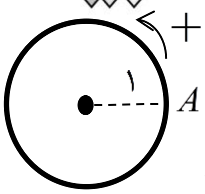
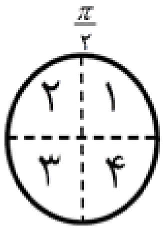
دایره ی مثلثاتی



معرفی دایره ی مثلثاتی : دایره ای به شعاع واحد ، دارای مبدا حرکتی (نقطه یA) و جهت دار ، که جهت مثبت آن خلاف حرکت عقربه های ساعت است ، را دایره ی مثلثاتی نامند . (شکل روبرو)

دایره ی مثلثاتی را مطابق شکل روبرو به چهار قسمت تقسیم می کنیم و هر قسمت

π فرد $\longleftarrow \cdots, \pm ۵\pi, \pm ۳\pi, \pm\pi$



$۰, \pm ۲\pi, \pm ۴\pi, \cdots \longrightarrow$ زوج π

را یک ناحیه می نامیم . هر ناحیه تحت زاویه ی $\frac{\pi}{۲}$ (۹۰درجه) ساخته می شود .

مثال : ناحیه ی مربوط به هر زاویه را مشخص کنید .

الف) $a = ۷۰^\circ \rightarrow$ ناحیه ی اول

ب) $b = -\frac{\pi}{۶} \rightarrow$ ناحیه ی چهارم

پ) $c = ۷\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow$ ناحیه ی سوم

ت) $d = ۱۶\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۷} \rightarrow$ ناحیه ی دوم

ث) $e = \frac{۱۱\pi}{۲} - \frac{\pi}{۵} \rightarrow e = \frac{۱۰\pi + \pi}{۲} - \frac{\pi}{۵} = ۵\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۵} \rightarrow$ ناحیه ی سوم

ج) $f = \frac{۱۳\pi}{۳} \rightarrow f = \frac{۱۲\pi + \pi}{۳} = ۴\pi + \frac{\pi}{۳} \rightarrow$ ناحیه ی اول

چ) $g = -\frac{۶۲\pi}{۳} \rightarrow g = -\frac{۶۳\pi - \pi}{۳} = -۲۱\pi + \frac{\pi}{۳} \rightarrow$ ناحیه ی سوم

ح) $h = ۸۴۰^\circ \rightarrow h = ۹\frac{\pi}{۲} + ۳۰^\circ = ۴\pi + \frac{\pi}{۲} + ۳۰^\circ \rightarrow$ ناحیه دوم

$\begin{array}{r|l} ۸۴۰ & ۹۰ \\ \underline{۸۱۰} & ۹ \\ ۳۰ & \end{array} \Rightarrow ۹ \times ۹۰ + ۳۰$

خ) $k = -۱۸۴۵^\circ \rightarrow k = -(۲۰\frac{\pi}{۲} + ۴۵^\circ) = -۱۰\pi - ۴۵^\circ \rightarrow$ ناحیه ی چهارم

$\begin{array}{r|l} ۱۸۴۵ & ۹۰ \\ \underline{۱۸۰۰} & ۲۰ \\ ۴۵ & \end{array} \Rightarrow ۲۰ \times ۹۰ + ۴۵$

تمرین (۱) : ناحیه ی مربوط به هر یک از زوایای زیر را تعیین کنید .

$\alpha = \frac{۵\pi}{۴}$

$\beta = -\frac{۷\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$

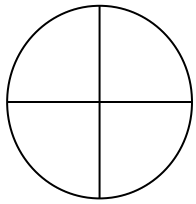
$\gamma = ۱۳۰۰^\circ$

$\theta = -۷۵۰^\circ$

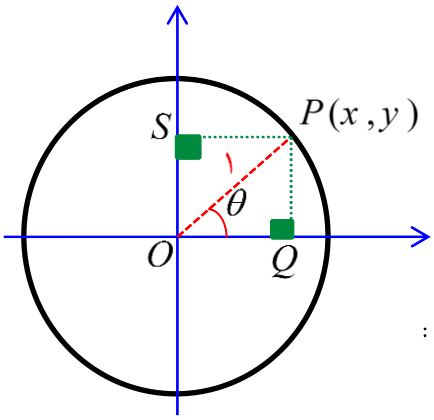
$\rho = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z}$

$\omega = -\frac{۷۱\pi}{۵}$

تمرین (۲) : به ازای مقادیر مختلف و صحیح k ، انتهای کمان مربوط به زوایای $\theta = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ را روی دایره ی مثلثاتی نمایش دهید . از به هم وصل کردن متوالی این نقاط چه شکلی پدید می آید؟



مقدمه ای بر محورهای مثلثاتی :



مرکز دایره ی مثلثاتی را بر مبدا دستگاه مختصات منطبق کنیم . فرض کنیم نقطه ی دلخواه $P(x,y)$ روی دایره ی مثلثاتی روبرو باشد و θ زاویه ای است که نیم خط OP با محور x ها می سازد . از نقطه ی P بر محورهای مختصات عمودهایی وارد می سازیم . طبق تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه OPQ خواهیم داشت :

$$\sin\theta = \frac{PQ}{۱} = PQ \Rightarrow \sin\theta = y \quad و \quad \cos\theta = \frac{OQ}{۱} = OQ \Rightarrow \cos\theta = x \quad و \quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$$

مثال : با در نظر گرفتن شکل فوق ، در صورتی که P نقطه ای به طول $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد ، نسبت های مثلثاتی زاویه ی حاده ی θ را به دست آورید .

پاسخ :

$$x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{x^۲+y^۲=۱} \frac{۳}{۴} + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\sin\theta = y} \sin\theta = \frac{۱}{۲} \quad , \quad \xrightarrow{\cos\theta = x} \cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad , \quad \xrightarrow{\tan\theta = \frac{y}{x}} \tan\theta = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

مثال : اگر α در ربع دوم و $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ ، مقدار $\cos\alpha$ را بدست آورید .

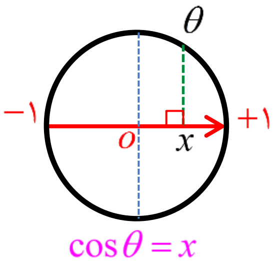
پاسخ : با توجه به اینکه در ربع دوم y مثبت و x منفی است ، محاسبات زیر را انجام می دهیم :

$$\sin\alpha = \frac{۳}{۵} \Rightarrow y = \frac{۳}{۵} \xrightarrow{x^۲+y^۲=۱} x^۲ + \frac{۹}{۲۵} = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow x = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

****

توجه : در شکل فوق واضح است که $OS = PQ$ ، پس می توان گفت $\sin\theta = OS$. در نتیجه می توان به صورت دیگری نسبتهای مثلثاتیرا برای زاویه ی θ بیان کرد : اگر از انتهای کمان بر محور طول ها عمود کنیم ، جایی که محور طول ها را قطع کند $\cos\theta$ بوده و در صورتی که بر محور عرض ها عمود کنیم ، نقطه ی تقاطع $\sin\theta$ خواهد بود .

معرفی محور های مثلثاتی :



محور کسینوس ها : مطابق شکل ، اگر قطر افقی دایره ی مثلثاتی را جهت دار نماییم ، محوری محدود به دایره ی مثلثاتی پدید می آید ، مبدا آن مرکز دایره بوده و آن را ، محور کسینوس ها می نامیم .
اگر از انتهای کمان θ بر محور کسینوس ها عمود کنیم آن را در عددی مانند x قطع می کند .
این عدد همان کسینوس θ خواهد بود .

نتایج بسیار مهم :

۱) $\cos\theta$ در نواحی اول و چهارم مثبت و در نواحی دوم و سوم منفی خواهد بود .

۲) به ازای هر زاویه ی دلخواه θ ، مقدارکسینوس θ عددی از ۱- تا ۱+ می باشد ، به عبارت دیگر : $-۱ \le \cos\theta \le ۱$

۳) کسینوس زوایای زوج π، برابر یک است . به طور مثال : $\cos ۰ = \cos(\pm ۲\pi) = \cos(\pm ۴\pi) = \cdots = ۱$

کسینوس زوایای فرد π، برابر منفی یک است . به طور مثال : $\cos(\pm\pi) = \cos(\pm ۳\pi) = \cdots = -۱$

کسینوس مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ ، برابر صفر است . به طور مثال : $\cos(\pm\frac{\pi}{۲}) = \cos(\pm\frac{۳\pi}{۲}) = \cdots = ۰$

تمرین(۳) : تساوی های زیر را کامل کنید :

الف) $\cos ۰^\circ =$ ب) $\cos ۹۰^\circ =$ پ) $\cos ۱۸۰^\circ =$ ت) $\cos ۲۷۰^\circ =$ ث) $\cos ۳۶۰^\circ =$

تمرین (۴) : حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{۱۲} \times \cos\frac{۲\pi}{۱۲} \times \cos\frac{۳\pi}{۱۲} \times \cdots \times \cos\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ را بدست آورید .

تمرین (۵) : اگر $\cos x + \cos y = ۲$ باشد ، حاصل $۳\cos^۲ x + ۴\cos^۲ y$ را بیابید .

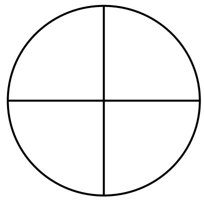
تمرین (۶) : جدول زیر را با نوشتن مثبت یا منفیِ مناسب (مانند نمونه) کامل کنید .

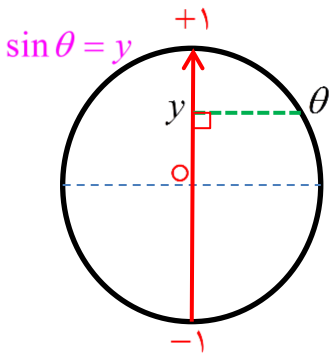
$\cos\frac{\pi}{۶}$	$\cos\frac{۲\pi}{۳}$	$\cos\frac{۵\pi}{۴}$	$\cos\frac{۱۱\pi}{۶}$	$\cos -\frac{\pi}{۵}$	$\cos ۱۰۰^\circ$	$\cos -۱۳۰^\circ$	$\cos ۳۱۰^\circ$	$\cos ۹۵۰^\circ$	$\cos\frac{۱۳\pi}{۶}$
مثبت					منفی				

تمرین (۷) : با فرض این که θ در ربع دوم است ، آیا می توان ادعا کرد $|\cos\theta| + \cos\theta = ۰$ است ؟ چرا ؟

تمرین (۸) : آیا مثلثی با زوایای داخلی A و B و C می توان یافت که $\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) = ۱$ باشد ؟

تمرین (۹) : روی دایره ی مثلثاتی در ربع اول ، زوایای دلخواهی را از کوچک به بزرگ انتخاب کنید ، و کسینوس هر کدام را روی محور کسینوس ها نمایش دهید ، آیا می توان نتیجه گرفت ، هرچه زاویه بزرگ می شود ، مقدار کسینوس آن کاهش می یابد ؟ همین عمل را در دیگر نواحی تکرار کنید و نتایج خود را بنویسید .





محور سینوس ها : مطابق شکل ، محوری است محدود به محیط دایره مثلثاتی که از مرکز دایره گذشته و بر محور کسینوس ها عمود است .

اگر از انتهای کمان θ بر این محور عمود کنیم آن را در عدد ی مانند y قطع می کند ، و در نتیجه $\sin\theta = y$ خواهد بود .

نتایج بسیار مهم :

۱) $\sin\theta$ در نواحی اول و دوم مثبت و در نواحی سوم و چهارم منفی خواهد بود .

۲) به ازای هر زاویه ی دلخواه θ ، مقدارسینوس θ عددی از ۱- تا ۱+ می باشد ، به عبارت دیگر : $-1 \le \sin\theta \le 1$

۳) سینوس زوایای زوج π و فرد π برابر صفر است . به طور مثال : $\sin 0 = 0 = \sin(\pm\pi) = \sin(\pm 2\pi) = \cdots$

همچنین با توجه به دایره می توان مشاهده کرد که $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ و $\sin\frac{5\pi}{2} = 1$ و . . .

تمرین(۱) : تساوی های زیر را کامل کنید :

الف) $\sin 0^\circ =$ ب) $\sin 90^\circ =$ پ) $\sin 180^\circ =$ ت) $\sin 270^\circ =$ ث) $\sin 360^\circ =$

تمرین (۲) : حاصل عبارت $\sin 2^\circ \times \sin 4^\circ \times \sin 6^\circ \times \cdots \times \sin 200^\circ$ را بدست آورید .

تمرین (۳) : اگر $\sin x + \sin y + \sin z = 3$ باشد ، حاصل $(\sin x + \cos y + \sin z)(\cos x + \sin y + \cos z)$ را بیابید .

تمرین (۴) : جدول زیر را با نوشتن مثبت یا منفیِ مناسب (مانند نمونه) کامل کنید .

$\sin\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{5\pi}{6}$	$\sin\frac{4\pi}{3}$	$\sin\frac{7\pi}{4}$	$\sin-\frac{\pi}{9}$	$\sin 110^\circ$	$\sin(-140^\circ)$	$\sin 325^\circ$	$\sin 940^\circ$	$\sin\frac{13\pi}{6}$
مثبت									

مثال : اگر $\sin x . \cos x > 0$ ، آنگاه x در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد ؟

پاسخ : حاصلضرب دو عدد مثبت شده است ، پس هملامت می باشند ، لذا دو حالت داریم :

حالت اول : اگر هر دو مثبت باشند ، آنگاه x در ناحیه ی اول است .

حالت دوم : اگر هر دو منفی باشند ، آنگاه x در ناحیه ی سوم است .

مثال : با فرض اینکه $|\sin\alpha| + \sin\alpha = 0$ و $|\cos\alpha| = \cos\alpha$ ، تعیین کنید α در کدام یک از نواحی چهارگانه است ؟

پاسخ : $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$ شده است ، بنابراین $\sin\alpha$ منفی است .

از طرفی $|\cos\alpha| = \cos\alpha$ شده و نتیجه می شود $\cos\alpha$ مثبت است .

لذا تنها ناحیه ای که سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد ، ناحیه ی چهارم می باشد .

نکته : عبارات $1 \pm \sin x$ و $1 \pm \cos x$ همواره نامنفی اند . (چرا؟)

مثال : در صورتی که $\sin x > \sin x \cos x$ و $\cos x < \sin x \cos x$ باشد ، تعیین کنید x در کدام ناحیه واقع است ؟

پاسخ :

$$\sin x > \sin x \cos x \Rightarrow \sin x - \sin x \cos x > 0 \Rightarrow \sin x \underbrace{(1-\cos x)}_{+} > 0 \Rightarrow \sin x > 0$$

$$\cos x < \sin x \cos x \Rightarrow \cos x - \sin x \cos x < 0 \Rightarrow \cos x \underbrace{(1-\sin x)}_{+} < 0 \Rightarrow \cos x < 0$$

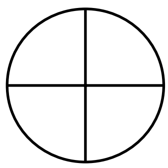
بنابراین ناحیه ی دوم جواب است . زیرا در این ناحیه سینوس مثبت و کسینوس منفی است .

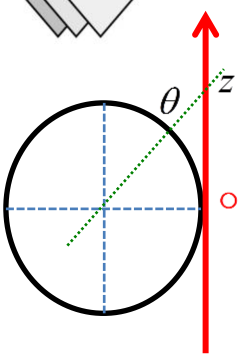
تمرین (۵) : در صورتی که $\sin^2 x < \sin x$ ولی $\cos^2 x > \cos x$ باشد ، انتهای کمان x در کدام ناحیه است ؟

تمرین (۶) : اگر α زاویه ی تُند کمتر از ۴۵ درجه باشد ، مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را با هم مقایسه کنید و تعیین کنید کدام یک بیشتر است ؟

همچنین در صورتی که این زاویه ی تُند بیشتر از ۴۵ درجه باشد ، نظرتان را بنویسید .

تمرین (۷) : روی دایره ی مثلثاتی در ربع اول ، زوایای دلخواهی را از کوچک به بزرگ انتخاب کنید ، و سینوس هر کدام را روی محور سینوس ها نمایش دهید ، آیا می توان نتیجه گرفت ، هرچه زاویه بزرگ می شود ، مقدار سینوس آن افزایش می یابد ؟ همین عمل را در دیگر نواحی تکرار کنید و نتایج خود را بنویسید .





محور تانژانت ها : مطابق شکل ، محوری است که در مبدا حرکتی بر دایره مثلثاتی مماس است . و از دو طرف تا بینهایت امتداد دارد (هیچ محدودیتی ندارد) .

اگر از انتهای کمان θ به مرکز دایره وصل کرده و رو به محور تانژانت امتداد دهیم ، این خط محور تانژانت ها را در عددی مانند z قطع می کند . این عدد همان مقدار تانژانت θ است .

نتایج بسیار مهم :

۱) $\tan\theta$ در نواحی اول و سوم مثبت و در نواحی دوم و چهارم منفی خواهد بود .

۲) به ازای هر زاویه ی دلخواه θ ، مقدارتانژانت θ از $-\infty$ تا $+\infty$ می تواند باشد .

۳) تانژانت زوایای زوج π و فرد π برابر صفر است . به طور مثال : $\cdots = \tan(\pm 2\pi) = \tan(\pm\pi) = \tan 0 = 0$

ولی برای مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ تانژانت تعریف نشده است .

به طور مثال : $\cdots = \tan(\pm\frac{5\pi}{2}) = \tan(\pm\frac{3\pi}{2}) = \tan(\pm\frac{\pi}{2}) =$ تعریف نشده

تمرین(۸) : تساوی های زیر را کامل کنید :

الف) $\tan 0^\circ =$ ب) $\tan 90^\circ =$ پ) $\tan 180^\circ =$ ت) $\tan 270^\circ =$ ث) $\tan 360^\circ =$

تمرین (۹) : حاصل عبارت $\tan 36^\circ \times \tan 72^\circ \times \tan 108^\circ \times \cdots \times \tan 216^\circ$ را بدست آورید .

تمرین (۱۰) : جدول زیر را با نوشتن مثبت یا منفیِ مناسب (مانند نمونه) کامل کنید .

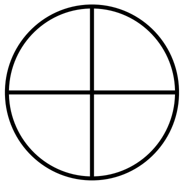
$\tan\frac{\pi}{4}$	$\tan\frac{2\pi}{3}$	$\tan\frac{16\pi}{15}$	$\tan(-\frac{\pi}{6})$	$\tan 100^\circ$	$\tan(-115^\circ)$	$\tan 325^\circ$	$\tan 940^\circ$	$\tan\frac{20\pi}{3}$
مثبت								

تمرین (۱۱) : اگر $\sin x . \tan x > 0$ ، آنگاه x در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد ؟

تمرین (۱۲) : اگر α زاویه ی تُند کمتر از ۴۵ درجه باشد ، مقدار $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ را با هم مقایسه کنید و تعیین کنید کدام یک بیشتر است ؟

همچنین در صورتی که این زاویه ی تُند بیشتر از ۴۵ درجه باشد ، نظرتان را بنویسید .

تمرین (۱۳) : روی دایره ی مثلثاتی در ربع اول ، زوایای دلخواهی را از کوچک به بزرگ انتخاب کنید ، و تانژانت هر کدام را روی محور تانژانت ها نمایش دهید ، آیا می توان نتیجه گرفت ، هرچه زاویه بزرگ می شود ، مقدار تانژانت آن افزایش می یابد ؟ همین عمل را در دیگر نواحی تکرار کنید و نتایج خود را بنویسید .



****

توجه داشته باشید که :

۱) نسبت های مثلثاتی با معکوسشان ، دارای علامت یکسان هستند . به طورمثال در ناحیه اول $\sin\theta$ مثبت است پس $\csc\theta$ نیز مثبت است .

۲) برای نسبت های مثلثاتی سِکانت ، کُسِکانت و کُتانژانت نیز محور های مختص به خودشان قابل تعریف است . که از بحث ما خارج بوده و به آن نمی پردازیم .

****

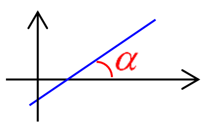
رابطه ی شیب خط با تانژانت زاویه :

نکته (۱) : اگر $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ دو نقطه روی یک خط باشند ، شیب آن خط برابر است با نسبت تفاضل عرضها به تفاضل طول های آن نقاط به عبارت دیگر : $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$.

مثال : شیب خط گذرا از دو نقطه ی $E(۳,۹)$ و $F(-۱,۴)$ را بدست آورید .   پاسخ : $m=\frac{۴-۹}{-۱-۳}=\frac{-۵}{-۴}=\frac{۵}{۴}$

نکته (۲) : اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد ،

آنگاه شیب خط برابر تانژانت α خواهد بود . به عبارت دیگر $m=\tan\alpha$.



مثال : اگر خطی با جهت مثبت محور طول ها زاویه ی $\frac{\pi}{۳}$ بسازد ، شیب آن چقدر است ؟   پاسخ : $m=\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$

مثال : خط گذرا از دو نقطه ی $A(-۱,-۲)$ و $B(۰,-۱)$ چه زاویه ای با جهت مثبت محور طول ها می سازد ؟

پاسخ : $m=\frac{-۲-(-۱)}{-۱-۰}=۱\Rightarrow\tan\alpha=۱\Rightarrow\alpha=۴۵^\circ$

مثال : مقدار a را چنان بیابید که خط گذرا از نقاط $(a,۳)$ و $(۲a-۱,۲)$ با محور x ها زاویه ی $\frac{\pi}{۴}$ بسازد .

پاسخ : $m=\frac{۲-۳}{۲a-۱-a}=\frac{-۱}{a-۱}\xrightarrow{m=\tan\frac{\pi}{۴}=۱}\frac{-۱}{a-۱}=۱\Rightarrow a-۱=-۱\Rightarrow a=۰$

نکته (۳) : اگرخطی با شیب m از نقطه ی $(x_{\circ}, y_{\circ})$ بگذرد ، برای نوشتن معادله ی خط دو روش پیشنهاد می کنیم :

روش اول : استفاده از فرم کلی معادله ی خط به صورت $y = mx + h$.

روش دوم : استفاده از رابطه ی $y - y_{\circ} = m(x - x_{\circ})$.

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور طول ها زاویه ی $\frac{\pi}{۶}$ ساخته و از مبدا مختصات بگذرد .

پاسخ (روش اول) : $m = \tan\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + h$

از طرفی مختصات مبدا یعنی $(\circ,\circ)$ باید در معادله صدق کند ، بنابراین : $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + h \xrightarrow[y=\circ]{x=\circ} \circ = \circ + h \Rightarrow h = \circ$

پس معادله ی خط به صورت $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x$ است .

(روش دوم) : $m = \tan\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{O(\circ,\circ)} y - \circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x - \circ) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x$

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که از دو نقطه ی $(۱,۴)$ و $(۲,۷)$ بگذرد .

پاسخ : $m = \frac{۷-۴}{۲-۱} = ۳ \xrightarrow{(۱,۴)} y - ۴ = ۳(x - ۱) \Rightarrow y = ۳x + ۱$

تمرین(۱۴) : با توجه به شکل مقابل معادله ی خط d را بنویسید .