مقدمه :

اعمال روی بازه :

1. جمع و تفریق بازه با عدد :

$(0\,,+\infty) \xrightarrow{-1} (-1\,,+\infty)$

$[-1\,,2] \xrightarrow{+3} [2\,,5]$

2. ضرب و تقسیم بازه در عدد :

$[-1\,,2] \xrightarrow{\times(-3)} [-6\,,3]$

$(-6\,,-2) \xrightarrow{\div(-2)} (1\,,3)$

$[-1\,,2] \xrightarrow{\times 3} [-3\,,6]$

$[2\,,5) \xrightarrow{\times(-2)} (-10\,,-4]$

3. توان زوج رسانی بازه :

$[2\,,5] \xrightarrow{\text{توان } 2} [4\,,25]$

* $[-5\,,3] \xrightarrow{\text{توان } 2} [0\,,25]$

$[-3\,,-2] \xrightarrow{\text{توان } 2} [4\,,9]$

* $[-2\,,3] \xrightarrow{\text{توان } 2} [0\,,9]$

[مثبت و منفی] $\xrightarrow{\text{توان } 2}$ [بزرگتر و صفر]

4. توان فرد رسانی بازه :

$[2\,,5] \xrightarrow{\text{توان } 3} [8\,,125]$

$[-3\,,-2] \xrightarrow{\text{توان } 3} [-27\,,-8]$

$[-2\,,3] \xrightarrow{\text{توان } 3} [-8\,,27]$

5. قدر مطلق گیری بازه : مشابه توان زوج است

$[2\,,5] \xrightarrow{\text{قدر مطلق}} [2\,,5]$

* $[-5\,,3] \xrightarrow{\text{قدر مطلق}} [0\,,5]$

$[-3\,,-2] \xrightarrow{\text{قدر مطلق}} [2\,,3]$

* $[-2\,,3] \xrightarrow{\text{قدر مطلق}} [0\,,3]$

[مثبت و منفی] $\xrightarrow{\text{قدرمطلق}}$ [بزرگتر و صفر]

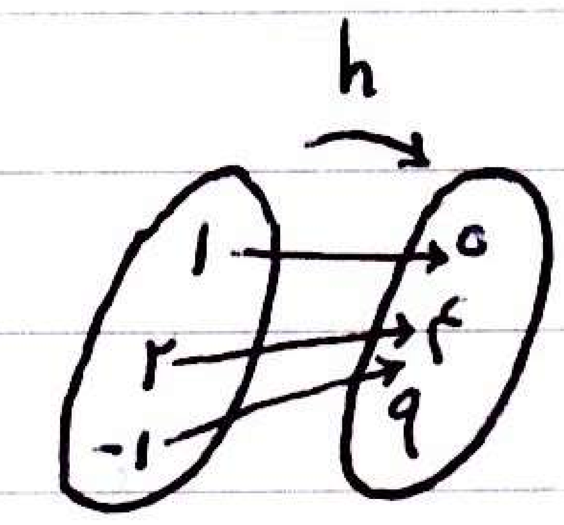
تعریف تابع:

رابطه‌ی $f:A\to B$ را تابع گوییم هرگاه به‌ازای هر $x\in A$ فقط یک $y\in B$ تعریف شده باشد به طوری $(x,y)\in f$ باشد.

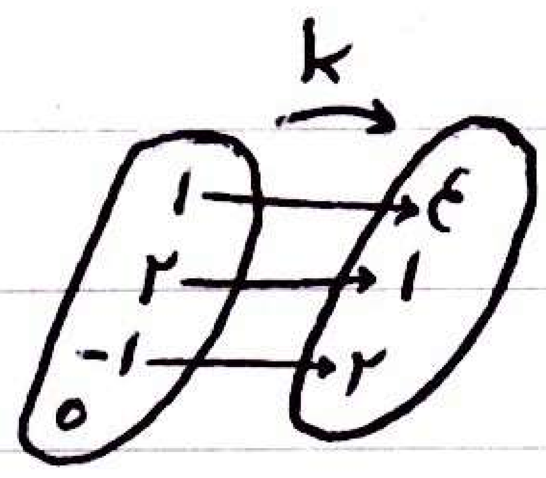
مثال: کدام یک از روابط زیر تابع است؟

الف) $f=\{(1,2),(3,4),(-1,0)\}$ ← تابع است

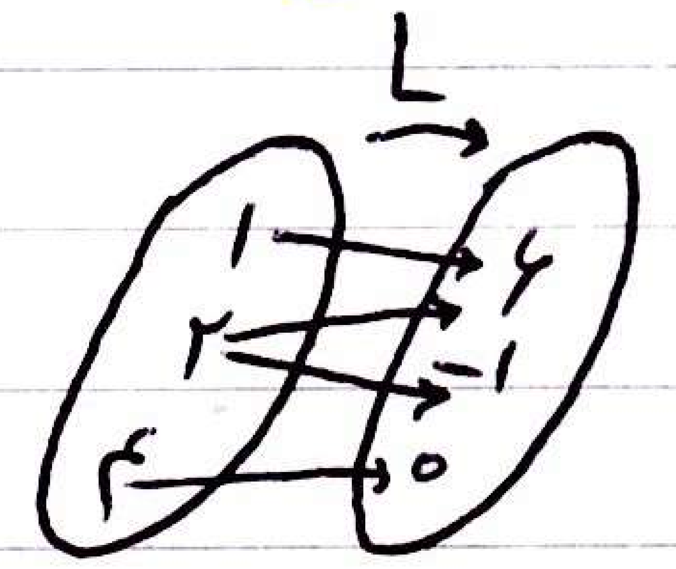
ب) $g=\{(4,3),(3,2),(2,1),(3,0)\}$ ← تابع نیست زیرا برای $x=3$ دو عرض ۰ و ۲ تعریف شده است.

پ) 

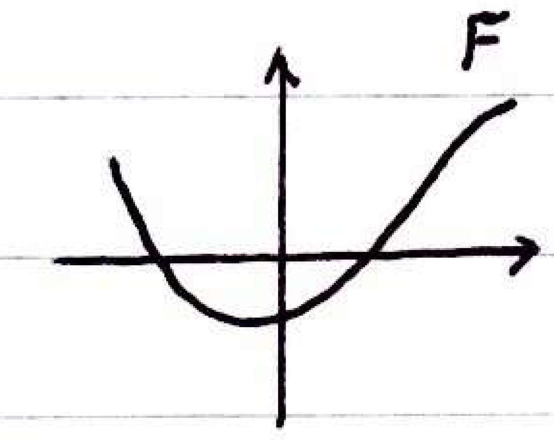
تابع است

ت) 

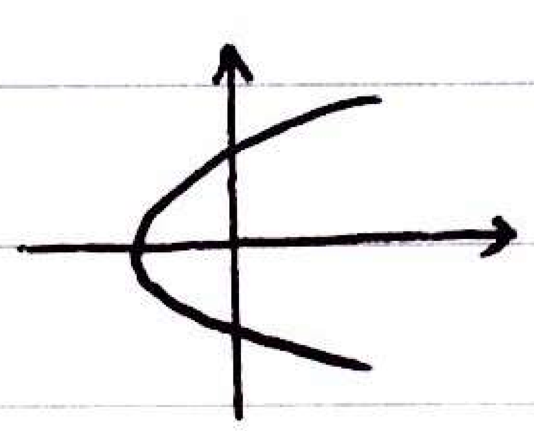
تابع نیست زیرا برای $x=0$، عرضی تعریف نشده است

ث) 

تابع نیست زیرا برای $x=2$، دو عرض ۶ و -1 تعریف شده است.

ج) 

تابع است زیرا هر خط قائم منحنی را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند

چ) 

تابع نیست زیرا خط قائمی می‌توان رسم کرد که منحنی را در دو نقطه قطع کند.

در ادامهٔ صفحهٔ قبل دقت کنید که :

معادلات و توابع :

معادلاتی که دارای دو متغیر x و y هستند، وقتی تابع‌اند که به ازای هر یک x، فقط یک y بدست آید.

مثال: آیا معادلهٔ $y^2 + x^2 = 10$ تابع است؟

$x = 2 \longrightarrow y^2 + 4 = 10 \rightarrow y^2 = 6 \rightarrow y = \pm\sqrt{6} \longrightarrow$ تابع نیست

مثال: آیا معادلهٔ $|y| = 2x + 1$ تابع است؟

$x = 1 \longrightarrow |y| = 2 + 1 = 3 \longrightarrow y = \pm 3 \longrightarrow$ تابع نیست

مثال: کدام یک از معادلات زیر تابع است؟

الف) $2x + y = 5 \longrightarrow y = 5 - 2x \rightarrow$ تابع است

ب) $y - |x| - 1 = 0 \longrightarrow y = |x| + 1 \longrightarrow$ تابع است

پ) $y^3 - 2x = 1 \longrightarrow y^3 = 2x + 1 \xrightarrow{\text{رادیکال}} y = \sqrt[3]{2x+1} \longrightarrow$ تابع است

ح) $x^2+y^2=1$

$x=0 \rightarrow y^2=1 \rightarrow y=\pm 1 \longrightarrow$ تابع نیست زیرا برای $x=0$ دو عرض ۱ و ۱- بدست آمده است.

خ) $x^3+y^3=1$

$\rightarrow y^3=1-x^3 \rightarrow y=\sqrt[3]{1-x^3} \longrightarrow$ تابع است زیرا y برحسب رابطه‌ی یگانه‌ای از x تعریف شده است.

د) $y=\begin{cases} x+1 & , x\geq -2 \\ 3x & , x\leq -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=-2$

$x=-2 \rightarrow y=-2+1=-1$

$x=-2 \rightarrow y=3(-2)=-6$

تابع نیست زیرا برای $x=-2$ دو عرض ۱- و ۶- تعریف شده است.

ذ) $y=\begin{cases} x^2 & , x\geq 1 \\ 2x-1 & , x\leq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=1$

$x=1 \rightarrow y=1^2=1$

$x=1 \rightarrow y=2(1)-1=1$

تابع است.

ر) $y=\begin{cases} \sin x & , x\geq 0 \\ \cos x & , x< 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset \Rightarrow$ تابع است

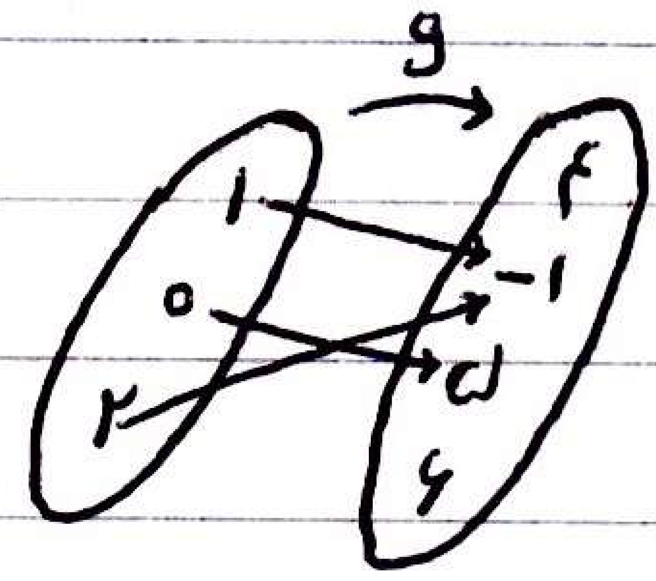
دامنه‌ی تابع: مجموعه مقادیری که x می‌پذیرد، دامنه‌ی تابع است. "D"

بُرد تابع: مجموعه مقادیری که y می‌پذیرد، بُرد تابع است. "R"

مثال: $f=\{(-1,2),(3,4),(5,2)\}$

$\rightarrow D_f=\{-1,3,5\}$, $R_f=\{2,4\}$

مثال:



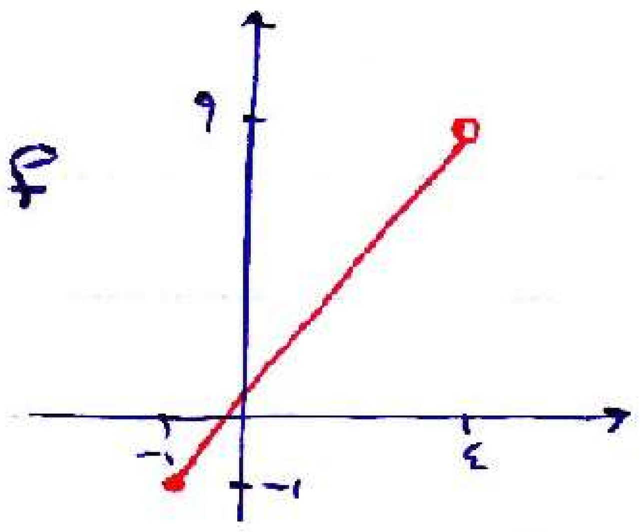
$\rightarrow D_g=\{0,1,2\}$, $R_g=\{-1,5\}$

مثال: تابع $f(x)=2x+1$ را با دامنه‌های زیر در نظر بگیرید. بُرد آن را یافته و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

الف) $D_f=[-1,4)$

$$[-1,4) \xrightarrow{\times 2} [-2,8) \xrightarrow{+1} [-1,9)=R_f$$

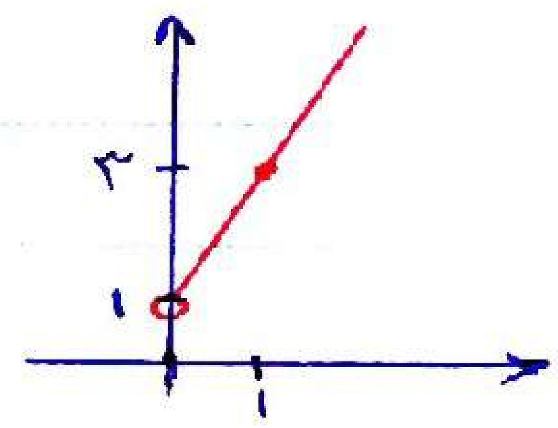
x	-1	4
y	-1	9



ب) $D_f=(0,+\infty)$

$$(0,+\infty) \xrightarrow{\times 2} (0,+\infty) \xrightarrow{+1} (1,+\infty)=R_f$$

x	0	1
y	1	3

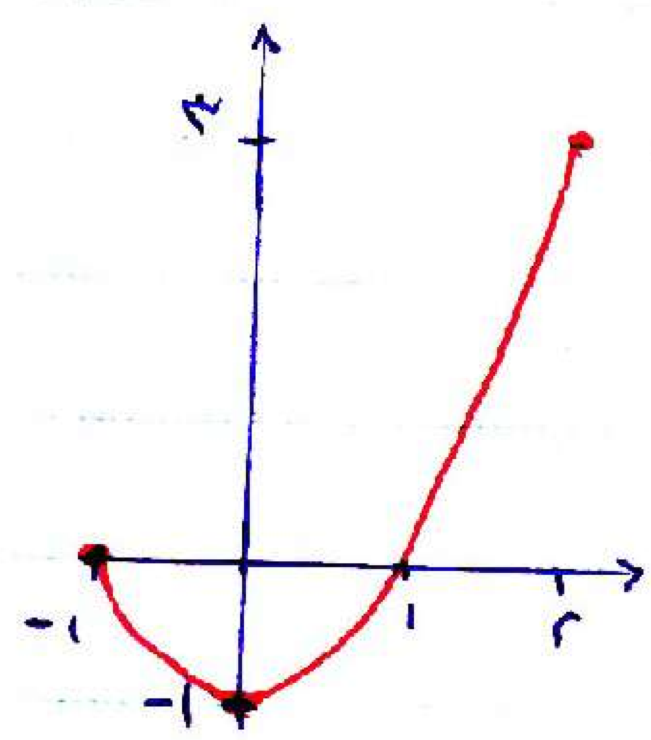


مثال: تابع $f(x)=x^2-1$ را در نظر بگیرید، مطابق با هر دامنه، برد را نوشته و نمودار را رسم کنید.

الف) $D_f=[-1,2]$

$$[-1,2] \xrightarrow{\text{توان } 2} [0,4] \xrightarrow{-1} [-1,3]=R_f$$

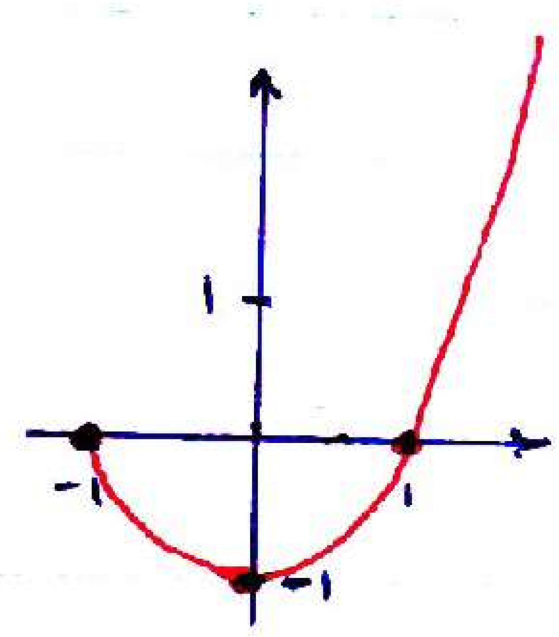
x	-1	0	2
y	0	-1	3



ب) $D_f=[-1,+\infty)$

$$[-1,+\infty) \xrightarrow{\text{توان } 2} [0,+\infty) \xrightarrow{-1} [-1,+\infty)=R_f$$

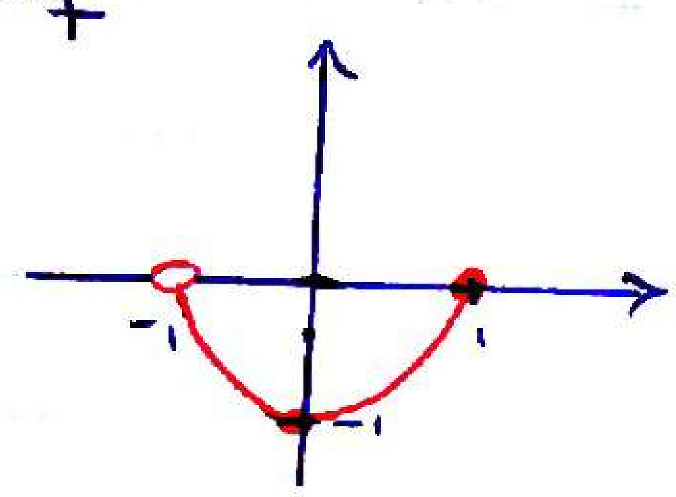
x	-1	0	1
y	0	-1	0



پ) $D_f=(-1,1]$

$$(-1,1] \xrightarrow{\text{توان } 2} [0,1] \xrightarrow{-1} [-1,0]=R_f$$

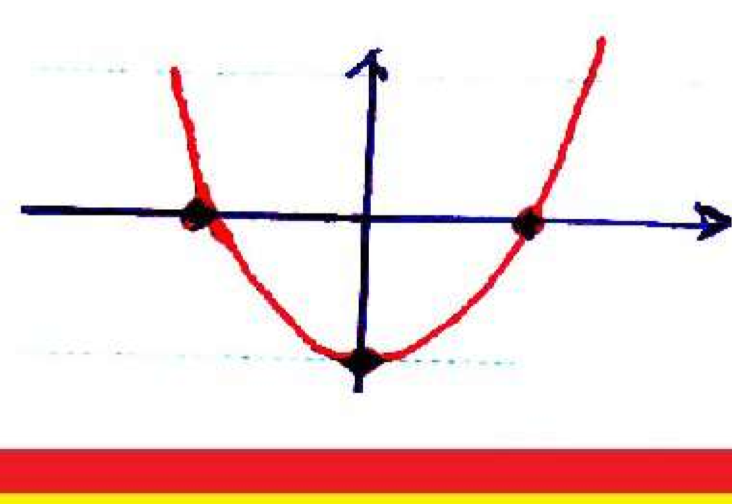
x	-1	0	1
y	0	-1	0



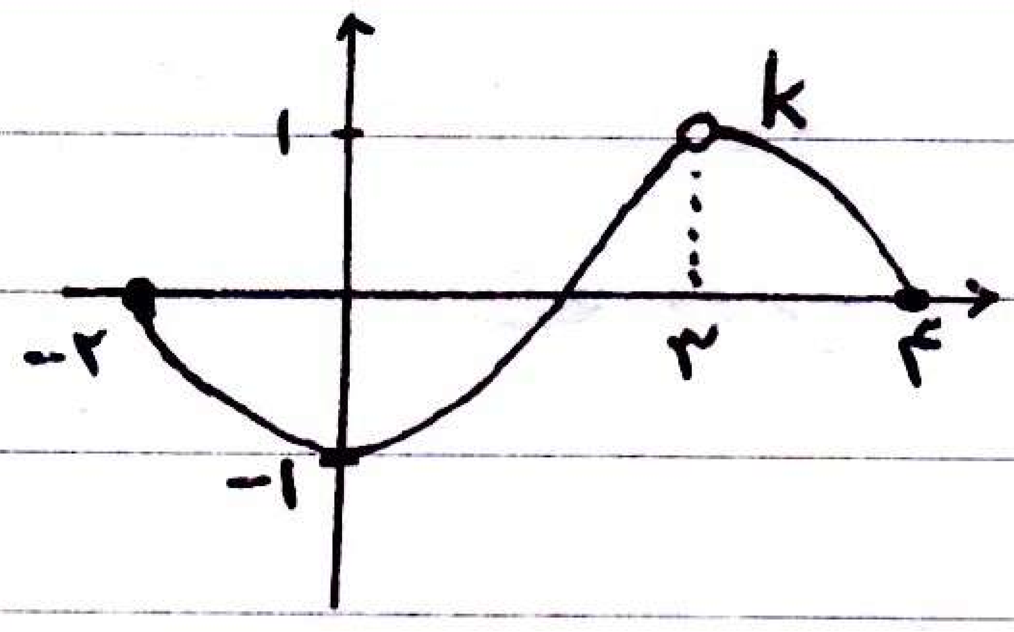
ت) $D_f=\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{توان } 2} [0,+\infty) \xrightarrow{-1} [-1,+\infty)=R_f$$

x	-1	0	1
y	0	-1	0



مثال:



$D_k = [-2, 4] - \{3\}$

$R_k = [-1, 1)$

مثال: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x + 1$

در توابع چند جمله‌ای، x هر مقدار حقیقی را می‌تواند بپذیرد، پس دامنه‌ی این توابع همه‌ی اعداد حقیقی است یعنی: $D_f = \mathbb{R}$

اگر تابعی چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد باشد، برد آن تمام اعداد حقیقی است بنابراین: $R_f = \mathbb{R}$

معرفی انواعی از تابع:

۱) تابع همانی: تابعی که هر طول آن، برابر عرض آن باشد به عبارت دیگر $y = x$.

مثال: $f = \{(-1,-1), (0,0), (7,7), (10,10)\}$

۲) تابع ثابت: تابعی که برای تمام طول‌های آن فقط یک عرض تعریف شده باشد.

مثال: $f = \{(-1,4), (0,4), (7,4), (10,4)\}$

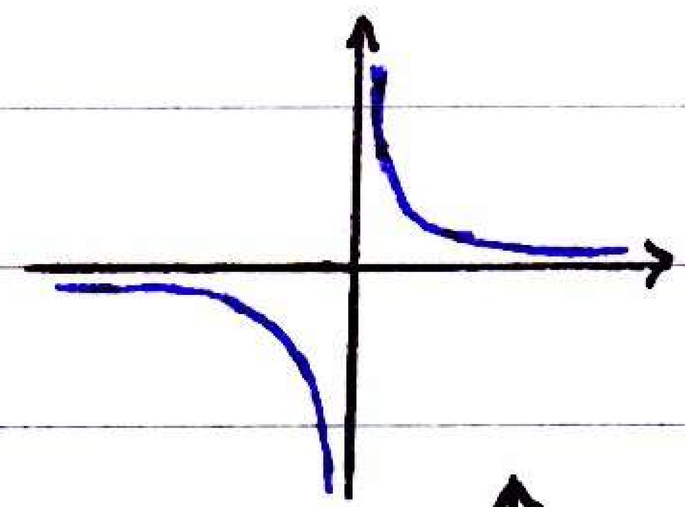
مثال: $y = 5$

۳) تابع گویا: تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند و مخرج نمی‌تواند چند جمله‌ای صفر باشد.

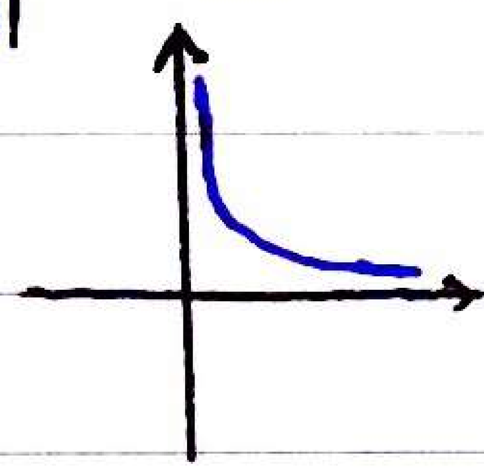
مثال: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 7}$

مثال: $g(x) = \frac{1}{2x - 3} + \frac{2}{x + 1}$

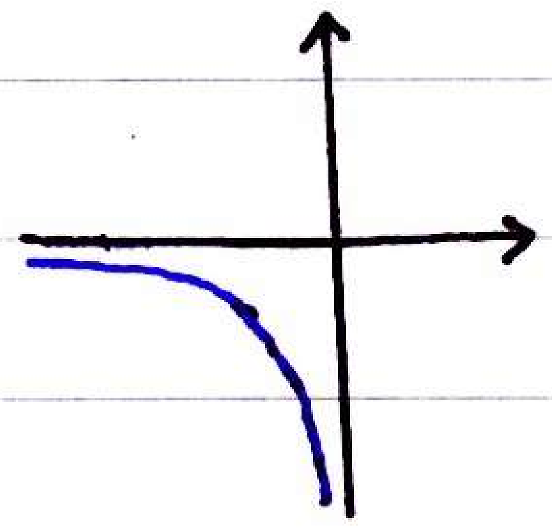
توجه: ساده‌ترین نوع تابع گویا $y=\frac{1}{x}$ می‌باشد که نمودار آن به صورت روبروست:



واضح است که در بازه $(0, +\infty)$ نمودار آن به صورت



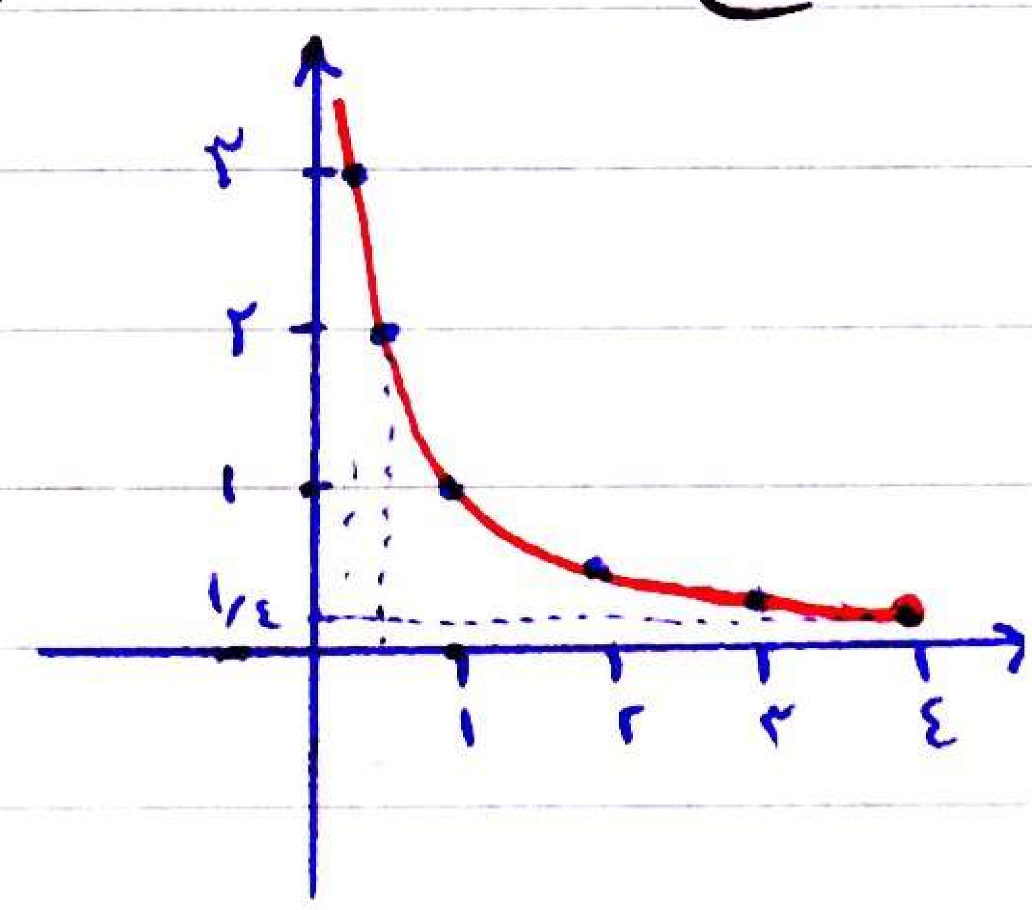
و در بازه $(-\infty, 0)$ نمودار آن



می‌باشد.

مثال: نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را در بازه $(0, 4]$ رسم کنید.

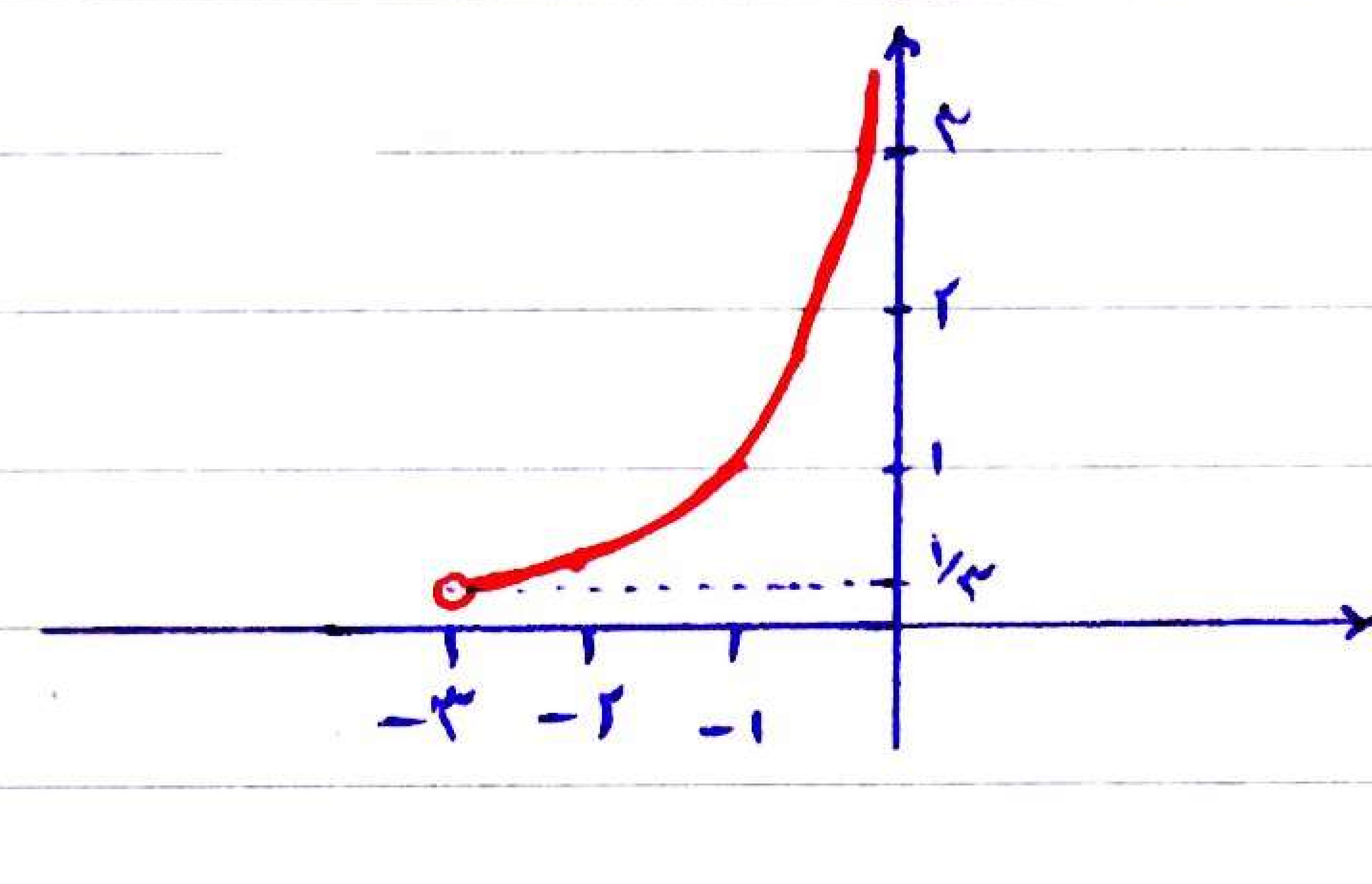
x	4	3	2	1	$1/2$	$1/4 \to 0$
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$3 \to \infty$



مثال: نمودار تابع $y=\frac{-1}{x}$ را در بازه‌ی $(-3, 0)$ رسم کنید.

x	-3	-2	-1	$-1/2$	$-1/3 \to 0$
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$3 \to \infty$

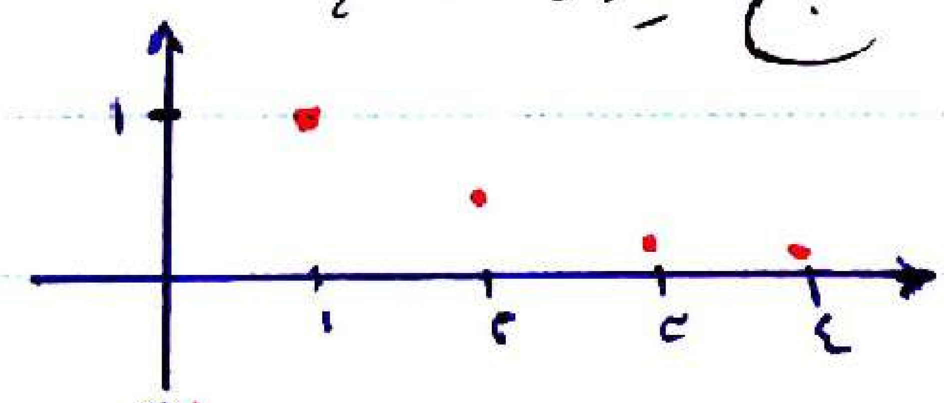
نقطه باید تو خالی باشه



مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

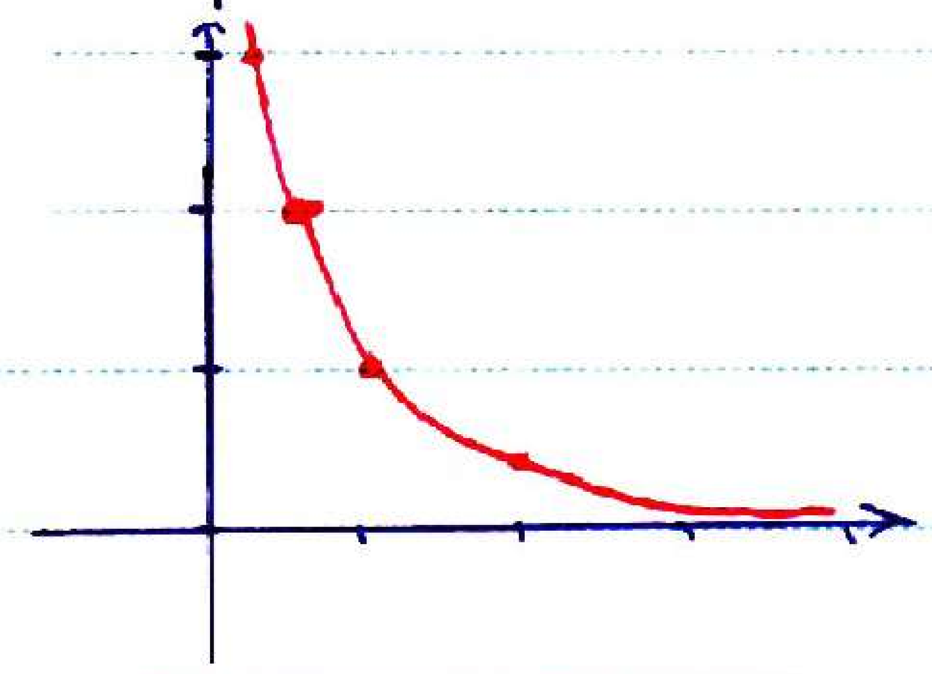
الف) $\begin{cases} f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

x	۱	۲	۳	۴	...
y	۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴	...



ب) $\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

x	۱/۴	۱/۲	۱	۲
y	۴	۲	۱	۱/۲



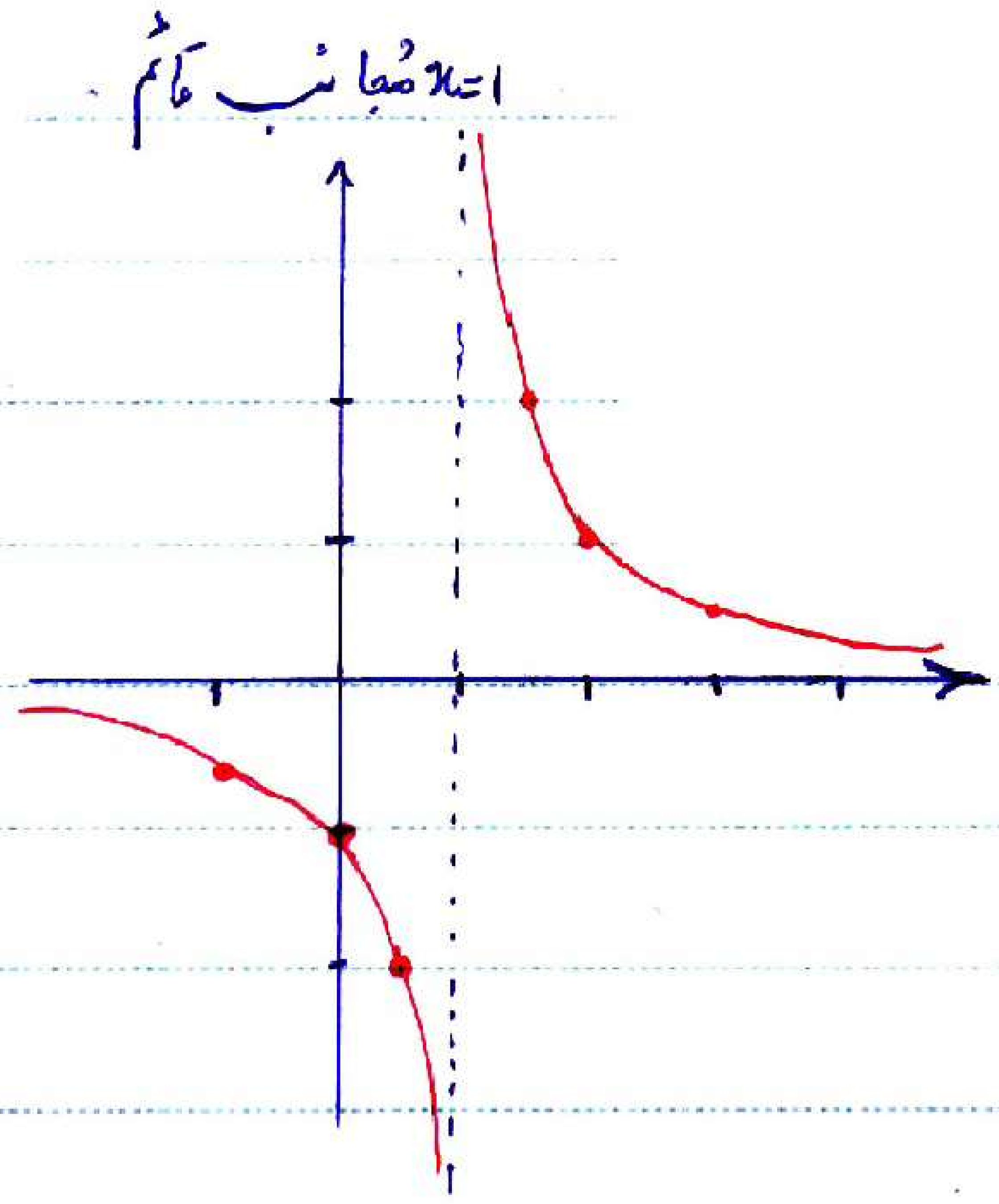
پ) $y = \frac{1}{x-1}$

$y=\frac{1}{x}$

x	-۲	-۱	-۱/۲	۱/۲	۱	۲
y	-۱/۲	-۱	-۲	۲	۱	۱/۲

$\xrightarrow{+1}$

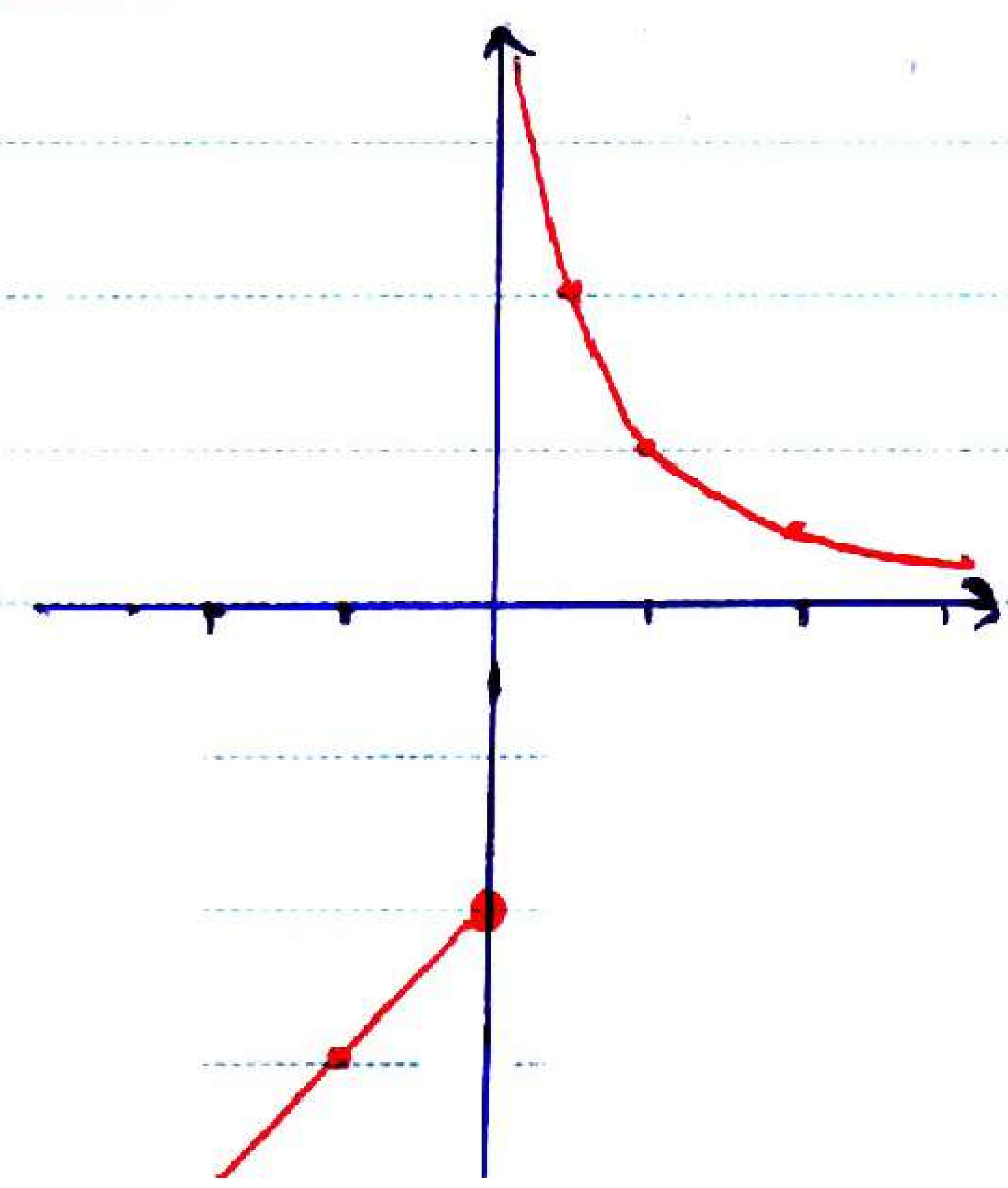
x	-۱	۰	۱/۲	۳/۲	۲	۳
y	-۱/۲	-۱	-۲	۲	۱	۱/۲



ت) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases}$

x	۱/۲	۱	۲
y	۲	۱	۱/۲

x	۰	-۱
y	-۲	-۳



دامنه‌ی توابع گویا: این توابع به ازای اعداد حقیقی که مخرج را صفر کنند (ریشه‌های مخرج) تعریف نشده اند ولی به ازای دیگر اعداد حقیقی قابل تعریف می‌باشند.

به عبارت دیگر دامنه‌ی توابع گویا $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ می‌باشد.

به طور مثال تابع $f(x) = \dfrac{1+x}{x^2-1}$ به ازای $x=1$ و $x=-1$ تعریف نشده است زیرا:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس دامنه‌ی این تابع $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ است.

مثال: دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+5}$ $\quad x+5=0 \rightarrow x=-5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$

ب) $g(x) = \dfrac{2}{3x-7} - \dfrac{x}{x-4}$

$\xrightarrow{\text{ریشه}} \dfrac{7}{3} \qquad \xrightarrow{\text{ریشه}} 4 \qquad \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\dfrac{7}{3}, 4\}$

پ) $h(x) = \dfrac{x^3+1}{2x^2-7x+5} \times \dfrac{x-3}{x^2-4}$

$\xrightarrow{\text{ریشه}} 1, \dfrac{5}{2} \qquad \xrightarrow{\text{ریشه}} \pm 2 \qquad \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{1, \dfrac{5}{2}, 2, -2\}$

ت) $k(x) = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x-3} - 5}$ $\quad \xrightarrow{\text{ریشه}} x=0$

$x=3$

مخرج کسر اصلی: $\dfrac{1}{x-3} - 5 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x-3} = 5 \Rightarrow 5x-15=1 \Rightarrow x=\dfrac{16}{5}$

$\Longrightarrow D_k = \mathbb{R} - \{0, 3, \dfrac{16}{5}\}$

مثال: به ازای چه مقدار از a دامنه تابع $f(x)=\frac{x}{2x+a}$ برابر $\mathbb{R}-\{3\}$ است؟

از متن سوال نتیجه می‌شود به ازای $x=3$ تابع تعریف نشده یعنی مخرج صفر خواهد شد، پس:

$$2(3)+a=0 \Rightarrow 6+a=0 \Rightarrow a=-6$$

مثال: اگر بیشترین مقادیر قابل تعریف برای تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2+ax+b}$ اعضای مجموعه‌ی $D=\mathbb{R}-\{-2,7\}$ باشد، a و b را بیابید.

روش اول: مخرج تابع به ازای $x=-2$ و $x=7$ باید صفر شود.

$$x=-2 \Rightarrow 4-2a+b=0 \longrightarrow \begin{cases} 2a-\cancel{b}=4 \\ 7a+\cancel{b}=-49 \end{cases}$$
$$x=7 \Rightarrow 49+7a+b=0$$

$$9a=-45 \Rightarrow \boxed{a=-5}$$

$$\underline{2a-b=4} \rightarrow -10-b=4 \Rightarrow \boxed{b=-14}$$

روش دوم: مخرج عبارت درجه دومی است که ریشه‌های آن -2 و 7 است. بنابراین:

$$x^2+ax+b=(x+2)(x-7)=x^2-5x-14 \Rightarrow a=-5,\ b=-14$$

مثال: به ازای چه مقادیر از m دامنه تابع $g(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4x+m}$ تمام اعداد حقیقی است؟

یعنی هیچ عدد حقیقی، مخرج را صفر نمی‌کند به عبارت دیگر مخرج ریشه ندارد پس باید $\Delta<0$ باشد.

$$16-4m<0 \Rightarrow -4m<-16 \xrightarrow{\div(-4)} m>4$$

تمرین: بازای چه مقدار از m دامنه تابع $f(x) = \dfrac{5}{x^2-6x+m}$ به صورت $\mathbb{R}-\{\alpha\}$ خواهد بود؟

مخرج فقط بازای یک عدد صفر شده است یعنی فقط یک ریشه برای عبارت درجه دوم داریم پس:

$\Delta = 0 \longrightarrow 36-4m=0 \Longrightarrow m=9$

تمرین: سه تابع گویا بنویسید که دامنه آنها $\mathbb{R}-\{-1\}$ باشد.

$f(x) = \dfrac{x^5}{x+1}$ ، $g(x) = \dfrac{7}{5x+5}$ ، $p(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$

---

۴ توابع رادیکالی:

ساده ترین نوع این تابع $f(x) = \sqrt{x}$ می باشد

و بدیهی است که این تابع روی بازه ی $[0, +\infty)$

قابل تعریف است، زیرا اعداد منفی ریشه ی زوج ندارند.

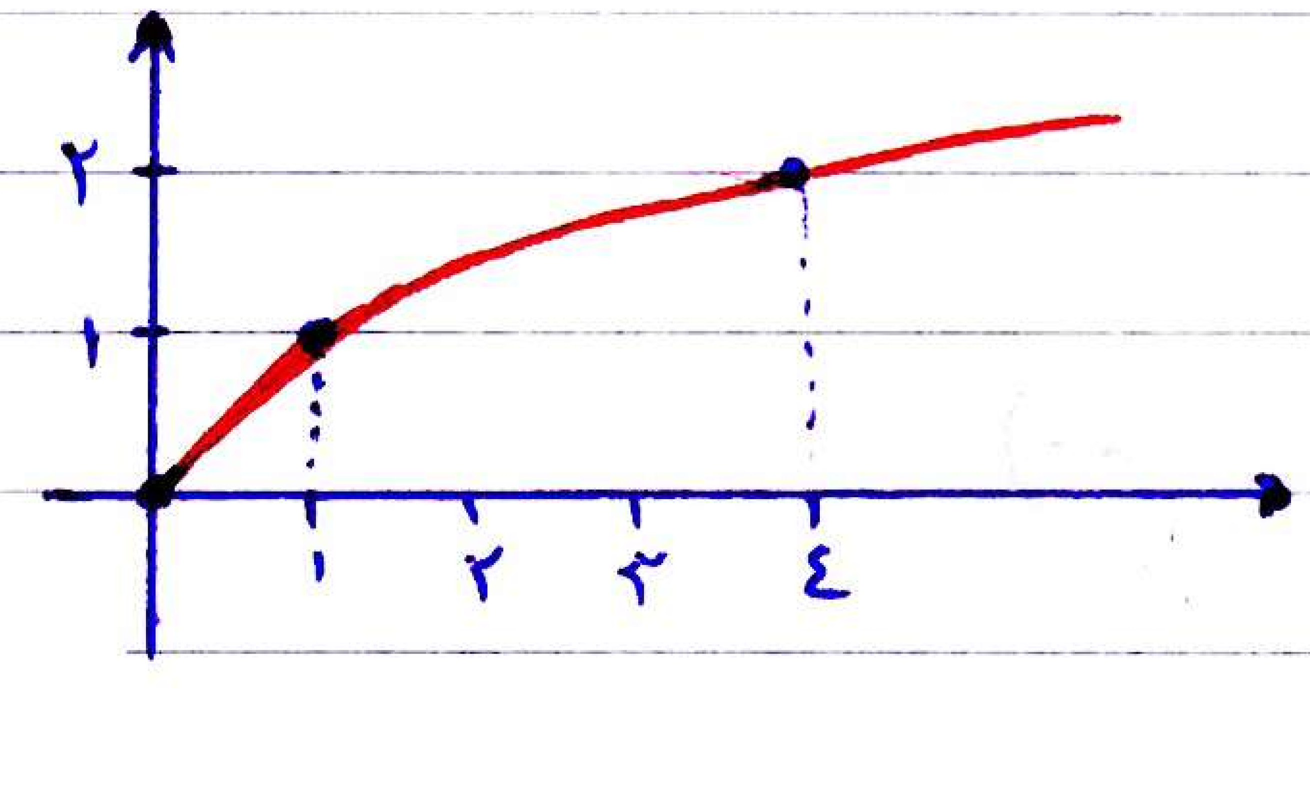
توجه: در این کتاب فقط توابع رادیکالی با فرجه ی ۲ تعریف شده اند

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x}$

$x=0$

برای اینکار ریشه ی عبارت زیر رادیکال را یافته سپس در یک جدول حداقل ۳ مقدار قابل تعریف به x داده تا نقاط از تابع مشخص شوند.

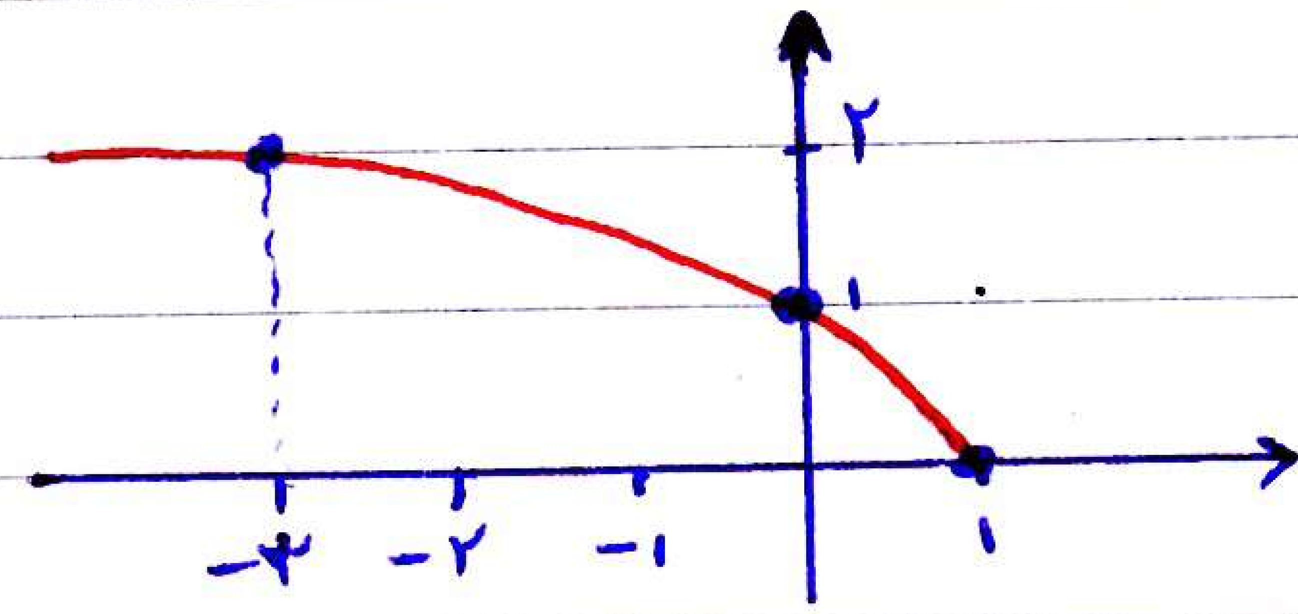


x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

ب) $y=\sqrt{1-x}$

1

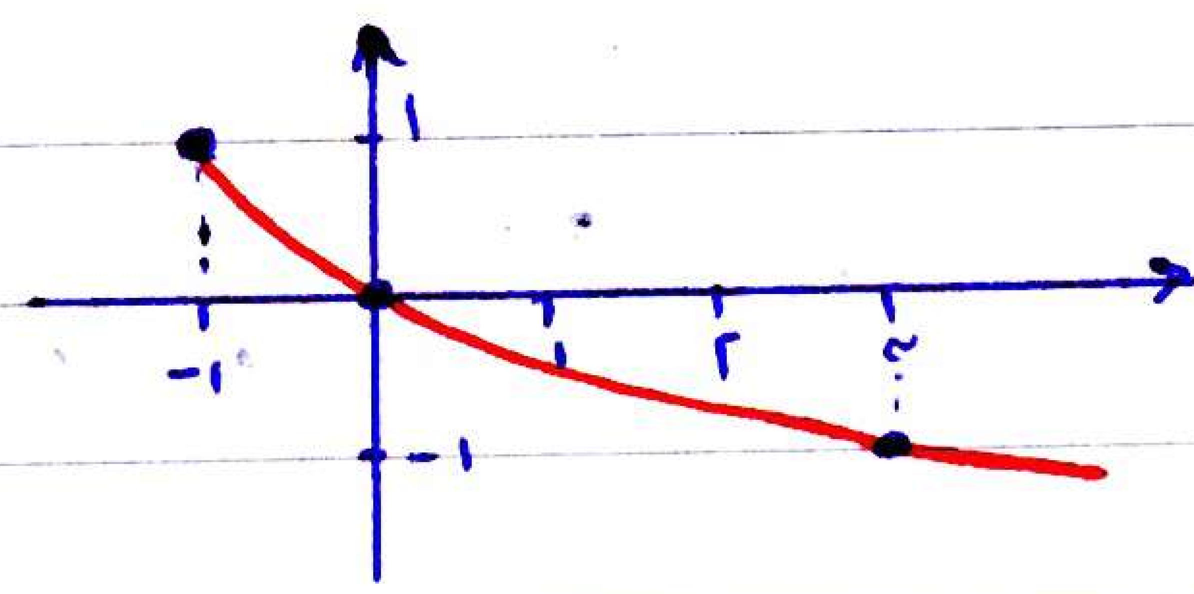
x	1	0	-3
y	0	1	2



پ) $y=1-\sqrt{x+1}$

-1

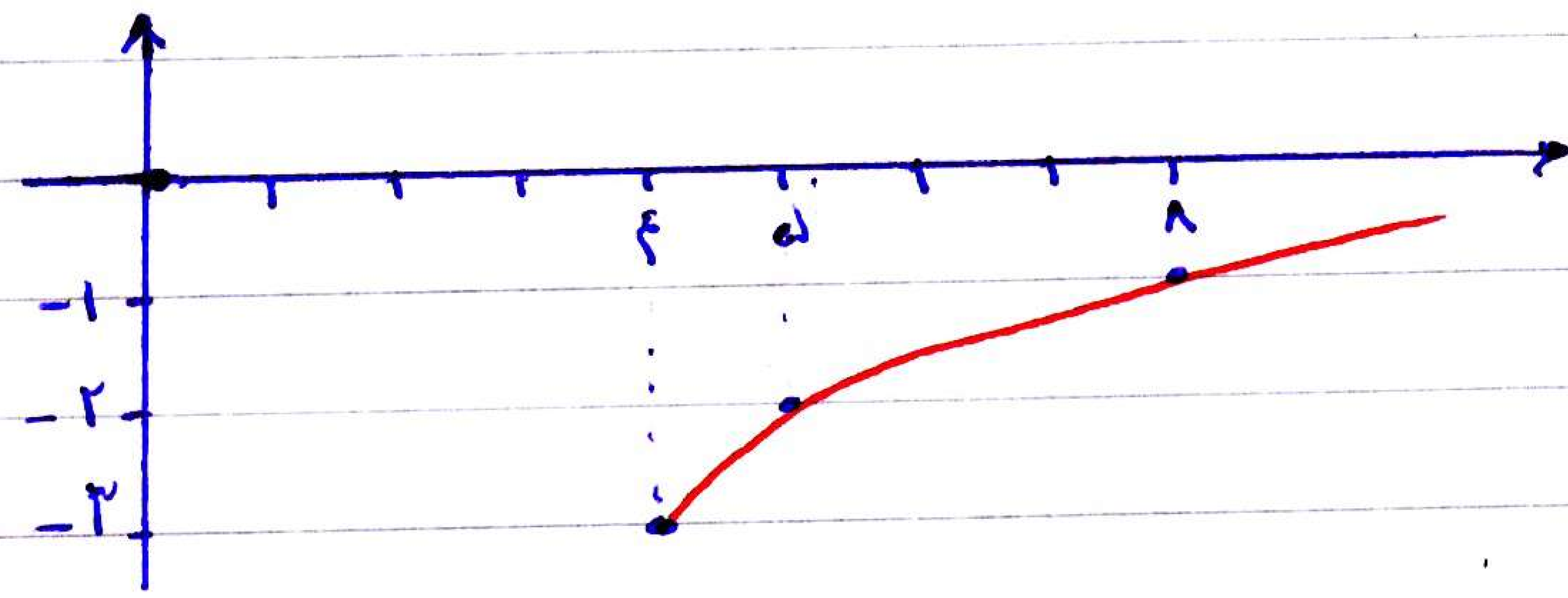
x	-1	0	3
y	1	0	-1



ت) $y=-3+\sqrt{x-4}$

4

x	4	5	8
y	-3	-2	-1



دامنه‌ی توابع رادیکالی: تابع به ازای آن دسته از اعداد حقیقی که زیر رادیکال را منفی نمی‌کنند قابل تعریف است.

بنابراین برای تعیین دامنه‌ی تابعی به فرم $\sqrt{u}$ کافیست نامعادله‌ی $u\geq 0$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به عنوان دامنه بپذیریم.

مثال: دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=-2+\sqrt{x-5}$

$x-5\geq 0 \longrightarrow x\geq 5 \longrightarrow D_f=[5,+\infty)$

ب) $g(x)=\dfrac{2+\sqrt{1-3x}}{5}$

$1-3x\geqslant 0 \longrightarrow -3x\geqslant -1 \xrightarrow{\div(-3)} x\leqslant \dfrac{1}{3} \Rightarrow D_g=(-\infty,\dfrac{1}{3}]$

پ) $h(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$

$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \longrightarrow x\geqslant 2 \\ 2-x\geqslant 0 \longrightarrow x\leqslant 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=2 \Longrightarrow D_h=\{2\}$

ت) $k(x)=\sqrt{1-x^2}$

$1-x^2\geqslant 0$
$\downarrow$
± 1

$\begin{array}{c|c|c|c|c} -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - & \\ & & \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} & & \end{array} \Rightarrow D_k=[-1,1]$

ث) $p(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

$\dfrac{x}{x-2}\geqslant 0$ ($x \to 0$, $x-2 \to 2$)

$\begin{array}{ccccccc} -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & \text{ت ن} & + & \\ & \text{ج} & \text{ج} & & & \text{ج} & \end{array} \Rightarrow D_p=(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$

توجه: هرگاه تابع به صورت ترکیب دو تابع گویا و رادیکال باشد باید با دقت بیشتری به محاسبه‌ی دامنه‌ی آن پرداخت.

مثال: $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$

طبق تعریف رادیکال باید $x-1\geqslant 0$ باشد از طرفی مخرج نباید صفر شود پس می‌نویسیم:

$x-1>0 \longrightarrow x>1 \Longrightarrow D_f=(1,+\infty)$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

مثال: $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{2-x}}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \longrightarrow x \leq 2 \\ 1-\sqrt{2-x} \neq 0 \longrightarrow \sqrt{2-x} \neq 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D = [0, 2] - \{1\}$$

مثال: بازای چه مقدار از a تابع $f(x) = \sqrt{x^2+2x+a}$ برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده باشد؟

باید عبارت درجه دوم زیر رادیکال همواره نامنفی باشد پس $\Delta \leq 0$ است.

$$\Delta = 4 - 4a \leq 0 \Rightarrow -4a \leq -4 \xrightarrow{\div(-4)} a \geq 1$$

تمرین: دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2-1}$

$$\left.\begin{array}{l} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \\ x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \end{array}\right\} \longrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \{\pm 1\}$$

ب) $f(x) = 2 - 3\sqrt{2x-7}$

$$2x-7 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow D_f = [\frac{7}{2}, +\infty)$$

پ) $f(x) = \sqrt{-x^2}$

$$-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_f = \{0\}$$

مثال هایی از رسم نمودار به کمک انتقال

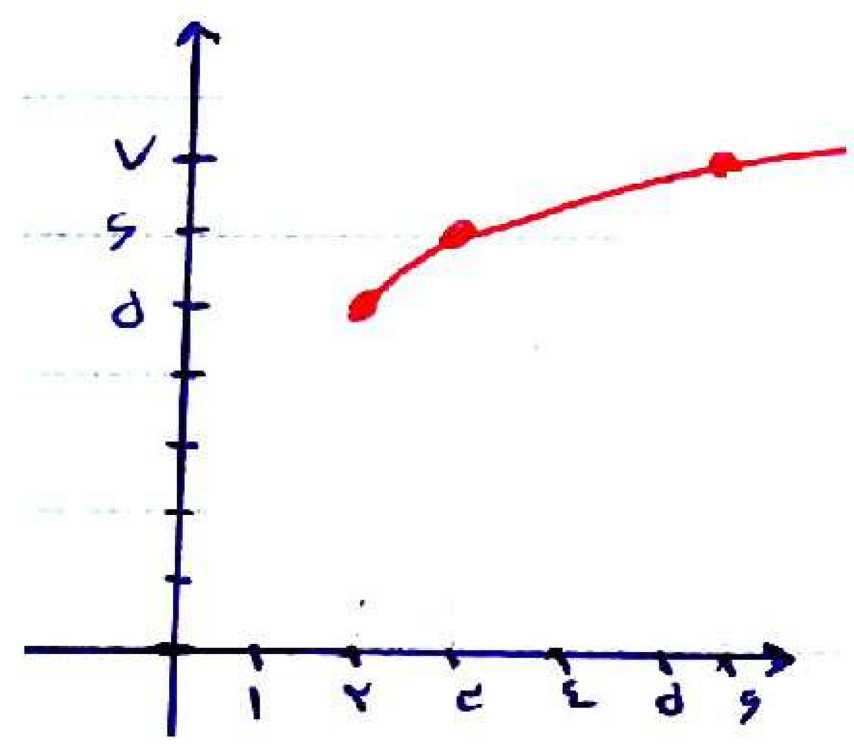
الف) $y=\sqrt{x-2}+5$

$y=\sqrt{x}$

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

$\xrightarrow[+5]{+2}$

x	۲	۳	۶
y	۵	۶	۷



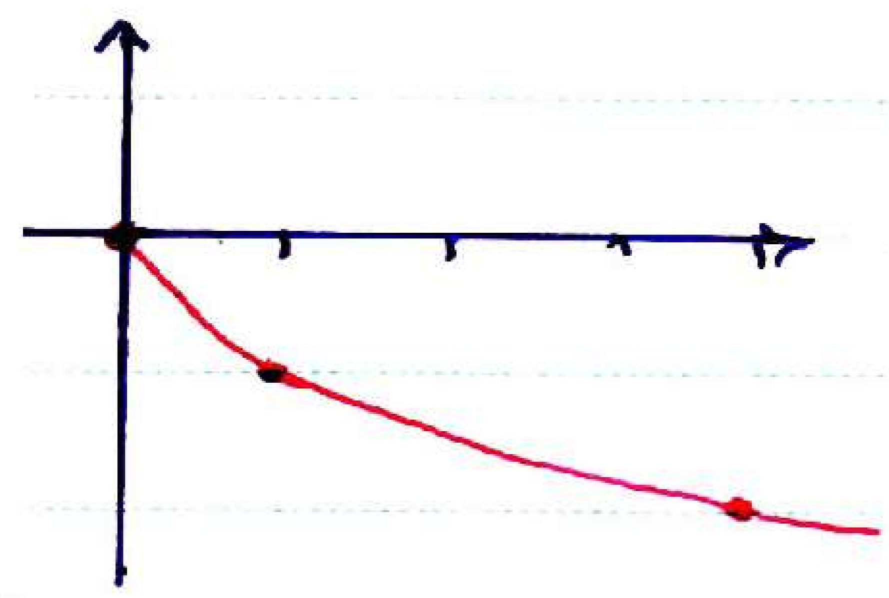
ب) $y=-\sqrt{x}$

$y=\sqrt{x}$

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

$\xrightarrow[\times(-)]{}$

x	۰	۱	۴
y	۰	۱-	۲-



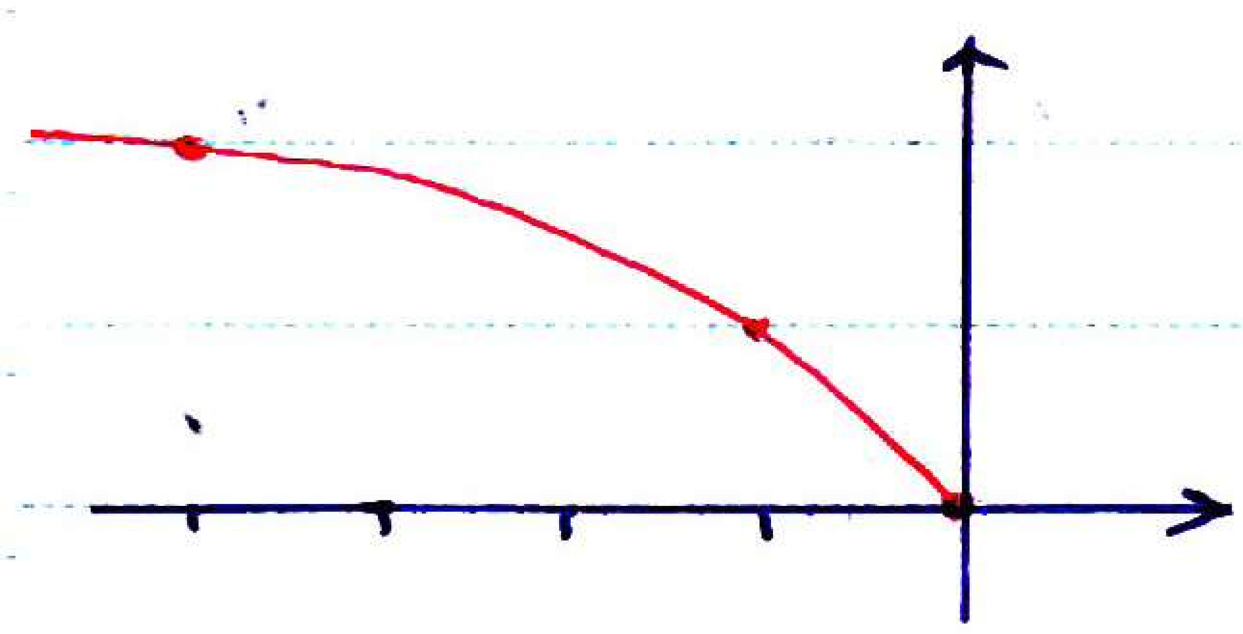
پ) $y=\sqrt{-x}$

$y=\sqrt{x}$

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

$\xrightarrow{\times(-)}$

x	۰	۱-	۴-
y	۰	۱	۲



ت) $y=\sqrt{2x-1}$

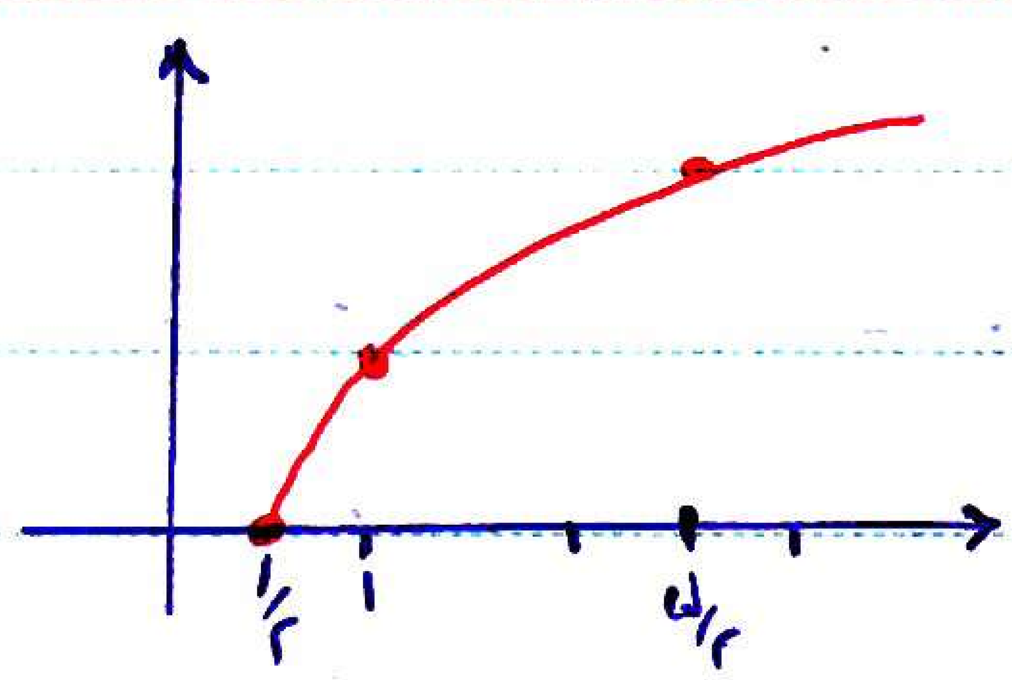
$y=\sqrt{x}$

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

$2x-1=t \rightarrow x=\frac{t+1}{2}$

$\xrightarrow{+1 \text{ و } \div 2}$

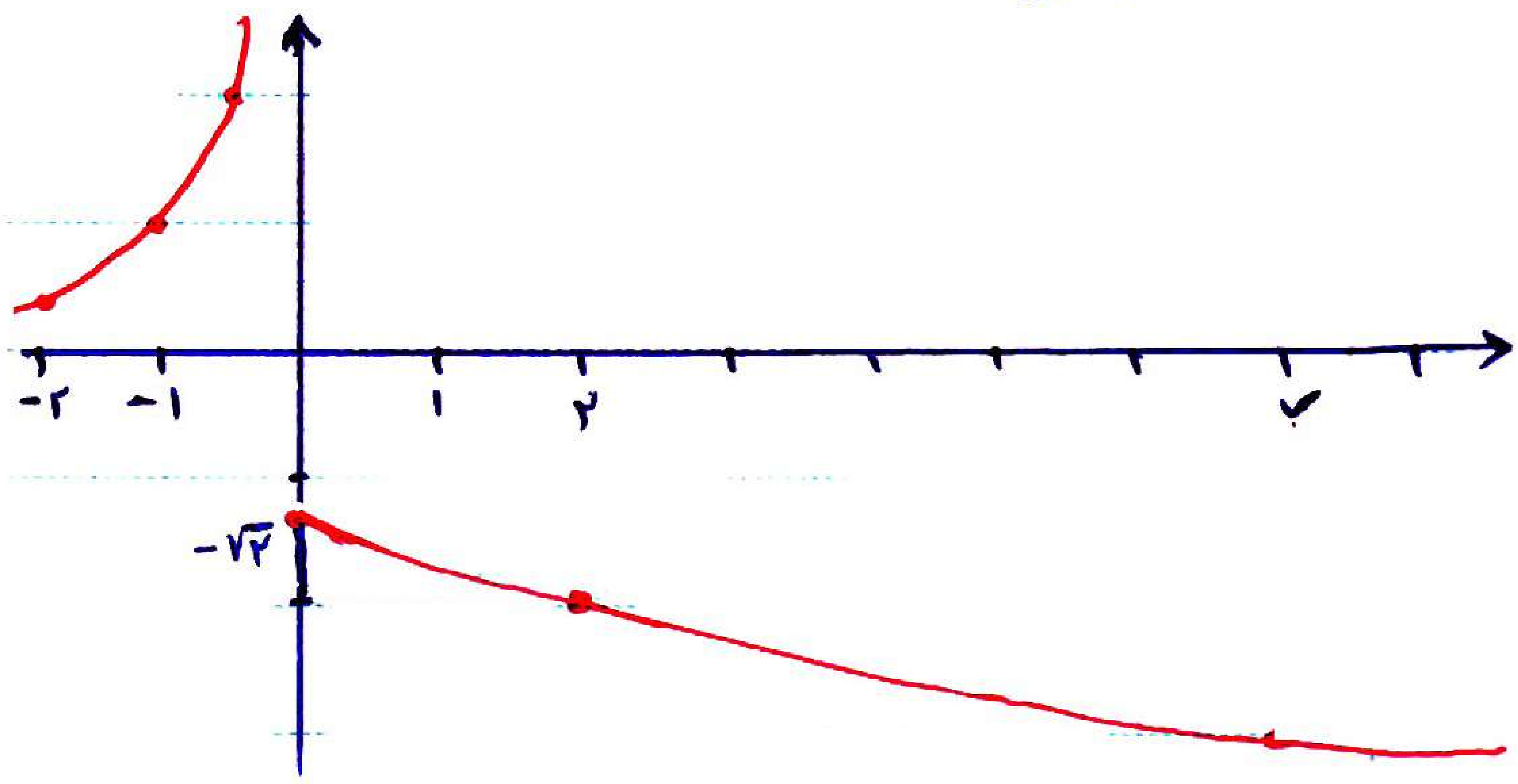
x	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{5}{2}$
y	۰	۱	۲



ث) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & x<0 \\ -\sqrt{x+2} & x\geq 0 \end{cases}$

x	$-\frac{1}{2}$	-1	-2
y	۲	۱	$\frac{1}{2}$

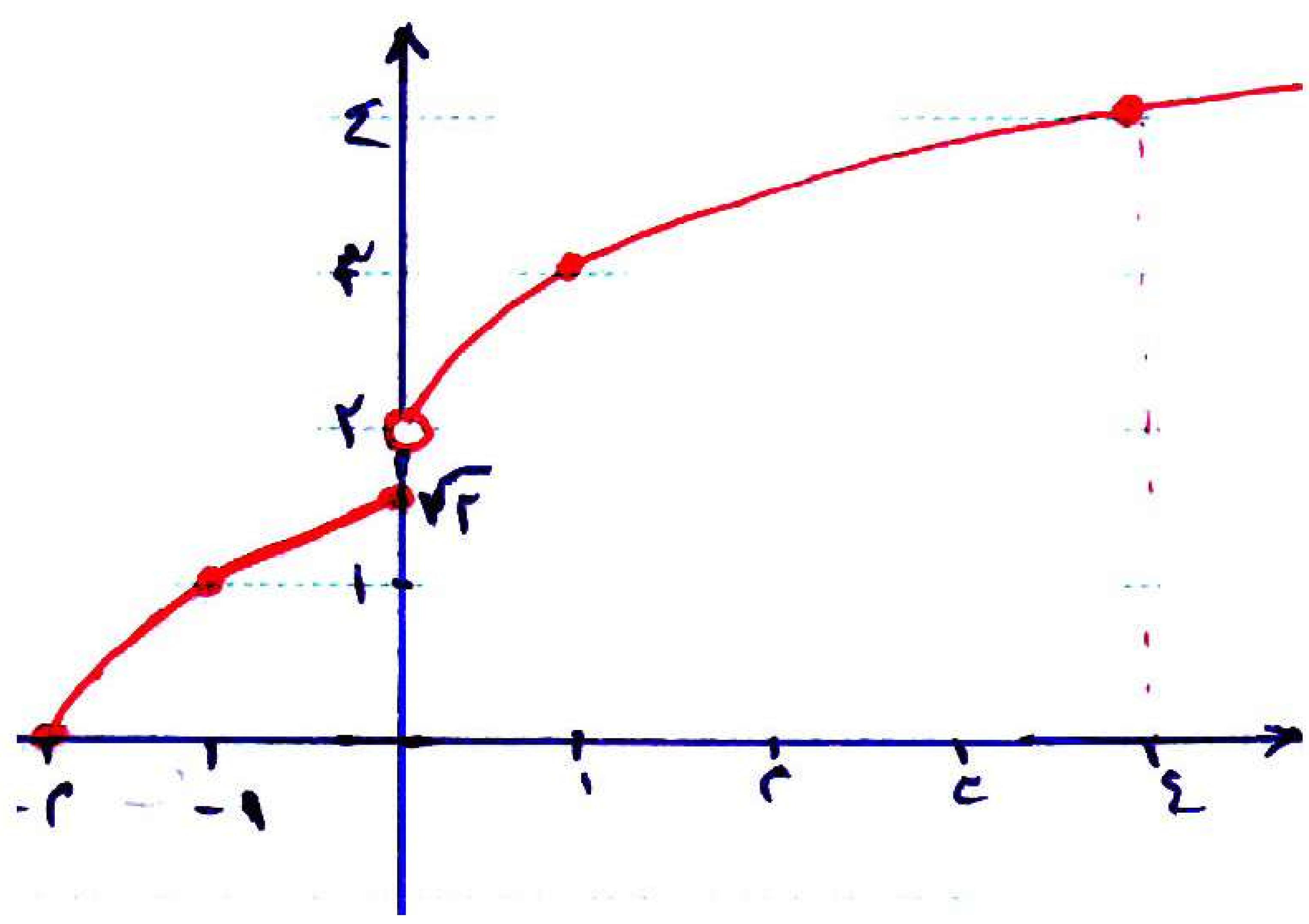
x	۰	۲	۷
y	$-\sqrt{2}$	-2	-3



ج) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+2 & x>0 \\ \sqrt{x+2} & -2\leq x\leq 0 \end{cases}$

x	۰	۱	٤
y	۲	۳	٤

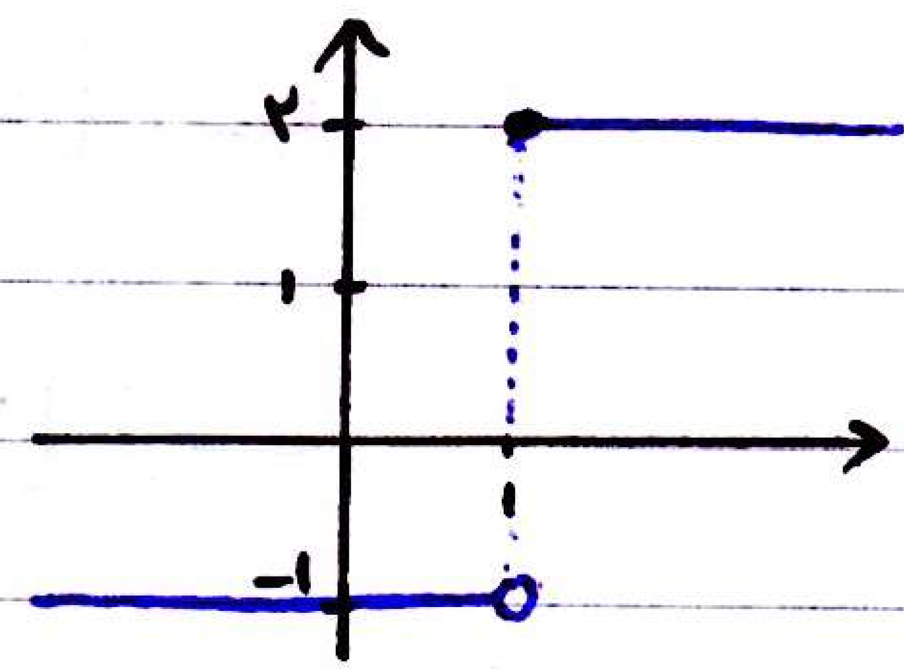
x	-2	-1	۰
y	۰	۱	$\sqrt{2}$



۵) توابع پله‌ای:

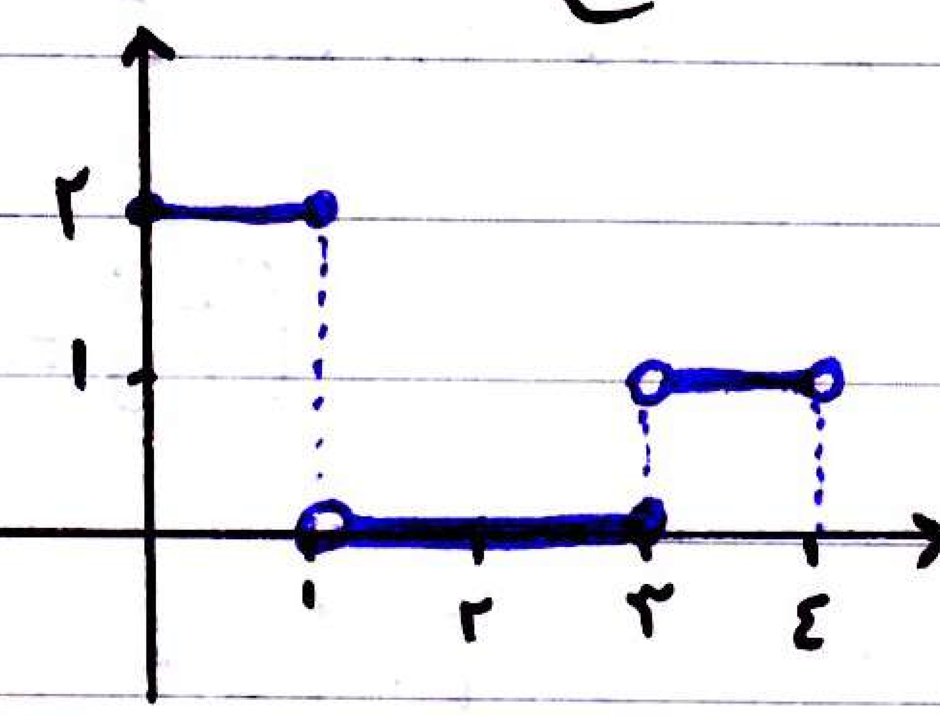
به تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به صورت تعدادی بازه‌ی جدا از هم نوشت و به هر یک از این بازه‌ها، تنها یک عدد در برد نسبت داد، تابع پله‌ای گویند.

به عنوان نمونه تابع $f(x)=\begin{cases}2 & ,\ x\geq 1\\ -1 & ,\ x<1\end{cases}$ یک تابع پله‌ای است که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:

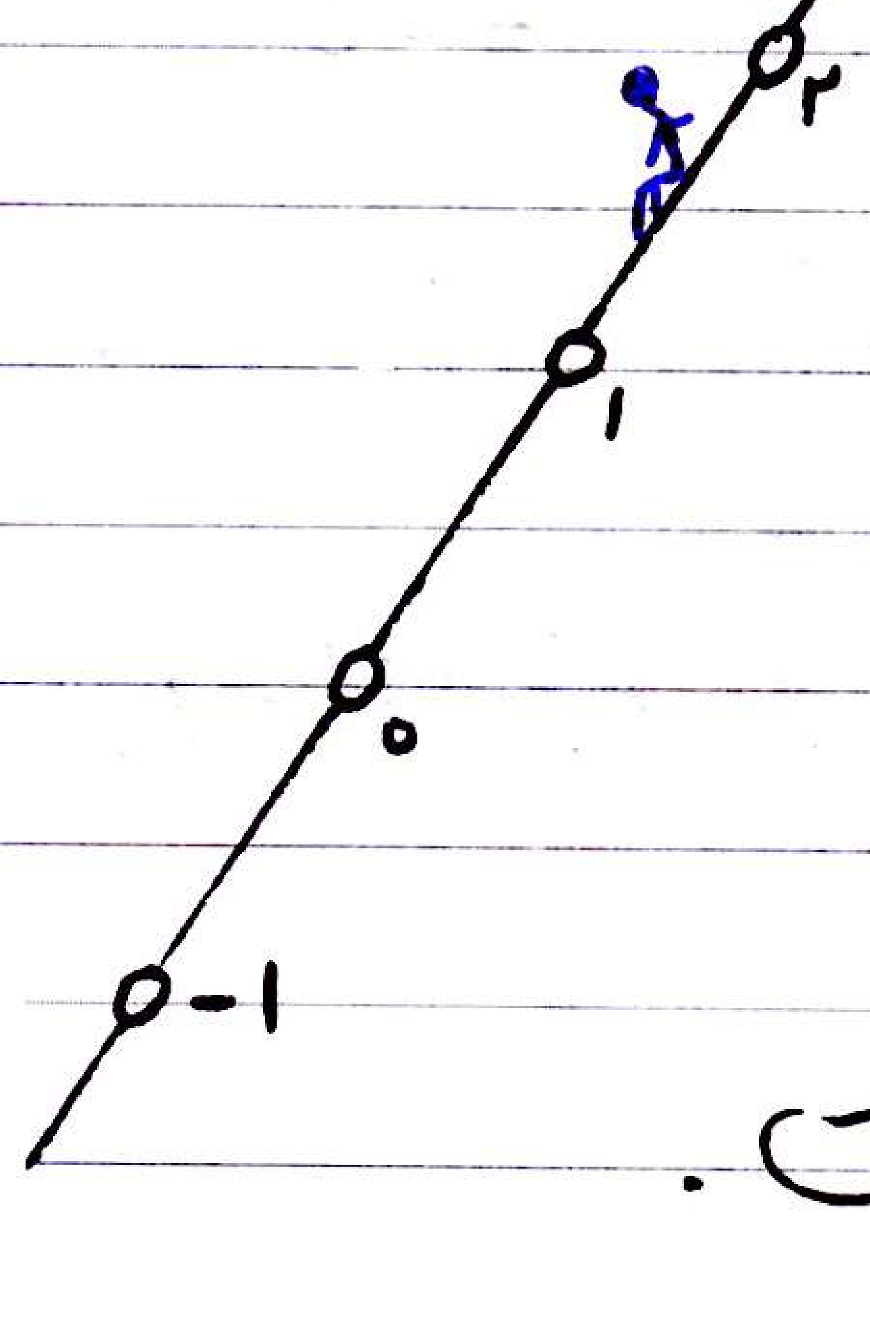


مثال: نمودار تابع پله‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}2 & x\in[0,1]\\ 0 & x\in(1,3]\\ 1 & x\in(3,4)\end{cases}$$



نوجه: مشهورترین تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح می‌باشد که در زیر معرفی می‌کنیم.



فرض کنید طبق شکل روبرو، سرسره‌ای چنان ساخته شده که در اعداد صحیح دارای حفره است.
اگر شخصی روی هر قسمت سرسره بنشیند، سر خورده و در اولین حفره خواهد افتاد.
به عنوان نمونه اگر شخصی طبق شکل بین دو حفره‌ی ۱ و ۲ نشسته باشد، با سر خوردن درون حفره ۱ خواهد افتاد.
لذا گوییم اگر عددی بین ۱ و ۲ باشد جزء صحیح آن ۱ است.

همچنین اگر کسی روی عدد ۰/۵- بر سُرسُره قرار بگیرد درون حفره‌ی ۱- می‌افتد لذا گوییم جزء صحیح ۰/۵- برابر ۱- است و آن را به صورت

$[-0/5] = -1$ می‌نویسیم.

مثال: مقدار هر یک از جزء صحیح‌های زیر را بنویسید.

الف) $[0/5] = 0$ ب) $[5/7] = 5$

پ) $[-11/9] = -12$ ت) $[23/8] = 23$

توجه: جزء صحیح هر عدد صحیح، برابر خود آن عدد است زیرا اگر شخصی را روی سُرسُره دقیقاً روی حفره‌ی مثلاً ۲ بگذاریم بدون سُر خوردن از همان حفره پایین می‌افتد لذا $[2] = 2$

به طور مثال: $[49] = 49$ ، $[0] = 0$ ، $[-7] = -7$

تمرین (۱) حاصل عبارات زیر را بنویسید

الف) $[\sqrt{2}] = [1/4...] = 1$ ب) $[-\pi] = [-3/14...] = -4$

پ) $[\frac{21}{5}] = [4/2] = 4$ ت) $[\underbrace{\sqrt{2} - \sqrt{3}}_{\simeq 1/4... - 1/700...}] = [-0/3...] = -1$

تمرین (۲) با توجه به محدوده‌ی متغیر x، حاصل هر یک را بنویسید.

الف) $[x]$ ، $3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3$

ب) $[2x]$ و $1 \leq x < 2$

$$1 \leq x < 2 \xrightarrow{\times 2} 2 \leq 2x < 4$$

$$2 \leq 2x < 3 \Rightarrow [2x] = 2$$

$$3 \leq 2x < 4 \Rightarrow [2x] = 3$$

بنابراین $[2x]$ می‌تواند ۲ یا ۳ باشد.

پ) $\left[\dfrac{x^2}{1+x^2}\right]$ ، $x \in \mathbb{R}$

برای هر عدد حقیقی x داریم $0 \leq \dfrac{x^2}{1+x^2} < 1$ است، زیرا مخرج آن همواره از صورت یک واحد بزرگتر است.

بنابراین جزء صحیح آن برابر صفر است: $\left[\dfrac{x^2}{1+x^2}\right] = 0$

تمرین (۳) به ازای چه مقدار از x ، تساوی‌های زیر برقرار است؟

الف) $[x] = 5 \longrightarrow 5 \leq x < 6$

ب) $[2x] - 3 = 0 \longrightarrow [2x] = 3 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4 \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{2} \leq x < 2$

پ) $2[x] + 5 = 0 \longrightarrow 2[x] = -5 \Rightarrow [x] = \frac{-5}{2} \longrightarrow$ چنین x ی وجود ندارد

نکته: اگر n عدد صحیح و x عددی حقیقی باشد آنگاه: $[x+n] = [x] + n$

به طور مثال $[x+2] = [x] + 2$ و $[x-5] = [x] - 5$

توجه داشته باشید که در مورد $[x+1/7]$ نکته فوق صادق نیست زیرا ۱/۷ عدد صحیح نیست.

مثال: معادله‌ی $3[x+2]-[x-1]=9$ را حل کنید.

$$3([x]+2)-([x]-1)=9 \Rightarrow 3[x]+6-[x]+1=9$$

$$\Rightarrow 2[x]=2 \xrightarrow{\div 2} [x]=1 \Rightarrow 1\leqslant x<2$$

رسم نمودار توابع جزء صحیح:

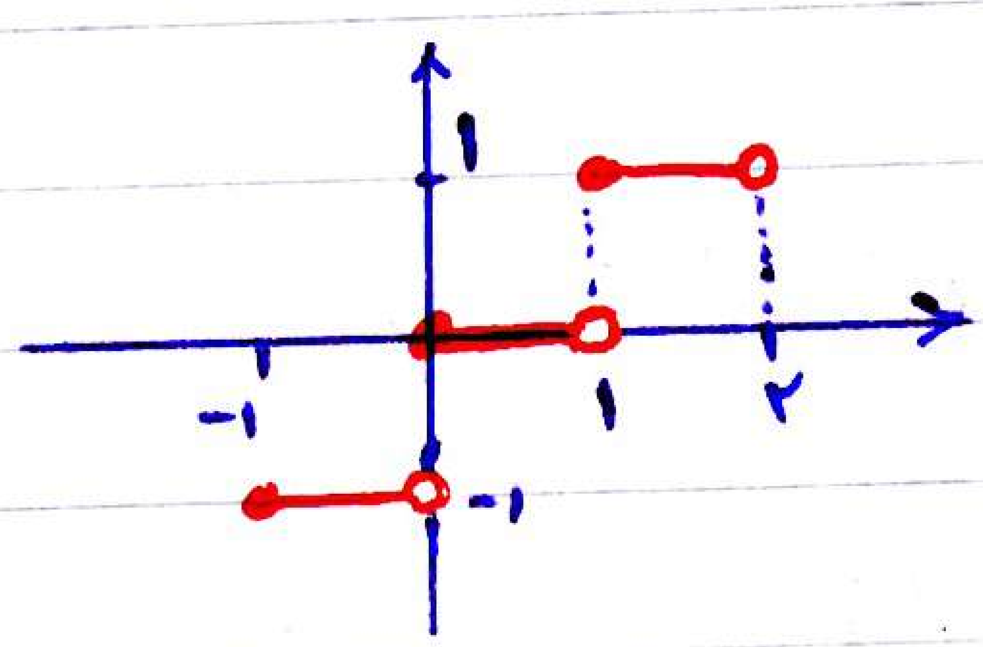
برای رسم این نوع توابع باید تابع را در بازه‌های کوچکتری تکه تکه کرد به طوری که اعداد موجود در هر بازه دارای یک مقدار جزء صحیح منحصر به فرد باشند.

به طور مثال نمودار $y=[x]$ را در بازه‌ی $[-1,2)$ رسم می‌کنیم.

اگر $-1\leqslant x<0 \Rightarrow [x]=-1 \to y=-1$

اگر $0\leqslant x<1 \Rightarrow [x]=0 \to y=0$

اگر $1\leqslant x<2 \Rightarrow [x]=1 \to y=1$



مثال: نمودار توابع زیر را در دامنه‌ی آنها رسم کنید.

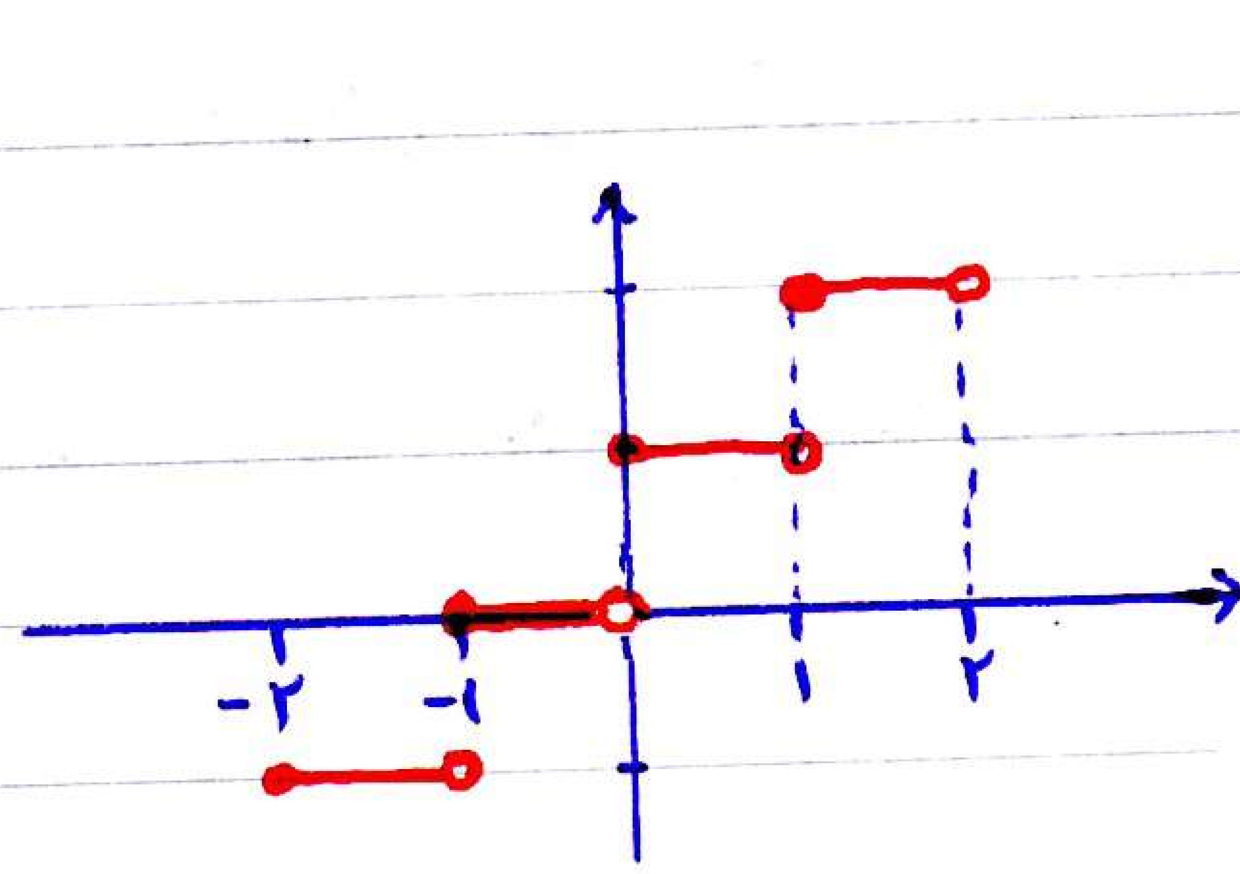
الف) $f(x)=[x]+1$ و $D_f=[-2,2)$

اگر $-2\leqslant x<-1 \Rightarrow [x]=-2 \to y=-2+1=-1$

اگر $-1\leqslant x<0 \Rightarrow [x]=-1 \to y=-1+1=0$

اگر $0\leqslant x<1 \Rightarrow [x]=0 \to y=0+1=1$

اگر $1\leqslant x<2 \Rightarrow [x]=1 \to y=1+1=2$

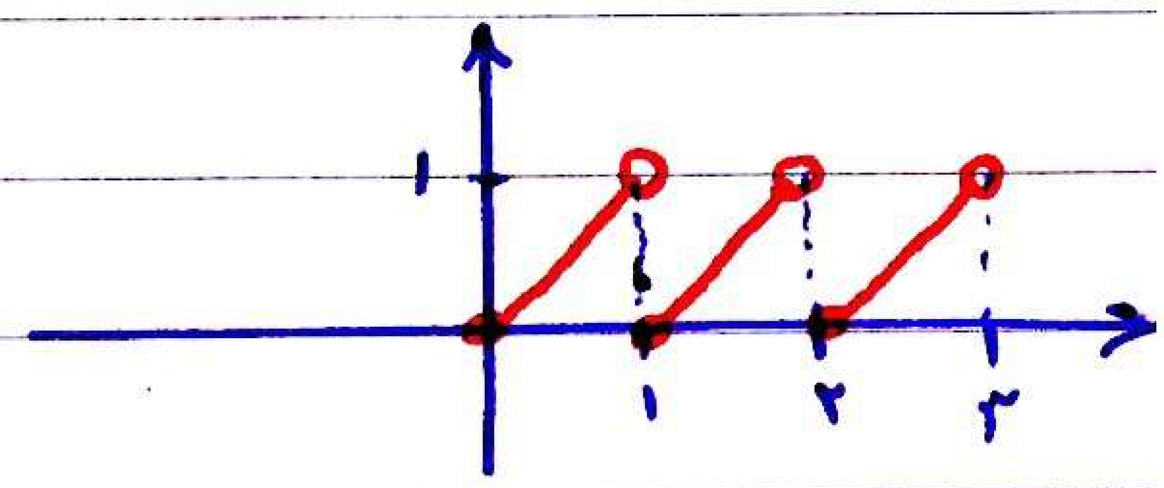


ب) $f(x) = x - [x] \quad , \quad D_f = [0,3)$

اگر $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \longrightarrow y = x$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

اگر $1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \longrightarrow y = x - 1$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

اگر $2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \longrightarrow y = x - 2$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

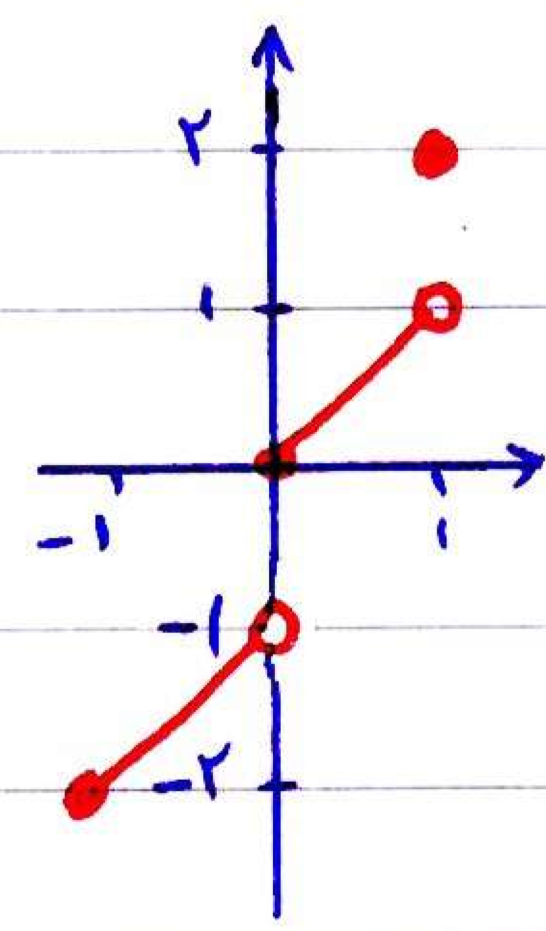


پ) $f(x) = x + [x] \quad , \quad D_f = [-1,1]$

اگر $-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \longrightarrow y = x - 1$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & -2 & -1 \end{array}$

اگر $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \longrightarrow y = x$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

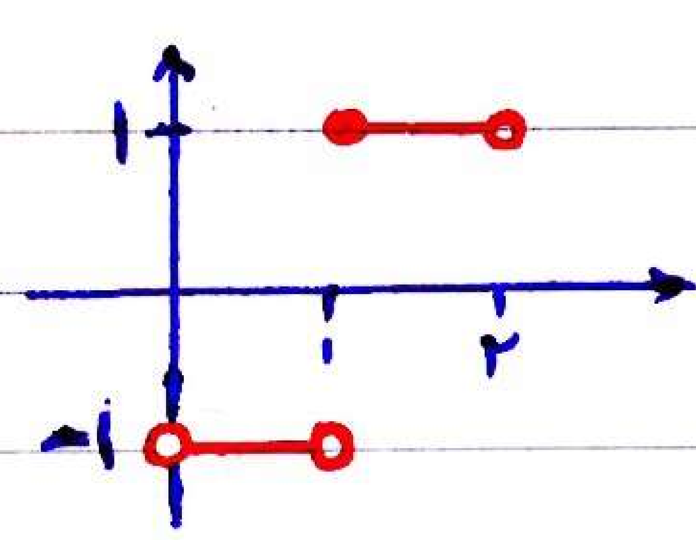
اگر $x = 1 \Rightarrow [x] = 1 \longrightarrow y = 1 + 1 = 2$



ت) $f(x) = 2[x] - 1 \quad , \quad D_f = (0,2)$

اگر $0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \longrightarrow y = -1$

اگر $1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \longrightarrow y = 1$



تساوی دو تابع:

دو تابع f و g با هم مساوی‌اند هرگاه نمودارهای آنها در یک دستگاه مختصات دقیقاً بر هم منطبق باشند.

نکته: گوییم $f = g$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

① $D_f = D_g$ (دامنه‌ها برابر باشند)

② برای هر x از دامنه $f(x) = g(x)$ باشد.

مثال: آیا دو تابع $f = \{(-1,2),(0,3),(1,4)\}$ و $g = \{(-1,2),(0,6),(1,4)\}$ با هم برابرند؟

شرط اول $D_f = D_g = \{-1,0,1\}$ برقرار است ولی $f(0) = 3$ و $g(0) = 6$ است یعنی x ی از دامنه وجود دارد که $f(x) \neq g(x)$ پس دو تابع مساوی نیستند ($f \neq g$).

مثال: آیا دو تابع $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = 1$ با هم برابرند؟

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R}$

بنابراین $D_f \neq D_g$ و در نتیجه دو تابع برابر نیستند.

مثال: آیا دو تابع $f(x) = [x+2]-1$ و $g(x) = [x-3]+4$ با هم برابرند؟

با توجه به این که $D_f = D_g = \mathbb{R}$، شرط اول برقرار است. همچنین به ازای هر x از دامنه داریم:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= [x+2]-1 = [x]+2-1 = [x]+1 \\ g(x) &= [x-3]+4 = [x]-3+4 = [x]+1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow f(x) = g(x) \longrightarrow \text{شرط دوم برقرار است}$$

بنابراین $f = g$ است.

مثال: به‌ازای چه مقدار از a و b دو تابع $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ و $g(x)=\frac{x^2+ax+b}{(x-1)^2}$ باهم مساوی هستند؟

$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow$ شرط اول برقرار است

حال باید به‌ازای هر x از دامنه $f(x)=g(x)$ باشد.

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{x^2+ax+b}{(x-1)^2} \xrightarrow{\times (x-1)^2} (x+2)(x-1) = x^2+ax+b$$

$$\Longrightarrow x^2+x-2 = x^2+ax+b \Longrightarrow a=1 \quad , \quad b=-2$$

مثال: کدام یک از جفت توابع داده شده باهم برابرند؟

الف) $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$, $g(x)=x^2-1$

$x^2+1=0 \longrightarrow$ جواب حقیقی ندارد $\Longrightarrow D_f=\mathbb{R} \xrightarrow{D_g=\mathbb{R}} D_f = D_g$ ①

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}{\cancel{x^2+1}} = x^2-1 = g(x) \quad ②$$

①, ② $\Longrightarrow f=g$

ب) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x^2-x}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \longrightarrow x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [1,+\infty)$$

$$x^2-x \geq 0 \quad \begin{array}{ccccccc} -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline & + & & - & & + & \end{array} \Rightarrow D_g = (-\infty,0] \cup [1,+\infty)$$

$$\Longrightarrow D_f \neq D_g \Longrightarrow f \neq g$$

پ) $f(x)=\begin{cases}1 & , x>0\\ -1 & , x<0\end{cases}$, $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}-\{0\}$ ①

اگر $x>0 \Rightarrow f(x)=1$ و $g(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1 \longrightarrow f(x)=g(x)$

اگر $x<0 \Rightarrow f(x)=-1$ و $g(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1 \longrightarrow f(x)=g(x)$

$\Rightarrow f(x)=g(x)$ ②

$① , ② \Longrightarrow f=g$

ت) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $g(x)=\tan x \cdot \cot x$

هر چند همگی می دانیم $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ و $\tan x \cot x=1$ است ولی دو تابع برابر نیستند ، به عنوان نمونه به ازای $x=90^\circ$ ، تابع $g(x)$ تعریف نشده ولی تابع f تعریف شده است ، به عبارت دیگر دامنه های یکسان ندارند پس $f\neq g$.

ث) $f(x)=\dfrac{4^x-1}{2^x+1}$, $g(x)=\dfrac{4^x-2^x}{2^x}$

① $D_f = D_g = \mathbb{R}$: معادلات $2^x=0$ و $2^x+1=0$ ریشه ندارند پس

$f(x)=\dfrac{(2^x)^2-1}{2^x+1}=\dfrac{\cancel{(2^x+1)}(2^x-1)}{\cancel{2^x+1}}=2^x-1$

$g(x)=\dfrac{(2^x)^2-2^x}{2^x}=\dfrac{\cancel{2^x}(2^x-1)}{\cancel{2^x}}=2^x-1$

$\Rightarrow f(x)=g(x)$ ②

$① , ② \Longrightarrow f=g$

تست: نمودار تابع $f(x)=\left||5x|-|2x|\right|$ بر نمودار کدام تابع زیر منطبق است؟

① $y=3x$ ② $y=|5x|-2x$ ③ $y=|3x|$ ④ $y=|7x|$

$f(x)=\left|5|x|-2|x|\right|=\left|3|x|\right|=|3x| \longrightarrow$ گ ③

تمرین (۱) به ازای چه مقدار از a , b تابع $f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{x^2+2}$ تابع همانی است؟

میدانیم تابع همانی به صورت $y=x$ می باشد بنابراین:

$\dfrac{x^3+ax+b}{x^2+2}=x \Rightarrow x^3+ax+b=x^3+2x \Rightarrow a=2$ و $b=0$

تمرین (۲) به ازای چه مقدار از k دو تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3\\ k+4, & x=3\end{cases}$ و $g(x)=x+3$ باهم برابرند؟

اگر $x\neq 3 \rightarrow f(x)=\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=x+3=g(x)$

اگر $x=3 \longrightarrow f(3)=k+4$ و $g(3)=6 \Rightarrow k+4=6 \Rightarrow k=2$

تمرین (۳) با فرض مساوی بودن دو تابع $f=\{(-1,1),(4,a+2)\}$ و $g=\{(b^2,5),(c,d^3)\}$ مقادیر a، b، c و d را محاسبه نمایید.

با توجه به نامنفی بودن b^2 می توان نوشت:

$(b^2,5)=(4,a+2) \longrightarrow \begin{cases} b^2=4 \rightarrow b=\pm 2\\ a+2=5 \rightarrow a=3\end{cases}$

$(c,d^3)=(-1,1) \longrightarrow \begin{cases} c=-1\\ d^3=1 \longrightarrow d=1\end{cases}$

تمرین (۴) کدام یک از جفت توابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$, $g(x)=\sqrt{x-x^2}$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \longrightarrow x\leq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f=[0,1]$$

$$x-x^2\geq 0 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} -\infty & 0 & & 1 & +\infty \\ \hline - & & + & & - \end{array} \longrightarrow D_g=[0,1]$$

$\Rightarrow D_f=D_g$ ①

$$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{1-x}=\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{x-x^2}=g(x) \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow f=g$$

ب) $f(x)=\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{|x|}$, $g(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$

$$D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\} \quad ①$$

$$f(x)=\frac{1}{|x|} \quad , \quad g(x)=\frac{|x|}{|x|^2}=\frac{1}{|x|} \Rightarrow f(x)=g(x) \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow f=g$$

پ) $f(x)=[1-x]$, $g(x)=1-[x]$

$$D_f=D_g=\mathbb{R}$$

$$f(x)=[1-x]=[-x+1]=[-x]+1\neq g(x)$$

$\longrightarrow f\neq g$

البته با یک مثال نیز می‌توان نشان داد دو تابع برابر نیستند:

$$f(0/5)=[1-0/5]=[0/5]=0 \quad \text{و} \quad g(0/5)=1-[0/5]=1-0=1 \Rightarrow f\neq g$$

ت) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$

$\hookrightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \longrightarrow D_f=D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ (1)

(2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}=g(x)$ یادآوری می‌کنم که $\sqrt{a^2}=|a|$ پس :

(1) , (2) $\Longrightarrow f=g$

ث) $f(x)=\left[\dfrac{x^2}{1+x^2}\right]$, $g(x)=0$

$D_f=D_g=\mathbb{R}$ (1)

میدانیم : $0\leqslant\dfrac{x^2}{1+x^2}<1 \Rightarrow f(x)=\left[\dfrac{x^2}{1+x^2}\right]=0=g(x)$ (2)

(1) , (2) $\Longrightarrow f=g$

تمرین (ط) تحت چه شرایطی دو تابع $f(x)=x^2-x$, $g(x)=2x-2$ با هم برابرند؟

$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-x=2x-2 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1$, $x=2$

کافی است $D_f=D_g=\{1,2\}$ تعریف کنیم ، دو تابع برابر خواهند بود.

هُشدار:

اکثر مواقع هر مطلبی که در فضای مجازی می دیدم
و خوشم می اومد برای دیگران ارسال می کردم تا اینکه
یه روز در نهج البلاغه خوندم :

هر چه را شنیدی برای مردم باز گو مکن ، که همین برای دروغ گویی (تو) کافیست !

یعنی منو این همه گناه ! مولا جان قول میدم از این به بعد . . .

نمونه سوال و حل آنها

۱- توابع زیر را به صورت چند ضابطه ای بنویسید

الف) $g(x)=\dfrac{x}{[x]}$ ، $-1\le x<2$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} -x & -1\le x<0 \\ \text{تعریف نشده} & 0\le x<1 \\ x & 1\le x<2 \end{cases}$$

ب) $p(x)=[2x]-1$ ، $-1\le x<1$

$$-2\le 2x<2 \xleftarrow{\times 2}$$

$$p(x)=\begin{cases} -3 & -2\le 2x<-1 \\ -2 & -1\le 2x<0 \\ -1 & 0\le 2x<1 \\ 0 & 1\le 2x<2 \end{cases} \Rightarrow p(x)=\begin{cases} -3 & -1\le x<-\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2}\le x<0 \\ -1 & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\le x<1 \end{cases}$$

پ) $Q(x)=\left[\frac{1}{3}x\right]x$ ، $-3\le x<3$

$$-1\le \frac{x}{3}<1 \xleftarrow{\div 3}$$

$$Q(x)=\begin{cases} -x & -1\le \frac{x}{3}<0 \\ 0 & 0\le \frac{x}{3}<1 \end{cases} \longrightarrow Q(x)=\begin{cases} -x & -3\le x<0 \\ 0 & 0\le x<3 \end{cases}$$

۲- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

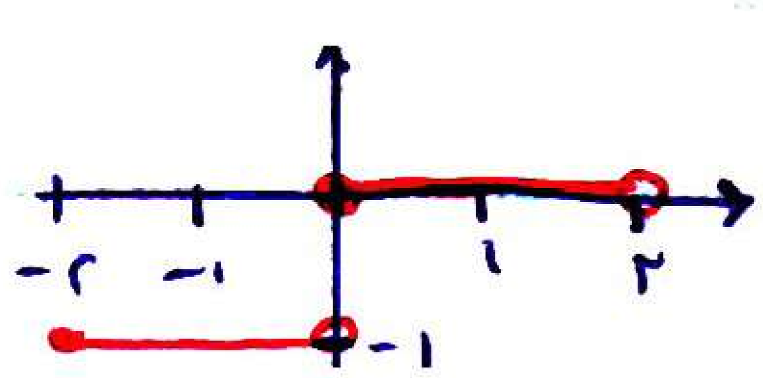
$g(x)=\left[\frac{1}{2}x\right]$ ، $-2\le x<2$

$$\xrightarrow{\div 2} -1\le \frac{1}{2}x<1$$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & -1\le \frac{1}{2}x<0 \\ 0 & 0\le \frac{1}{2}x<1 \end{cases} \longrightarrow g(x)=\begin{cases} -1 & -2\le x<0 \\ 0 & 0\le x<2 \end{cases}$$

x	-2	0
y	-1	-1

x	0	2
y	0	0



۳- کدامیک از جفت توابع داده شده با هم برابرند ؟

الف) $f(x) = x|x| \quad , g(x) = x^2$

$f(-1) = -1|x| = -1 \quad , \quad g(-1) = (-1)^2 = 1$

$\longrightarrow f(-1) \neq g(-1) \longrightarrow g \neq f$

ب) $f(x) = x|x| \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geqslant 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = x|x| = x\begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} = g(x) \Rightarrow f = g$

پ) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \quad , g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \times \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}}$

$= \dfrac{\cancel{x^2}\,(1-\sqrt{1+x^2})}{\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{x^2}} = -1+\sqrt{1+x^2} = g(x) \Rightarrow f = g$

۴- f تابعی با دامنه $[-1,2)$ و برد $[0,3]$ می‌باشد. دامنه و برد توابع زیر را بیابید

الف) $g(x) = f(x+3)$

$[-1,2) \xrightarrow{-3} [-4,-1) = D_g$ $\qquad R_g = [0,3]$

ب) $h(x) = 2f\left(\frac{-x}{3}\right) + 1$

$[-1,2) \xrightarrow{\times(-3)} (-6,3] = D_h$

$[0,3] \xrightarrow{\times 2} [0,6] \xrightarrow{+1} [1,7] = R_h$

پ) $p(x) = 1 - f(3x-1)$

با $3x-1 = t \to x = \frac{t+1}{3}$

$[-1,2) \xrightarrow{+1} [0,3) \xrightarrow{\div 3} [0,1) = D_p$

$[0,3] \xrightarrow{\times(-1)} [-3,0] \xrightarrow{+1} [-2,1] = R_p$