2\sqrt{2}$       ۴) ۲

✓= در شکل زیر پاره خط  $AC$  و دایره کوچک، در نقطه  $A$  بر دایره بزرگ به

شعاع ۶ و مرکز  $O$  واقع بر محیط دایره کوچک مماس‌اند. طول پاره خط  $BD$

کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰ خارج)

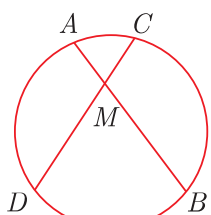


۴ (۱)      ۳ (۲)

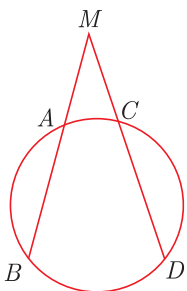
$\sqrt{6}$  (۳)      ۲ (۴)

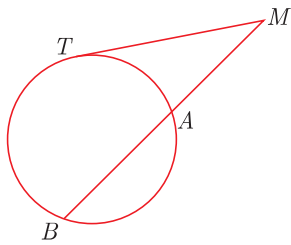
### رابطه طولی در دایره

اگر دو وتر دل‌خواه  $AB$  و  $CD$  در نقطه  $M$  داخل دایره  $(O, R)$  متقاطع باشند، داریم:



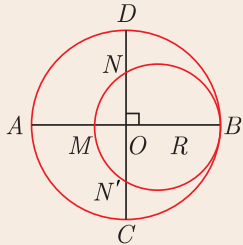
اگر دو وتر دل‌خواه  $AB$  و  $CD$  در نقطه  $M$  بیرون دایره  $(O, R)$  متقاطع باشند، داریم:





اگر از نقطه  $M$  خارج دایره  $C(O, R)$  مماس و قاطعی بر دایره رسم کنیم، داریم:

در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و قطرهای  $AB$  و  $CD$  از دایره بزرگتر بر هم عمود هستند.



اگر  $AM = 16$  و  $DN = 10$  باشد، شعاع دایره کوچکتر کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰ خارج)

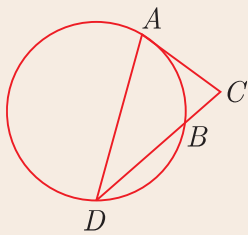
۱۲ (۱)

۱۶ (۲)

۱۷ (۳)

۲۵ (۴)

در شکل مقابل، پاره خط  $AC$  بر دایره مماس است. اگر  $\frac{CA}{CB} = \sqrt{3}$ ، آن گاه نسبت



کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

$\sqrt{3}$  (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

۳ (۴)

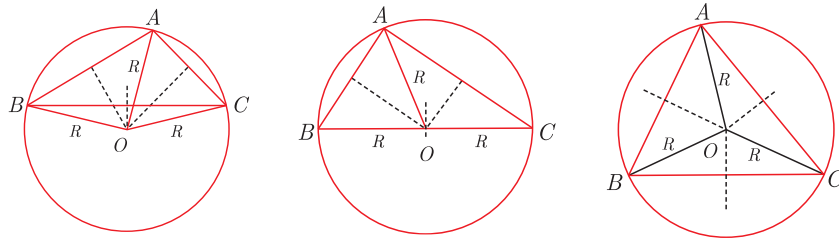
۲ (۳)



### چندضلعی‌های محیطی و محاطی

#### دایره محیطی مثلث

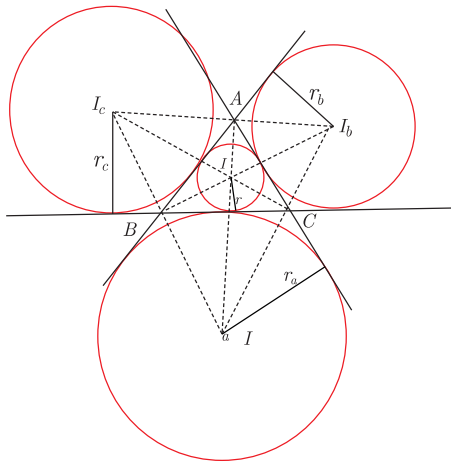
دایره‌ای است که از سه رأس مثلث می‌گذرد. مرکز آن محل برخورد عمودمنصف‌ها می‌باشد:



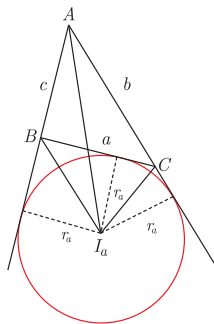
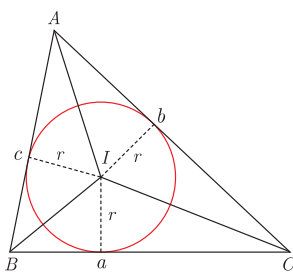
#### شعاع دایره محیطی مثلث

#### دایره محاطی داخلی و خارجی مثلث

دایره‌ای است که بر اضلاع مثلث یا امتداد آن‌ها مماس است، هر مثلث دارای یک دایره محاطی داخلی است، که مرکز آن محل برخورد نیمسازهای داخلی و دارای سه دایره محاطی خارجی است که مرکز آن محل هم‌رسی دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی رأس سوم است.



#### شعاع دایره محاطی مثلث



#### شعاع دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه

#### شعاع دایره محاطی و محیطی مثلث متساوی الاضلاع



✓= در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول یک ضلع قائم ۸ و شعاع دایره محاطی داخلی آن ۳ واحد است. اندازه وتر این مثلث کدام است؟ (ریاضی ۹۶ خارج)

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

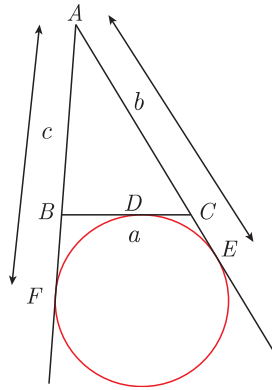
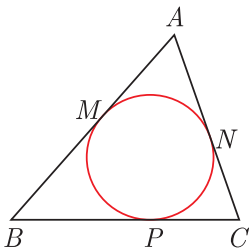
۱۵ (۱)

✓= در مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  به طول ضلع  $a$ ، اگر  $O$  مرکز دایره محاطی داخلی مثلث و  $O'$  مرکز دایره محاطی خارجی مثلث باشد، اندازه  $OO'$  چند برابر  $a\sqrt{3}$  است؟

 $\frac{8}{3}$  (۴) $\frac{1}{3}$  (۳) $\frac{2}{3}$  (۲) $\frac{4}{3}$  (۱)

### روابط مربوط به شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی

محاسبه فاصله رئوس مثلث تا نقاط تماس دایره محاطی با اضلاع نظیر:



✓= در مثلث  $ABC$  با اضلاع  $AB = 5$  و  $AC = 7$  و  $BC = 8$ ، نیمساز داخلی زاویه  $A$  نیمسازهای زاویه داخلی و خارجی  $B$  را در  $O$  و  $O'$  قطع می‌کند. اندازه تصویر قائم  $OO'$  روی  $BC$  کدام است؟ (ریاضی ۹۸ خارج)

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

✓= دایره محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۸ و ۹ و ۱۳، در نقطه تماس، کوچکترین ضلع را به دو قطعه تقسیم می‌کند، نسبت آن دو قطعه کدام است؟ (ریاضی ۸۶ خارج)

 $\frac{2}{3}$  (۴) $\frac{3}{7}$  (۳) $\frac{2}{5}$  (۲) $\frac{1}{3}$  (۱)

### چندضلعی محاطی

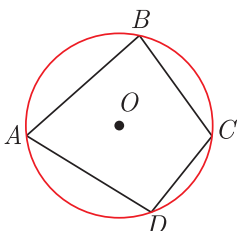
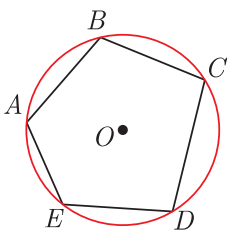
چندضلعی است که همه رأس هایش روی یک دایره باشند.

نقطه  $O$  محل تلاقی عمود منصف‌های اضلاع است، بنابراین:

«شرط محاطی بودن یک چند ضلعی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع است.»

### چهارضلعی محاطی

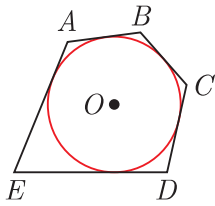
در هر چهارضلعی محاطی زوایای مقابل مکمل یکدیگرند و برعکس.





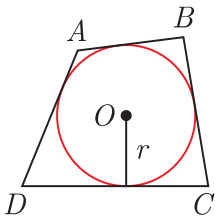


## چندضلعی محیطی



چندضلعی است که همه اضلاعش بر یک دایره مماس باشند.  
نقطه  $O$  محل تلاقی نیمسازهای زوایا است، بنابراین:  
شرط محیطی بودن یک چندضلعی هم‌رسی نیمسازهای زوایای چندضلعی است.

## چهارضلعی‌های محیطی



در هر چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع روبه‌رو با یکدیگر برابر است.

مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با:

اشکال هندسی از نظر محاطی و محیطی بودن		
محیطی	محاطی	شکل هندسی
		مثلث
		متوازی الاضلاع
		مستطیل
		لوزی
		مربع
		کایت
		چندضلعی منتظم
		دوزنقه
		دوزنقه متساوی الساقین

## شعاع دایره محاطی و محیطی چندضلعی منتظم

## دوزنقه متساوی الساقین محیطی (بسیار مهم!!!)

✓= یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های  $\frac{9}{3}$  و ۸ بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله دورترین نقاط دایره تا یک راس

قاعده بزرگ دوزنقه کدام است؟ (ریاضی ۹۹ خارج)

۷/۵ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۹ (۱)