

فصل هشتم

حجم و مساحت

تعریف: کره، مجموعه تمام نقاطی از فضا که همه ی آن نقطه ها از یک نقطه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند و به آن اندازه ثابت شعاع کره می گوئیم

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{حجم کره با شعاع } R \text{ برابر است با:}$$

مثال: حجم کره ای را بدست آورید

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3, R = 6 \rightarrow v = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi \quad \text{الف) شعاع آن ۶ باشد}$$

$$R = 3 \Leftarrow v = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi \quad \text{ب) قطر آن ۶ باشد}$$

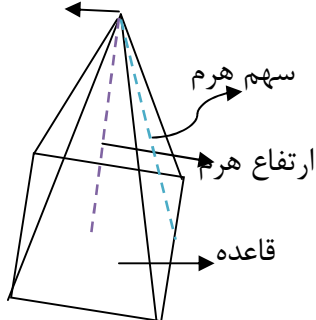
$$S = 4\pi R^2 \quad \text{*مساحت کره به شعاع } R \text{ چهار برابر مساحت دایره به شعاع } R \text{ است}$$

مثال: مساحت کره به شعاع ۴ را بدست آورید

$$R = 4 \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 4\pi(4)^2 = 64\pi$$

هرم: یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است قاعده هرم یک چند ضلعی است به هر یک از مثلث های که در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند وجه جانبی هرم می گوئیم و نقطه مشترک همه وجه ها جانبی را راس هرم می گوئیم

ارتفاع هرم: به فاصله راس هرم تا قاعده، یعنی طول عمود که از راس بر قاعده رسم می شود ارتفاع هرم می گوئیم راس هرم



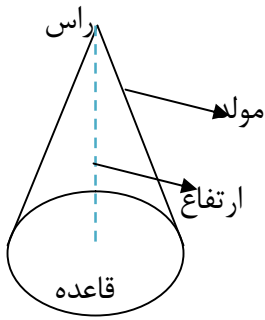
*اگر چند ضلعی قاعده منتظم باشد و وجه های جانبی با هم هم نهشت باشند هرم منتظم است

*ارتفاع وجه جانبی که از راس هرم منتظم بر ضلع قاعده رسم می شود سهم هرم نامیده میشود

$$v = \frac{1}{3}s.h \quad \text{حجم هرم: برابر یک سوم مساحت قاعده در ارتفاع هرم}$$

$$\text{مساحت جانبی: } 2 \div (\text{سهم هرم} \times \text{محیط قاعده}) = \text{مساحت جانبی هرم منتظم}$$

مخروط: اگر یک مثلث قائم الزاویه را حول یکی از اضلاع زاویه قائمه دوران دهیم شکلی فضایی پدید می آید که آن را مخروط می نامیم ضلعی که مثلث را حول آن دوران داده ایم ارتفاع مخروط و ضلع دیگر قائمه



شعاع قاعده و وتر مثلث مولد مخروط می باشد

مساحت جانبی مخروط: برابر با حاصلضرب مولد در شعاع قاعده در عدد پی $\pi r l =$ مساحت جانبی

مثال: از دوران یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه ۳ و ۴ و وتر ۵ سانتیمتر حول ضلع ۴ سانتی متر چه حجمی حاصل می شود؟ مساحت جانبی آن را حساب کنید

مخروط بوجود می آید

$$\text{مساحت جانبی مخروط} = \pi r l = \pi (3)(5) = 15\pi$$

$$* \text{حجم مخروط با شعاع قاعده } R \text{ و ارتفاع } h \text{ برابر است با: } v = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} s \cdot h$$

مثال: حجم یک مخروط با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ را به دست آورید

$$R = 4, h = 3 \Rightarrow v = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (4)^2 (3) = 16\pi$$

حجم حاصل از دوران شکل‌های هندسی

* از دوران مثلث های قائم الزاویه حول ضلع قائمه مخروط بوجود می آید

* از دوران مستطیل حول اضلاع آن استوانه پدید می آید

* از دوران نیم دایره حول قطر آن یک کره پدید می آید

* از دوران ربع دایره حول شعاع آن نیم کره بوجود می آید

تمرینات سطح ۱

سوالات امتحانی

(جهت آمادگی آزمونهای تمام مدارس)

۱) جملات درست را با $\sqrt{\quad}$ را نادرست را با \times مشخص کنید

الف) اگر شعاع کره ای ۳ باشد حجم و مساحت کره با هم برابر است استان سمنان-خرداد ۹۷

ب) مساحت نیم کره از دستور $2\pi r^2$ به دست می آید استان گیلان-خرداد ۹۷

ج) اگر کره ای را بایک صفحه برش دهیم ، سطح بریده شده دایره است استان آذربایجان شرقی-خرداد ۹۷

د) اگر کره ای در استوانه محاط شود حجم استوانه $1/5$ برابر حجم کره است استان یزد-خرداد ۹۷

استان خوزستان -خرداد ۹۷

۲) حجم کره ای به شعاع ۵ سانتی متر را حساب کنید

استان اصفهان-خرداد ۹۷

۳) مساحت کره ای 36π می باشد شعاع و حجم کره را به دست آورید

۴) الف) دستور حجم و مساحت کره را بنویسید استان لرستان-خرداد ۹۷

ب) حجم کره ای به شعاع ۳ سانتی متر را حساب کنید

۵) اگر شعاع کره ای دو برابر شود حجم و مساحت آن چند برابر می شود؟ استان همدان-خرداد ۹۷

۶) نسبت حجم به سطح کره ای $\left(\frac{V}{S}\right)$ به شعاع ۳ را به دست آورید استان بوشهر- خرداد ۹۷

۷) قطر نیم کره توپری برابر ۶ است حجم آن را حساب کنید نوشتن فرمول الزامی است استان کرمانشاه- خرداد ۹۷

استان تهران- خرداد ۹۷

۸) الف) مساحت کره ای ، 300 cm^2 می باشد شعاع این کره را به دست آورید $(\pi = 3)$

ب) حجم کره را حساب کنید (دستور محاسبه کره را بنویسید)

۹) در کره ای به شعاع a نسبت حجم به سطح کره $\frac{V}{S}$ را به دست آورید استان مرکزی- خراسان رضوی- خرداد ۹۷

۱۰) حجم های زیر را حساب کنید

الف) هرم با قاعده مربع به ضلع ۵ و ارتفاع ۴

ب) هرم با قاعده مستطیل به ابعاد ۲ و ۶ و ارتفاع ۳

ج) هرم با قاعده مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۳ و ارتفاع $4\sqrt{3}$

۱۱) جاهای خالی را با نوشتن عدد یا کلمه ی مناسب کامل کنید

الف) فاصله راس هرم تا قاعده آن نام دارد استان گیلان-خرداد ۹۷

ب) مخروط، شکلی شبیه است که قاعده ی آن به شکل است استان لرستان-خرداد ۹۷

ج) حجم هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است استان خراسان رضوی-خرداد ۹۷

د) هرم حجمی است که وجه های جانبی آن به شکل است استان قزوین-خرداد ۹۷

۱۲) حجم هرم منتظمی با قاعده ی مربع به ضلع ۳ را بدست آورید که طول ساق وجه جانبی آن ۶ باشد

۱۳) حجم مخروطی را به دست آورید که قطر قاعده آن ۶ و ارتفاع آن ۴ باشد

استان یزد-خرداد ۹۷

۱۴) مساحت قاعده مخروطی 49π و حجم آن 98π است شعاع قاعده و ارتفاع مخروط را به دست آورید

۱۵) محیط قاعده مخروطی 8π و ارتفاع آن ۹ می باشد حجم مخروط را بدست آورید

شهرستان استان تهران-خرداد ۹۷

۱۶) الف) حجم مخروطی به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۶ سانتی متر را حساب کنید

ب) حجم هرمی به مساحت قاعده ی آن ۳۰ سانتی متر مربع و ارتفاع ۱۰ سانتی متر را حساب کنید

۱۷) هرمی داریم که قاعده ی آن لوزی است به قطرهای ۵ و ۸ سانتی متر، اگر ارتفاع این هرم ۱۲ سانتی متر باشد حجم هرم را

بدست آورید استان اصفهان-خرداد ۹۷

۱۸) با قسمتی از دایره ای به شعاع ۸، مخروطی به شعاع قاعده ۴ ساخته ایم حجم مخروط را حساب کنید

۱۹) گسترده شکل‌های زیر را رسم کنید و مساحت کل هر یک را حساب کنید

الف) مکعب به ضلع ۳

ب) مکعب مستطیل به ابعاد ۳ و ۴ و ۵

۲۰) الف) هرم منتظم با قاعده مربع به ضلع ۴ و ارتفاع آن برابر ۱۵ سانتی متر است حجم آنرا حساب استان گلستان- خرداد ۹۷

ب) شعاع قاعده یک مخروط ۴ و ارتفاع آن ۳ است گسترده مخروط را رسم کنید سپس مساحت جانبی و مساحت کل آنرا حساب کنید

۲۱) ربع دایره ای به شعاع ۲ را حول یکی از شعاع‌ها دوران می‌دهیم حجم و مساحت کل شکل حاصل را بدست آورید

استان سمنان-خرداد ۹۷

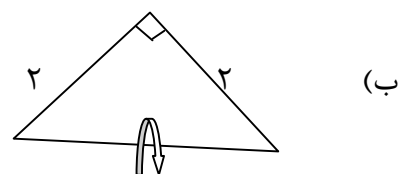
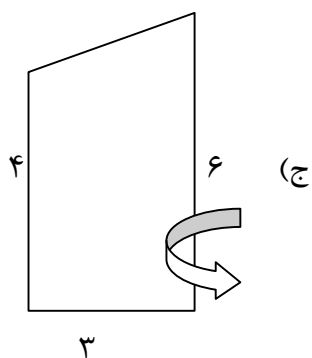
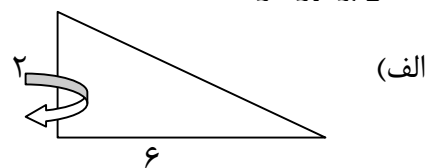
۲۲) مستطیل به ابعاد ۴ و ۱۰ را حول عرض دوران داده ایم

الف) شکل حاصل را بنویسید

ب) حجم آن را حساب کنید

۲۳) در هر یک از شکل های زیر با توجه به محور دوران ، و اندازه های داده شده حجم شکل حاصل از دوران را به دست آورید

استان بوشهر-خرداد ۹۷



تمرینات تشریحی سطح ۲

قابل استفاده جهت مدارس خاص

۱) طول قطر مکعبی برابر ۶ سانتی متر است مساحت این مکعب را به دست آورید

۲) مکعبی در داخل کره ای به شعاع $\sqrt{۳}$ سانتی متر محاط شده است حجم فضای بین کره و مکعب را حساب کنید

۳) قطر کره ای را تعیین کنید که در مکعبی محاط شده است و خود این مکعب در کره ای به قطر ۱۰ cm محاط است

۴) نیم دایره ای به قطر ۶ سانتی متر را حول قطرش به اندازه ۱۸۰ درجه دوران می دهیم حجم و مساحت آن را حساب کنید

۵) مولد یک مخروط ۵ متر وشعاع قاعده آن ۳ متر است مساحت جانبی و حجم این مخروط را به دست آورید

۶) لوزی با قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک ۶ را یکبار حول قطر بزرگ و یک بار حول قطر کوچک دوران می دهیم حجم های حاصل را حساب کنید

۷) حجم حاصل از دوران شکل های زیر حول اضلاع مشخص شده را حساب کنید

(الف)

