حسابان ۱

پایه ی یازدهم «رشته ی ریاضی فیزیک»

فصل ۵ : حد و پیوستگی

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@amerimath

مهر ۱۴۰۱

درس اوّل : مفهوم حد و فرآیند های حدی

مفهوم حد، یکی از مفاهیم اساسی در ریاضیات است. آشنایی با این مفهوم منجر به شناخت دقیق رفتار تابع می گردد. به همین جهت است این مفهوم در بسیاری از شاخه های علوم، از جمله فیزیک، ریاضی و اقتصاد کاربردهای فراوان دارد. با وجود پیچیدگی در تعریف حد در این درس فقط به درک شهودی آن می پردازیم. امّا قبل از ورود به بحث، همسایگی یک عدد حقیقی و سپس نماد های رایج برای درک مفهوم حد را معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : همسایگی یک عدد حقیقی

فرض کنید که a عددی حقیقی باشد. در این صورت هر بازه‌ی باز شامل a را یک همسایگی برای a می نامند.

در شکل فوق چون $a \in (m,n)$ است، پس بازه‌ی (m,n) یک همسایگی برای نقطه‌ی a محسوب می شود. حال اگر نقطه‌ی a را از همسایگی فوق حذف کنیم. مجموعه‌ی $(m,n)-\{a\}$ حاصل می شود که به آن همسایگی محذوف نقطه‌ی a می گویند.

مثال : بازه‌ی $(۱,۵)$ یک همسایگی نقطه‌ی ۲ و مجموعه‌ی $(۲,۶)-\{۵\}$ یک همسایگی محذوف نقطه‌ی ۵ است.

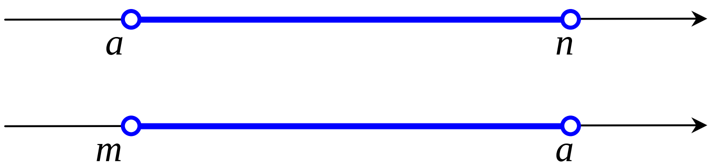
تذکر: برای هر نقطه مانند a می توان تعداد بیشمار بازه‌ی باز تعریف نمود که شامل a باشند. به عبارتی دیگر برای هر نقطه، همسایگی های بیشمار می توان تعریف کرد. مثلاً بازه های $(-۱,۱)$ و $(-۳,۲)$ همسایگی صفر هستند.

همسایگی چپ و همسایگی راست یک نقطه

اگر (m,n) یک همسایگی برای نقطه‌ی a باشد. در این صورت بازه‌ی (m,a) همسایگی چپ و بازه (a,n) همسایگی راست نقطه‌ی a تعریف می شوند.

همسایگی راست a

همسایگی چپ a



مثال : چون عدد ۳ عضو بازه‌ی (۱,۷) است. بنابر این بازه‌ی (۱,۳) همسایگی چپ ۳ و بازه‌ی (۳,۷) همسایگی راست ۳ است.

مثال : بازه‌ی (۱,۴) یک همسایگی چپ ۴ و یک همسایگی راست ۱ می باشد.

تمرین۱ : یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای عدد ۵ مثال بزنید.

تمرین۲ : آیا بازه‌ی (۲,۳) یک همسایگی برای ۲ می باشد؟ چرا؟

تمرین۳ : نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه‌ی ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

تمرین برای حل :

۴ : نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در یک همسایگی نقطه‌ی $x=۳$ تعریف شده باشند و $f(۳)\neq g(۳)$

۵ : تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۴-x^۲}}{x}$ را در نظر بگیرید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه‌ی این تابع را به دست آورید.

ب : بنویسید که دامنه‌ی تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

ج : آیا این تابع در $x=۱$ تعریف شده است؟

د : تابع در کدام یک همسایگی های راست یا چپ $x=۲$ تعریف شده است؟

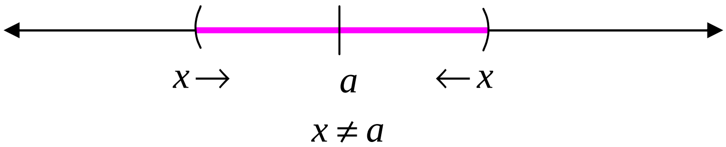
۶ : اگر بازه‌ی $(x-۱,x+۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه‌ی مقادیر x را به دست آورید.

***

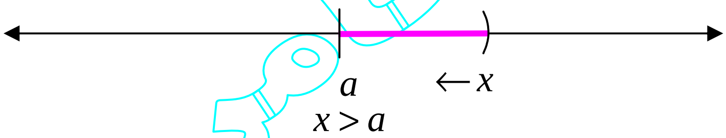
قسمت دوّم : مفهوم میل کردن یک متغیر به یک نقطه

وقتی که مقادیر متوالی یک متغیر (مانند x) به عدد ثابتی(مانند a) نزدیک شوند، به طوری‌که اختلاف آن‌ها بسیار ناچیز شود، گویند متغیر x به a میل کرده است. معمولاً در مفهوم میل کردن از نماد های زیر استـفاده می کنند.

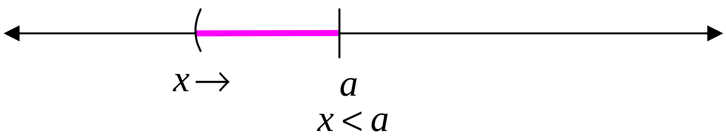
۱) منظور از نماد $x \to a$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a) ، یعنی متغیر x از دو طرف محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x \neq a$



۲) منظور از نماد $x \to a^{+}$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a از راست) ، یعنی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اخـتلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x > a$



۳) منظور از نماد $x \to a^{-}$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a از چپ) ، یعنی متغیر x فقط از طـرف چپ محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنـابراین اخـتلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x < a$



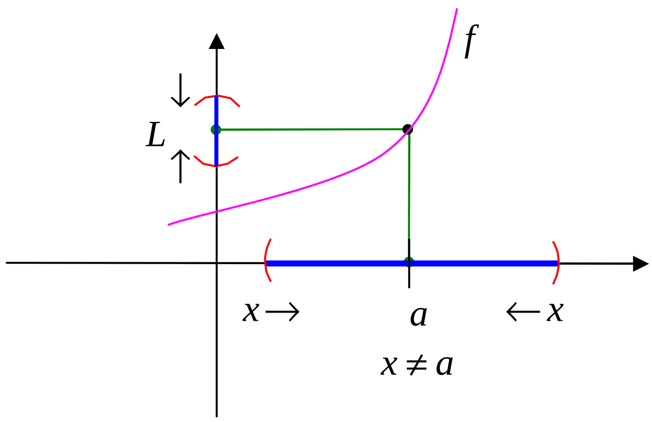
تمرین۷ : هر یک از نماد های زیر را بخوانید و مفهوم هر یک را بیان کنید.

الف : $x \to ۲^{+}$ ب : $x \to ۱^{-}$ ج : $x \to -۳$

***

قسمت سوّم : مفهوم شهودی حد تابع در یک نقطه

اگر تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی a (بجز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. در این صورت وقتی متغیر x از دو طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد L شود، گویند حد تابع f در $x=a$ برابر L است و می نویسند.



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

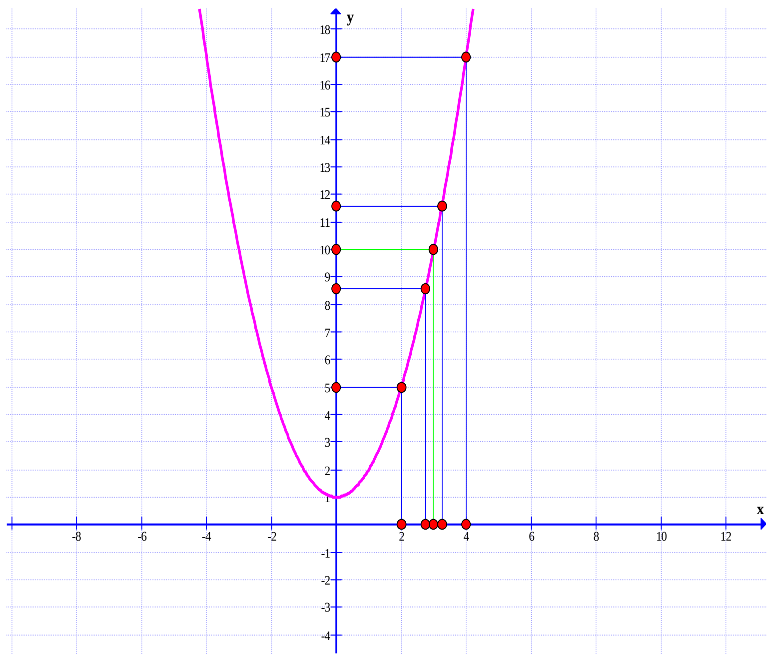
مثال : در تابع $f(x)=x^{۲}+۱$ اگر متغیر x از دو طرف به عدد ۳ نزدیک شود. آنگاه مقادیر تابع به عدد ۱۰ نزدیک می شوند. در این صورت $\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۰$. به جدول و نمودار زیر توجه کنید.

جدول

x	۲	۲/۵	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲۵	۳/۵	۴
$f(x)$	۵	۷/۲۵	۸/۵۶۲۵	۹/۴۱	۹/۹۴۰۱	۱۰	۱۰/۰۶۰۱	۱۰/۶۱	۱۱/۵۶۲۵	۱۳/۲۵	۱۷

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۰$$

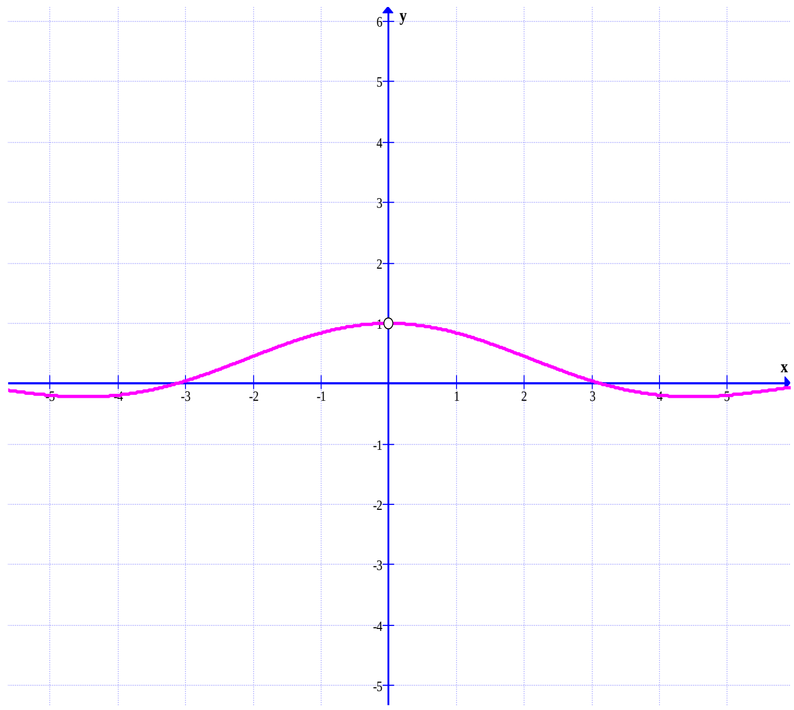
نمودار



تمرین ۸ : با تشکیل جدول مقدار حد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۱$ را محاسبه کنید.

تمرین ۹ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ رسم شده است. با توجه به این شکل حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=$$



توجه : حد تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ وقتی که x به سمت صفر میل کند، برابر یک است.

تمرین برای حل :

۱۰ : نمودار تابع زیر را در فاصله‌ی $[-۳,۳]$ رسم کنید. سپس با استفاده از نمودار مقدار حدود زیر را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & x\in Z\\ ۲ & x\notin Z\end{cases}$$

الف) $\lim_{x\to ۱}f(x)=$ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $\lim_{x\to\sqrt{۲}}f(x)=$

۱۱ : نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس مقدار $\lim_{x\to ۲}f(x)$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x>۲\\ x+۳ & x<۲\end{cases}$$

۱۲ : نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ی $x=۱$ دارای حد است ولی حد آن با مقدار تـابع در آن نقطـه برابر نباشد.

۱۳ : نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه‌ی $x=۲$ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده ولی g در ۲ تعریف نشده است.

***

قسمت چهارم : محاسبه‌ی حد تابع در یک نقطه

در اکثر مواقع با جایگزینی مقدار به جای x در معادله‌ی تابع ، می توان حد توابع را محاسبه نمود. این روش را روش جایگزینی مستقیم می نامند. برای مثال برای محاسـبه‌ی حـد تـابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ وقتـی x بـه سمت ۳ میل می کند. می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{۳+۱}=۲$$

تمرین برای حل :

۱۴ : حد تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ در نقطه‌ی $x=۶$ را بدست آورید.

۱۵ : حد تابع $f(x)=\dfrac{۴x}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۳$ را بدست آورید.

۱۶ : حد تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۱$ را محاسبه کنید.

۱۷ : تابع f به صورت زیر تعریف شده است. مقدار $\lim_{x\to ۴} f(x)$ را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۵ & x>۵ \\ x^{۲}-۴ & x\le ۵ \end{cases}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

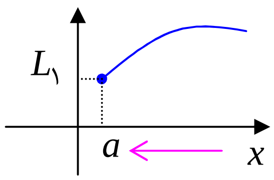
استان خوزستان

درس دوّم : حدهای یک طرفه

با مفهوم حد، در درس قبل تا حدودی آشنا شده اید. امّا اینکه متغیر x ، فقط از همسایگی راست یا فقط از همسایگی چپ یا هر دو به نقطه‌ی a میل می کند یا خیر، به دو مفهوم دیگر موسوم به حدود یک طرفه (حد راست و حد چپ) نیاز پیدا می کنیم.

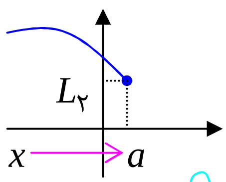
قسمت اوّل : حد های یک طرفه

اگر متغیر x فقط از یک طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند. با مفهوم حد های یک طرفه سروکار داریم.



حد راست : اگر تابع f در همسایگی راست نقطه‌ی a تعریف شده باشد. وقتی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد $L_{۱}$ شود، گویند حد راست تابع f در $x=a$ برابر $L_{۱}$ است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_{۱}$$



حد چپ : اگر تابع f در همسایگی چپ نقطه‌ی a تعریف شده باشد. وقتی متغیر x فقط از طرف چپ محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد $L_{۲}$ شود، گویند حد چپ تابع f در $x=a$ برابر $L_{۲}$ است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_{۲}$$

مثال : حد راست تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} x+۱=۲+۱=۳$$

مثال : حد چپ تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ به دست آورید.

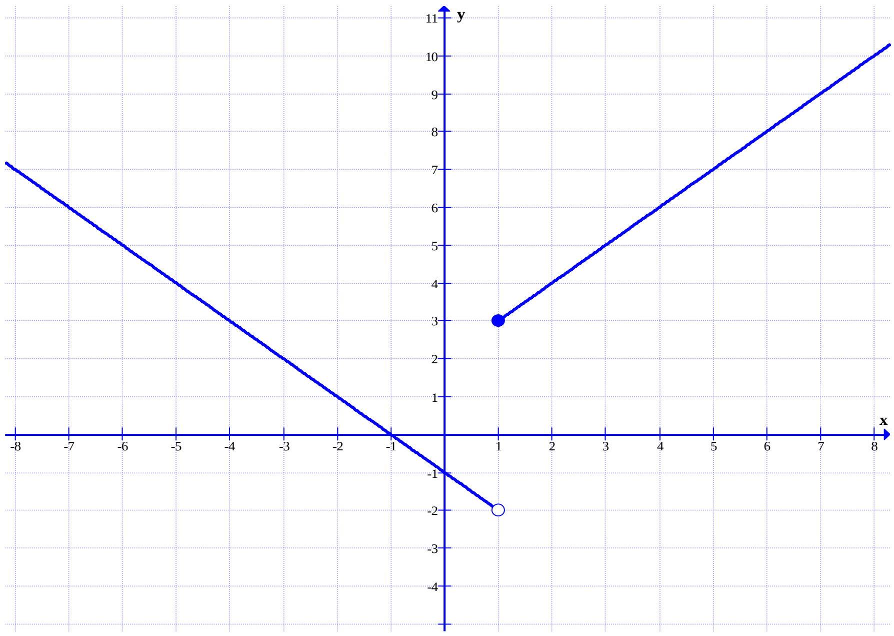
$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} -x=-۲$$

مثال : با توجه به شکل زیر مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ ج) $f(۱)$



حل :

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۲$ ج) $f(۱)=۳$

مثال: حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\geq ۲ \\ x^۲ & x<۲ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} (۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} (x^۲)=(۲)^۲=۴$

مقدار $f(۲)=۳(۲)-۱=۵$

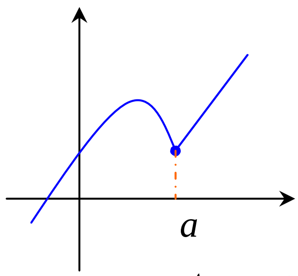
تمرین برای حل :

۵ : حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x=1$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3} & x>1\\ 3x+2 & x=1\\ 2x-5 & x<1\end{cases}$$

***

قسمت چهارم : شرط وجود حد یک تابع در یک نقطه



گویند تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای حد است، هرگاه

الف : در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد.

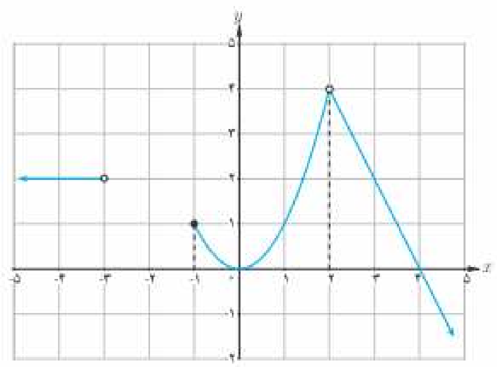
ب : در این نقطه، حد راست و چپ آن عدد های مساوی شوند.

به عبارتی دیگر، اگر تابع f در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$$

در این صورت، اگر $L_1=L_2=L$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و برعکس [1]

مثال : در شکل زیر نمودار تابع f به ضابطه‌ی زیر رسم شده است.



$$f(x)=\begin{cases}-2x+8 & x>2\\ x^2 & -1\le x<2\\ 2 & x<-3\end{cases}$$

با توجه به این شکل می توان نوشت:

۱ : تابع در نقطه‌ی $x=2$ تعریف نشده است. یعنی $f(2)$ وجود ندارد.

[1]. بر این اساس، گویند تابع در نقطه‌ی $x=a$ دارای حد نیست، هرگاه یکی از حالت های زیر وجود داشته باشد.
الف : حد راست و چپ عددهای مساوی نباشند.   ب : حد راست یا چپ یا هر دو وجود نداشته باشد. یعنی تابع در سمت راست یا چپ تابع تعریف نشده یا اینکه تابع رفتار بی کران داشته باشد.   ج: تابع در یک یا دو سمت این نقطه رفتار نوسانی دارد.

۲ : حد تابع در نقطه‌ی $x=۲$ برابر ۴ است. یعنی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۳ : حد راست تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ برابر ۱ است. یعنی $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=۱$

۴ : تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد چپ ندارد. یعنی $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)$ وجود ندارد.

۵ : تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد ندارد. یعنی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۶ : مقدار تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ برابر ۱ است. یعنی $f(-۱)=۱$

۷ : چون $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۰$ حد دارد. یعنی

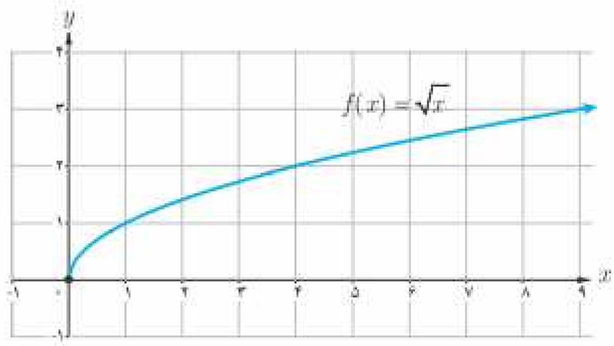
$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ از طرفی $f(۰)=۰$

۸ : چون $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=۰$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۴$ حد دارد. یعنی

$\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ از طرفی $f(۴)=۰$

۹: $f(-۳)$ و $\lim\limits_{x\to (-۳)^+} f(x)$ وجود ندارد ولی $\lim\limits_{x\to (-۳)^-} f(x)=۲$

مثال : برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با نمودار زیر می توان نوشت.



الف : $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x}=۰$

ب : $\lim\limits_{x\to ۰^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد، زیرا تابع در $x<۰$ تعریف نشده است.

پ : $\lim\limits_{x\to ۰} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

مثال : نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲x & x\geq ۳ \\ ۵x & x<۳ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(x^{۲}+۲x)=(۳)^{۲}+۲(۳)=۱۵$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۵x)=۵(۳)=۱۵$$ حد چپ

و چون $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^-} f(x)=۱۵$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است و

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۵$$

مثال : نشان دهید که تابع $f(x)=۳+[x]$ در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد.

حل :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۳+[x])=۳+[۲^+]=۳+۲=۵$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳+[x])=۳+[۲^-]=۳+۱=۴$$ حد چپ

و چون $\lim_{x\to ۲^+} f(x)\neq\lim_{x\to ۲^-} f(x)$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۲$ دارای حد نیست.

مثال: تابعی مانند f مثال بزنید که در $x=۱$ حد نداشته باشد، امّا $|f|$ در $x=۱$ حد داشته باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ -۲ & x<۱ \end{cases}\rightarrow |f(x)|=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ ۲ & x<۱ \end{cases}\rightarrow |f(x)|=۲$$

در این صورت $\lim_{x\to ۱}|f(x)|=۲$ در حالی که دو تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ حد ندارد.(چرا؟)

مثال : مقدار a را چنان پیدا کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+x-۱ & x<۳ \\ -۳x+۲ & x\geq ۳ \end{cases}$$

حل : کافی است حد راست و حد چپ این تابع را در نقطه‌ی $x=۳$ محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم.

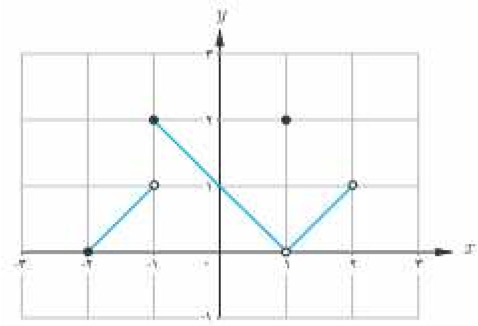
حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(-۳x+۲)=-۳(۳)+۲=-۷$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(ax^۲+x-۱)=a(۳)^۲+(۳)-۱=۹a+۲$

$$\Rightarrow ۹a+۲=-۷\to ۹a=-۹\to a=-۱$$

***

تمرین برای حل :



۶ : برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$

ب) $f(۱)=۲$

پ) $f(۲)=۱$

ت) $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۱$

چ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۷ : برای هر یک از موارد زیر نمودار تابعی را رسم کنید ویژگی های تعیین شده را داشته باشد.

الف : تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

ب : تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در ایـن نقطـه برابـر نیست.

پ : تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

ت: تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

ث: تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

ح : تابع در نقطه‌ی ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

۸ : نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را رسم کنید. سپس حاصل تساوی های زیر را در صورت وجود را بنویسید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

د) $f(۲)$

۹ : نمودار تابع زیر را رسم کنید. سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

الف : آیا این تابع در نقطه‌ی صفر حد دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب حد آن را بنویسید.

ب : آیا $f(۰)$ موجود است؟ چرا؟

۱۰ : نمودار تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ را رسم کنید. سپس حد تابع را در نقطه‌ی $x=۰$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۱ : مثالی از یک تابع همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه‌ی ۲ برابر ۱- باشد.

۱۲ : تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه‌ی ۳ حد نداشته باشد و $f(۳)=۱$

۱۳ : تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه‌ی ۲ تعریف نشده باشد ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۱۴ : نمودار تابع $f(x)=|x-۱|$ را رسم کنید. سپس حاصل تساوی های زیر را در صورت وجود را بنویسید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

د) $f(۱)$

۱۵ : دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-x}$ را تعیین کنید و سپس حد تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۶ : دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-۲}$ را تعیین کنید و سپس حد تابع را در نقطه‌ی $x=۲$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۷ : با محاسبه‌ی حد راست و حد چپ ، وجود حد تابع زیر در نقطه‌ی $x=۰$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & x\neq ۰\\ ۵ & x=۰\end{cases}$$

۱۸ : نمودار تابع زیر را رسم کنید و حد تابع در نقطه‌ی $x=۰$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲ & x>۰\\ -۲x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$$

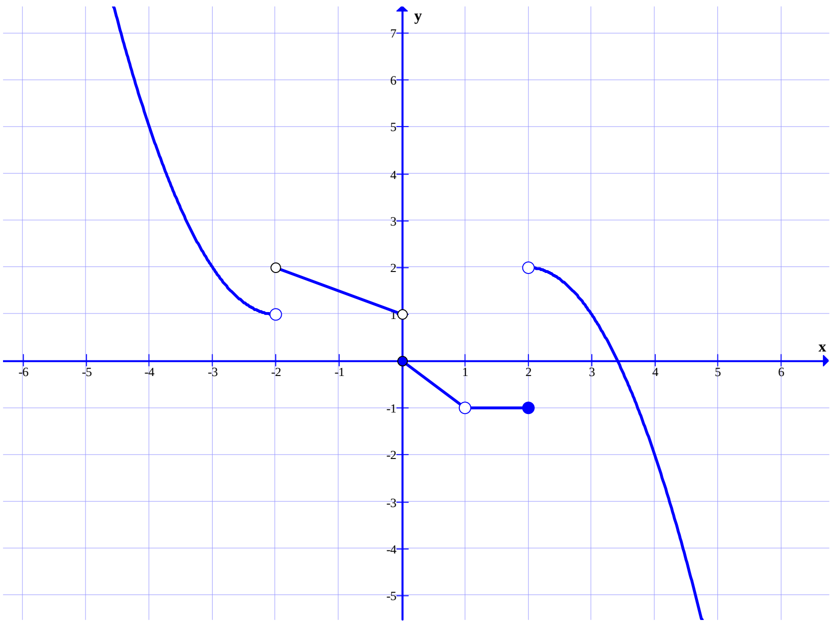
۱۹ : نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد.

$$f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x>۲\\ -۲ & x=۲\\ x-۳ & x<۲\end{cases}$$

۲۰ : مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=-۱$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax^{۳}-۲ & x>-۱\\ ۲ax^{۲} & x\leq -۱\end{cases}$$

۲۱ : با توجه به شکل مقابل، تساوی های زیر را کامل کنید.[۲]



---

[2] . توجه : منظور از نماد $x\to(-۲)^{+}$ یعنی x از سمت راست بـه ‎-۲ نزدیـک مـی شـود. و منظـور از نمـاد $x\to -۲^{+}$ یعنی x در قسمت قرینه‌ی سمت راست ۲ قرار دارد. واضح است که $(-۲)^{-}=-۲^{+}$

همچنین منظور از نماد $x\to(-۲)^{-}$ یعنی x از سمت چپ به ‎-۲ نزدیک می شود. و منظور از نماد $x\to -۲^{-}$ یعنی x در قسمت قرینه‌ی سمت چپ ۲ قرار دارد. واضح است که $(-۲)^{+}=-۲^{-}$

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)+۳\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)-۲\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x)-\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)+۴\lim\limits_{x\to ۱} f(x)+\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x)=$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)-\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)+۲\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=$

د) $\dfrac{\lim\limits_{x\to (-۳)^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)}=$

۲۲ : نشان دهید که تابع $f(x)=[x]$ در هر نقطه به طول عدد صحیح مانند k حد ندارد.

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس سوّم : قضایای حد

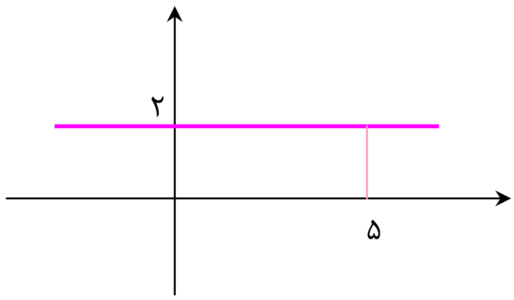
یکی از عواملی که می تواند به مطالعه‌ی دقیق تر یک تابع کمک کند، حد آن تابع (در یک نقطه) است. لذا لازم است قواعد و دستور هایی برای محاسبه‌ی حد وجود داشته باشد. در این درس برخی از این قواعد را به طور شهودی و به همراه ذکر مثال ، معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : اعمال روی حد توابع

در این بخش به مطالعه‌ی اعمال روی حد می پردازیم که محاسبه‌ی حدود توابع را ساده تر می کنند.

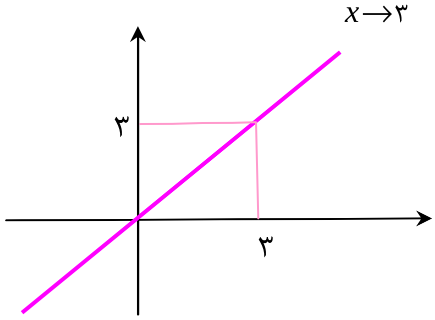
۱ : تابع ثابت $f(x)=c$ در همه‌ی نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

مثال : تابع $f(x)=۲$ در همه‌ی نقاط حد دارد. لذا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۲$



۲ : تابع همانی $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$

مثال : تابع $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد. لذا $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۳$



۳ : فرض کنیم که توابع f و g روی دامنه‌ی یکسانی تعریف شده و در a دارای حد باشند. به عبارت دیگر فرض کنیم که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$ در این صورت :

الف : حد مجموع دو تابع برابر مجموع حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=l+k$$

ب : حد تفاضل دو تابع برابر تفاضل حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=l-k$$

ج : حد حاصل ضرب دو تابع برابر با حاصل ضرب حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=lk$$

د : حد خارج قسمت دو تابع برابر خارج قسمت حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{l}{k}\qquad ;\qquad k\neq ۰$$

نتیجه :

۱ : حد حاصل ضرب یک عدد در یک تابع با حاصل ضرب آن عدد در حد تابع برابر است.

$$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=cl$$

۲ : حد معکوس یک تابع با معکوس حد آن تابع برابر است.

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{\lim_{x\to a}f(x)}=\frac{۱}{l}\qquad ;\qquad l\neq ۰$$

۳ : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}f^n(x)=(\lim_{x\to a}f(x))^n=l^n$$

۴ : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{l}$$ (در صورتی که n زوج باشد باید $\lim_{x\to a}f(x)\geq ۰$)

تمرین ۱ : فرض کنید که توابع f و g و h روی دامنه‌ی یکسان تعریف شده باشند و

$$\lim_{x\to a}h(x)=۰ \text{ و } \lim_{x\to a}g(x)=۶ \text{ و } \lim_{x\to a}f(x)=-۲$$

در این صورت حد های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=$

۲) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{۲}=$

۳) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$

۴) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[۳]{g(x)-f(x)}=$

۵) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{۲g(x)}{۶f(x)-۳h(x)}\right)=$

۶) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{۱}{f(x)}=$

تمرین۲ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(۳x^{۲}+۲x-۷)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲x-۱}{x^{۲}-۴x+۱}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۶}$

ادامه‌ی دستور های اعمال روی توابع

۴ : اگر b یک عدد حقیقی مثبت و $P(x)$ یک چند جمله ای باشد آنگاه :

$$\lim\limits_{x\to a}b^{P(x)}=b^{P(a)}$$

مثال :

$$\lim\limits_{x\to -۱}۳^{۲x+x^{۲}}=۳^{۲(-۱)+(-۱)^{۲}}=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$$

۵ : اگر x بر حسب رادیان باشد. آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

ب) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a \quad (a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in Z)$

د) $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a \quad (a \neq k\pi, k \in Z)$

مثال :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} (۲\sin x - \cos x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} (۲\sin x) + \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} (-\cos x)$$

$$= ۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \sin x - \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \cos x = ۲\sin\frac{\pi}{۲} - \cos\frac{\pi}{۲} = ۲(۱) - ۰ = ۲$$

تمرین۳ : با استفاده از قضایای حد، حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۱}{۲x^۳ - ۳x + ۱} =$

ج) $\lim\limits_{x\to -۱} ۲^{۳x^۲+۱} =$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} (\sqrt[۵]{x^۴ - ۲x} + (x^۲ + x)^۴) =$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۲\sin x + \cos x}{\cos ۲x - ۳x\sin ۲x} =$

تمرین۴ : ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - L) = ۰$

اثبات :

قسمت اوّل:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \to \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = L - \lim_{x\to a} L$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to a} L = L} \lim_{x\to a} (f(x) - L) = L - L \to \lim_{x\to a} (f(x) - L) = ۰$$

قسمت دوّم :

$$\lim_{x\to a} (f(x) - L) = ۰ \to \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = ۰$$

$$\to \lim_{x\to a} f(x) - L = ۰ \to \lim_{x\to a} f(x) = L$$

تمرین۵ : دو تابع مثال بزنید که هیچ کدام در نقطه‌ی $x=۱$ حد نداشته باشند، ولی مجموع آن ها در این نقطه دارای حد باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x>۱\\ ۲ & x\leq ۱\end{cases} \quad و \quad g(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۱\\ -۲ & x\leq ۱\end{cases}$$

$$\rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}۰ & x>۱\\ ۰ & x\leq ۱\end{cases} \rightarrow (f+g)(x)=۰$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to ۱}(f+g)(x)=۰$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه‌ی $x=۱$ دارای حد نیستند.

تمرین۶ : دو تابع مثال بزنید که در یک نقطه حد نداشته باشند، ولی تفاضل آن ها در این نقطه دارای حد باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ ۲ & x\leq ۰\end{cases} \quad و \quad g(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۰\\ ۱ & x\leq ۰\end{cases}$$

$$\rightarrow (f-g)(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۱ & x\leq ۰\end{cases} \rightarrow (f-g)(x)=۱$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to ۰}(f-g)(x)=۱$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه‌ی $x=۰$ دارای حد نیستند.

تمرین۷ : دو تابع مثال بزنید که هیچ کدام در $x=۰$ حد نداشته باشند، ولی تابع $\frac{f}{g}$ در $x=۰$ حد داشته باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases} \quad و \quad g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}$$

$$\rightarrow (\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}-۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases} \rightarrow (\frac{f}{g})(x)=-۱$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{f}{g})(x)=-۱$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه‌ی $x=۰$ دارای حد نیستند.

تمرین ۸ : تابع f را به گونه ای تعریف کنید که $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)}{x^۲-۱}=۴$

حل :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{x^۲-۱}=۴\to\frac{\lim\limits_{x\to ۲}f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۱)}=۴\to\frac{\lim\limits_{x\to ۲}f(x)}{۳}=۴\to\lim_{x\to ۲}f(x)=۱۲$$

لذا جواب مسئله هر تابعی می تواند باشد، به شرط اینکه حد آن در نقطه‌ی $x=۲$ برابر۱۲ باشد. مثلاً:

$f(x)=۱۲$ یا $f(x)=۵x+۲$ یا $f(x)=x^۳+۲x$

تمرین۹ : نشان دهید توابع $f(x)=x+۲$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ در نقطه‌ی ۲ دارای حدی برابر هم هستند.

حل: برا ی $x\neq ۲$ داریم :

$$g(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲=f(x)$$

لذا

$$\lim_{x\to ۲}g(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

***

تمرین برای حل :

۱۰ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱}(۳x^۲-۴x+۵)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۳-۴x+۱}{۳x+۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{۳x^۲+x}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}(x^۲+۳\sin x+۱)$

ج) $\lim\limits_{x\to a}(۳x+x^۲-۵)$

۱۱ : اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۳$ حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(۳f(x)-۵g(x))$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)+g(x)}{۵g(x)+۲}$

۱۲ : اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵$ آنگاه مقدار $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ را بیابید.

۱۳ : در هر یک از حالت های زیر درباره‌ی حد تابع $f+g$ چه می توان گفت؟

الف : اگر توابع g و f در a حد نداشته باشند.

ب : اگر تابع f در a حد داشته باشد، ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

ج : هر دو تابع g و f در a حد داشته باشند.

۱۴ : فرض کنید برای تابع f داشته باشیم.

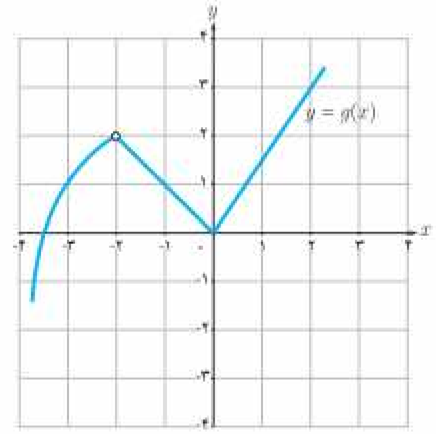
$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۳ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۲} f(x)=۳$$

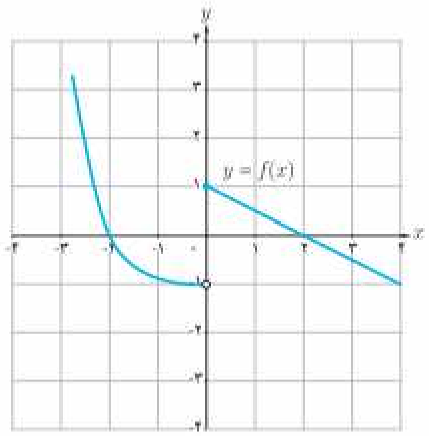
آیا می توان گفت که f یک تابع ثابت است.

۱۵ : مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+a & x>-۱\end{cases}$$

۱۶ : در شکل زیر نمودار توابع g و f رسم شده اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim\limits_{x\to -۲} (۲g(x) - f(x))$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)}$

د) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt[۳]{۸g(x)}$

***

قسمت دوّم : تعمیم قوانین اعمال روی حد توابع

تمام قوانینی که درباره‌ی حد مطرح شد، برای حد های یک طرفه (حد راست و چپ) نیز قابل تعمیم است.

مثال :

$$\lim_{x\to ۳^+}(x^۲+[x]+۱)=\lim_{x\to ۳^+}x^۲+\lim_{x\to ۳^+}[x]+\lim_{x\to ۳^+}۱=۹+۳+۱=۱۳$$

توجه : اگر تابع داده شده شامل جزء صحیح باشد، برای محاسبه‌ی حد در یک نقطه، ابتدا باید جزء صحیح را تعیین مقدار کرده و جایگزین کنیم و همچنین اگر تابع داده شده شامل قدر مطلق باشد، ابتدا باید درون قدرمطلق را تعیین علامت کرده و قدر مطلق را حذف کنیم و سپس حد را محاسبه می کنیم.

تمرین ۱۷ : حد توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده ، در صورت وجود بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x-۱|}{x-۱}$ ۳) $\lim_{x\to ۲^+}[x]+۱$ ۵) $\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}$

۲) $\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x-۱}$ ۴) $\lim_{x\to ۲^-}[x]+۱$ ۶) $\lim_{x\to ۱^-}\sqrt{x-۱}$

تمرین۱۸: با بررسی حد های یکطرفه، حد توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده در صورت وجود بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۱}(|x-۱|+۲)$

۲) $\lim_{x\to ۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}$

۳) $\lim_{x\to ۲}\sqrt{x-۲}$

۴) $\lim_{x\to ۳}([x]+[-x])$

۵) $\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲}$

۶) $\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{[x-۲]}$

تمرین برای حل :

۱۹ : مقدار حد مقابل را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{[x]}{x+[x]}$$

۲۰ : مقدار حد مقابل را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{۴x-[x]+۱}{x^۲+۲}$$

۲۱ : مقدار حد مقابل را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳[x]-۱}{x-۲}$$

۲۲ : مقدار حد مقابل را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱+\sqrt{x-۲}}{[x]+۲}$$

۲۳ : مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=a[x]+[x+۱]$ در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد.

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس چهارم : محاسبه ی حد توابع کسری درحالت مبهم

گاهی در محاسبه‌ی حد توابع کسری با حالت صفر حدی بر روی صـفر حـدی[1] ($\frac{0}{0}$) برخـورد مـی کنـیم. در اصطلاح گفته می شود که حد مبهم است و مقدار آن به کمک روش جایگزینی مستقیم به دسـت نمـی آیـد، بلکه باید قبل از جایگزینی عامل صفر کننده[2] (عامل ابهام) را از صورت و مخرج حذف کنیم. این عمل را رفع ابهام گویند. برای حذف عامل ابهام لازم است با توجه به نوع تابع یکی از روش های زیر را بکار بگیریم.

قسمت اوّل : روشهای رفع ابهام

رفع ابهام به توجه به معادله‌ی تابع به حالت های مختلفی انجام می شود. در اینجا به سه حالت از این حالت های اشاره می کنیم.

حالت اوّل : صورت و مخرج کسر ، چند جمله ای باشند.

اگر صورت و مخرج کسری، چند جمله ای باشند، صورت و مخرج را تجزیه کنید و سپس کسر را ساده کنید[3].

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{۳x - ۶}$$

حل :

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{۳x - ۶} = \frac{(۲)^۲ - ۴}{۳(۲) - ۶} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{۳x - ۶} = \lim_{x \to ۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{۳(x-۲)} = \lim_{x \to ۲} \frac{x+۲}{۳} = \frac{۲+۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

مثال: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to -۲} \frac{x^۲ + ۶x + ۸}{x^۲ - ۴}$$

---

1 . عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و یا عدد بسیار کوچک منفی و نزدیک صفر ، را صفر حدی می نامند.

2 . اگر x به سمت a میل کند، $x - a$ عامل صفر کننده است.

3 . در صورتی که تجزیه‌ی صورت یا مخرج کسر مشکل باشد، می توان از تقسیم صورت یا مخرج بر عامل صفر کننده استفاده نمود.

حل:

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴} = \frac{(-۲)^۲+۶(-۲)+۸}{(-۲)^۲-۴} = \frac{۴-۱۲+۸}{۴-۴} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴} = \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x+۴)}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{x+۴}{x-۲} = \frac{(-۲)+۴}{(-۲)-۲} = \frac{۲}{-۴} = \frac{۱}{-۲}$$

مثال : تابع $f(x)=x^۲+۵x-۱$ را در نظر بگیرید و سپس حاصل $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بدست آورید.

حل :

$$f(۲)=(۲)^۲+۵(۲)-۱=۱۳$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x^۲+۵x-۱)-(۱۳)}{x-۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۵x-۱۴}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x+۷)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}(x+۷) = ۲+۷ = ۹$$

حالت دوّم : صورت یا مخرج کسر ، شامل رادیکال باشند.

اگر صورت یا مخرج کسری شامل رادیکال با فرجه‌ی ۲ باشند، صورت یا مخرج را گویا کنید. برای گویا کردن، معمولاً صورت یا مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} = \frac{۲(۹)-۱۸}{\sqrt{۹}-۳} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} = \lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} \times \frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳} = \lim_{x\to ۹} \frac{۲(x-۹)}{(\sqrt{x})^۲-(۳)^۲} \times (\sqrt{x}+۳)$$

$$= \lim_{x\to ۹} \frac{۲(x-۹)}{x-۹} \times (\sqrt{x}+۳) = \lim_{x\to ۹} ۲(\sqrt{x}+۳) = ۲(\sqrt{۹}+۳) = ۱۲$$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}=\frac{\sqrt{(۲)^۲+۵}-۳}{(۲)-۲}=\frac{\sqrt{۹}-۳}{۲-۲}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x^۲+۵}+۳}{\sqrt{x^۲+۵}+۳}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^۲+۵})^۲-(۳)^۲}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۵-۹}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{\sqrt{x^۲+۵}+۳}=\frac{۲+۲}{\sqrt{(۲)^۲+۵}+۳}=\frac{۴}{۳+۳}=\frac{۲}{۳}$$

توجه : گاهی برای گویا کردن صورت یا مخرج یک کسر از اتحاد مجموع یا تفاضل دو مکعب (چاق و لاغر) استفاده می کنیم.

مثال : حد تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ را در نقطه‌ی $x=۸$ در صورت وجود به دست آورید.

حل :

$$\lim_{x\to ۸}f(x)=\lim_{x\to ۸}\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}=\lim_{x\to ۸}\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}$$

$$\lim_{x\to ۸}\frac{x^۲-۸x}{(\sqrt[۳]{x})^۳-(۲)^۳}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{۱}=\lim_{x\to ۸}\frac{x(x-۸)}{x-۸}\times(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)$$

$$=\lim_{x\to ۸}x(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)=۸(۴+۴+۴)=۹۶$$

حالت سوّم : اگر صورت یا مخرج شامل عبارت مثلثاتی باشد، از روابط مثلثاتی استفاده کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

حل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos(0)}{0}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=1\times\frac{1}{1+\cos(0)}=\frac{1}{2}$$

توجه : در ابتدای این فصل داشتیم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

از این تساوی می توان نتایج زیر را نیز به دست آورد.

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan u}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u}=1$$

از این نتایج برای محاسبه‌ی حد بسیاری از توابع مثلثاتی می توان استفاده کرد.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$

۲) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}$

۳) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}$

۴) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^2\tan x}$

۵) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}$

۶) $\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin x}{x}$

حل :

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{۵x}=۱$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۷x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}\times\frac{۳}{۷}=۱\times\frac{۳}{۷}=\frac{۳}{۷}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}\times\frac{x}{\sin x}=۱\times۱=۱$

۴)

$$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin^۳ x}{x^۲\tan x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{x^۲}\times\frac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^۲\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}=۱\times۱\times۱=۱$$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{mx}\times\frac{m}{n}=۱\times\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$

۶) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{۳x}{x}+\frac{\sin x}{x})=۳+۱=۴$

نتیجه : $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}$

مثال : حد مقابل را حساب کنید. $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin ۴x}{۳x}$

حل :

$$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin ۴x}{۳x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳x}{۳x}+\frac{\sin ۴x}{۳x}=۱+\frac{۴}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

تمرین برای حل :

۱ : حدهای زیر را حساب کنید.

۱-۱) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲+۲x-۳}{x-۱}$

۱-۲) $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{x^۲+۵x+۶}$

۱-۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}$

۱-۴) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}$

۱-۷) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳\sin x+۲\tan x}{۵x}$

۱-۸) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos ۲x}$

۱-۹) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^۲}$

۱-۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^۳}$

۱-۱۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$

۱-۵) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2-\sqrt{x+3}}$

۱-۱۲) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

۱-۶) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{3-\sqrt{x+7}}$

۲ : حد های زیر را محاسبه کنید.

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$

الف) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+7x+12}{x^3+4x^2+4x+3}$

۳ : حدهای زیر را حساب کنید.

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$

ب) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$

۴ : مقدار a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=8$ باشد.

***

قسمت دوّم : راهبرد تغییر متغیر برای رفع ابهام

گاهی لازم می شود قبل از اقدام به رفع ابهام، متغیر را تغییر دهیم و متغیر جدیدی را تعریف کنیم. توجه داشته باشید که متغیر جدید ممکن است به عددی دیگری میل کند و باید در محاسبه اعمال شود.

مثال : مقدار حد روبرو را بیابید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}$$

حل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\sqrt{x}=t}\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{2t^2-3t+1}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(2t-1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{2t-1}{t+1}=\frac{1}{2}$$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{3x+6}$$

حل : کافی است قرار دهیم $x+۲=t$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\sin(x+۲)}{۳(x+۲)}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۳t}=\frac{۱}{۳}$$

مثال: حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{۴x^۲-\pi^۲}$$

حل : قرار می دهیم $x-\frac{\pi}{۲}=u$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{۴x^۲-\pi^۲}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{=}}\lim_{x-\frac{\pi}{۲}\to ۰}\frac{\cos x}{۴(x-\frac{\pi}{۲})(x+\frac{\pi}{۲})}=\lim_{x-\frac{\pi}{۲}\to ۰}\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{(x-\frac{\pi}{۲})}\times\frac{۱}{۴(x+\frac{\pi}{۲})}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۲})}{x-\frac{\pi}{۲}}\times\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{-۱}{۴(x+\frac{\pi}{۲})}=\lim_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u}\times\frac{-۱}{۴(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲})}=۱\times\frac{-۱}{۴\pi}=-\frac{۱}{۴\pi}$$

***

تمرین برای حل :

۵ : حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to -۱}\frac{\tan(x+۱)\times\sin^۲(x+۱)}{۵(x+۱)^۳}$

۲) $\lim_{x\to k}\frac{\sin(x-k)}{x^۲-k^۲}$

۳) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(۳x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۳}}$

۴) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{۴x-\pi}$

۶ : حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x}$$

۷ : حد تابع $f(x)=\frac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}$ را در نقطه‌ی $x=-۲$ در صورت وجود به دست آورید.

۸ : حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲\sin\frac{x}{۲}-۳\tan\frac{۱}{۳}x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲[x]-۸}{x-۲}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$

۹ : حد تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x}+۱}$ را در نقطه‌ی $x=-۱$ در صورت وجود به دست آورید.

۱۰ : اگر $g(x)=\dfrac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}$ و $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)g(x)$ را به دست آورید.

***

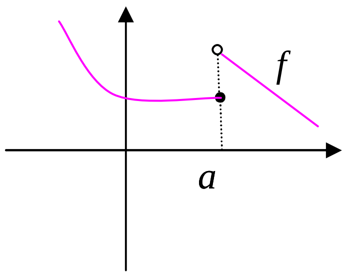
تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

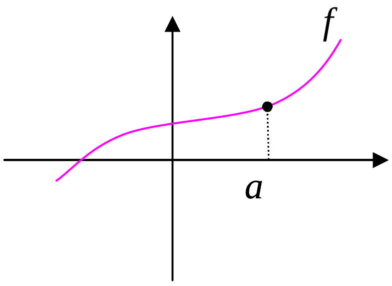
استان خوزستان

درس پنجم : پیوستگی

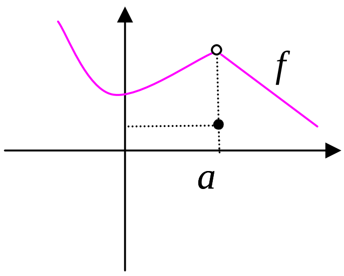
بررسی پیوستگی یک تابع در یک نقطه می تواند در شناخت رفتار یک تابع کمک نماید. از نظر هندسی تابعی را در یک نقطه، پیوسته گویند، هرگاه نمودار آن تابع در این نقطه بریدگی یا پرش نداشته باشد. به نمودار های زیر توجه کنید.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.

تمرین برای حل :

۱ : نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد ولی در نقطه‌ی $x=-1$ پیوسته نباشد.

۲ : نمودار تابعی را رسم کنید که فقط در دو نقطه‌ی $x=1$ و $x=-1$ پیوسته نباشد.

***

قسمت اوّل : تعریف ریاضی پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف) تابع در نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد.

ب) تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشد. یعنی $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

ج) حد تابع در این نقطه با مقدار آن برابر باشد. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

به عبارتی دیگر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

اگر یکی از شرط های فوق برقرار نباشد، گویند تابع در $x=a$ پیوسته نیست.

مثال : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳} & x>۱\\ ۵ & x=۱\\ ۲x-۵ & x<۱\end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x^۲+۳}=\sqrt{(۱)^۲+۳}=۲$

حد چپ $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x-۵)=۲(۱)-۵=-۳$

مقدار $f(۱)=۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x\le ۲\\ ۳x-۱ & x>۲\end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۲+۱)=(۲)^۲+۱=۵$

مقدار $f(۲)=(۲)^۲+۱=۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته است.

مثال : تابع زیر در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است. مقدار a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} 2ax^2+5 & x\geq 1 \\ 6x-3 & x<1 \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2ax^2+5x)=2a(1)^2+5(1)=2a+5$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(6x-3)=6(1)-3=3$

مقدار $f(1)=2a(1)^2+5(1)=2a+5$

و چون تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است، پس :

$$2a+5=3\to 2a=3-5\to 2a=-2\to a=-1$$

تمرین برای حل :

۳ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=2$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & x<2 \\ x+5 & x=2 \\ 9-x & x>2 \end{cases}$$

۴ : پیوستگی تابع $f(x)=1+2[x]$ را در نقطه‌ی $x=5$ بررسی کنید.

۵ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+x+2 & x<0 \\ 2 & x=0 \\ 2\cos x-\sin x & x>0 \end{cases}$$

۶ : پیوستگی تابع علامت را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.

۷ : با رسم نمودار هر یک از توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع (درصورت وجود) را تعیین کنید.

الف) $y=[x]+[-x]$

ب) $y=x-[x]$

ج) $y=|x-1|+2$

د) $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & x\leq 1 \\ -x+2 & x>11 \end{cases}$

۸ : مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=-۲$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ax+b & x<-۲ \\ ۵ & x=-۲ \\ ۲bx-۳ & x>-۲ \end{cases}$$

۹ : در هر یک از موارد زیر ، مقدار a را طوری تعیین کنید که در $x=۱$ پیوسته باشند.

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰<x<۱ \\ [x]+a & x\geq ۱ \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱ \\ a & x=۱ \end{cases}$

د) $f(x)=([x]-a)[x]$

۱۰ : نشان دهید که هیچ مقداری برای a پیدا نمی شود که توابع زیر، پیوسته شوند.

الف) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} x & x<۰ \\ a & x=۰ \\ ۲x+۱ & x>۰ \end{cases}$

۱۱ : مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱-\cos x}{x^۲} & x>۰ \\ b-۱ & x=۰ \\ x-۲a & x<۰ \end{cases}$$

***

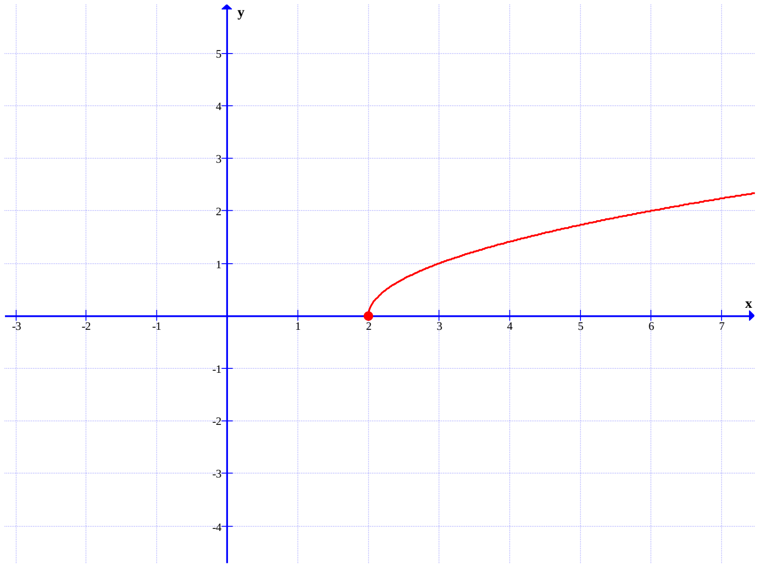
قسمت دوّم : پیوستگی های یک طرفه

گویند تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست دارد، هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

همچنین گویند تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی چپ دارد، هرگاه $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

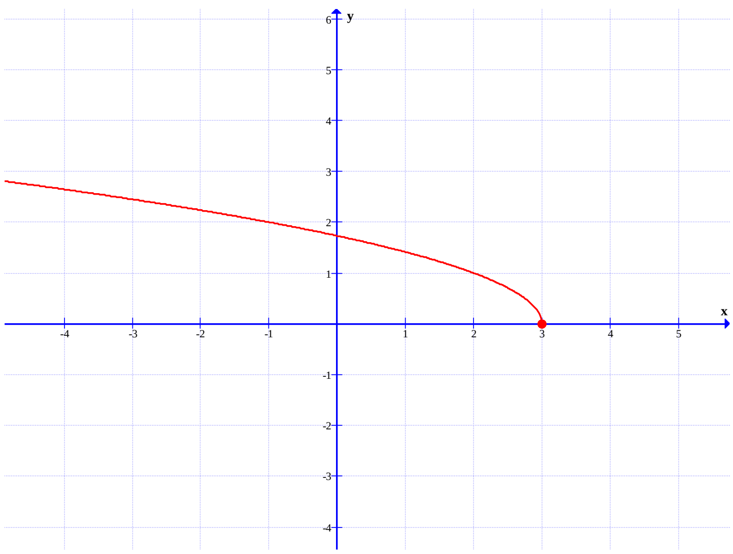
مثال : تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ در نقطه‌ی $x=۲$ پیوستگی راست دارد. زیرا :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=۰$$



مثال : تابع $f(x)=\sqrt{۳-x}$ در نقطه‌ی $x=۳$ پیوستگی چپ دارد. زیرا:

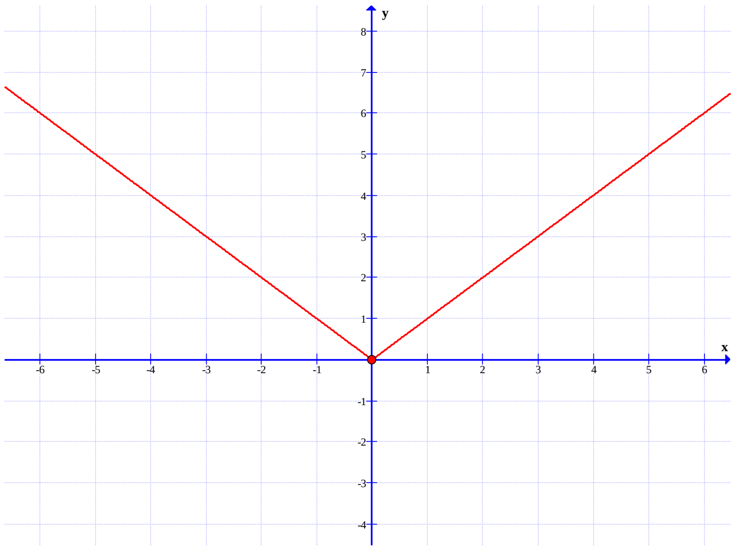
$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=f(۳)=۰$$



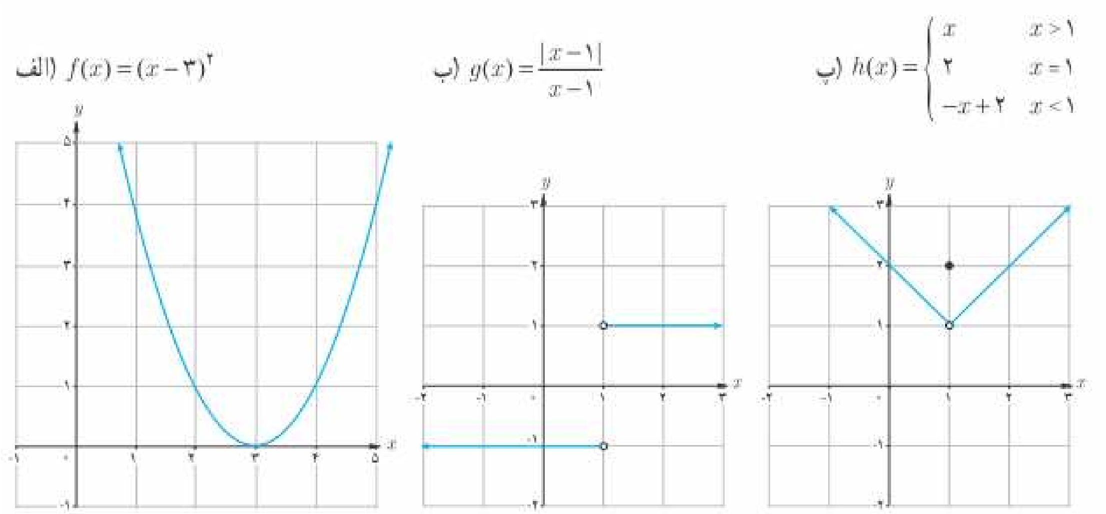
مثال : تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=\cdot$ هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ دارد.

زیرا :

$$\lim_{x\to \cdot^-} f(x)=f(\cdot)=\cdot \quad \text{و} \quad \lim_{x\to \cdot^+} f(x)=f(\cdot)=\cdot$$



تمرین ۱۲ : پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

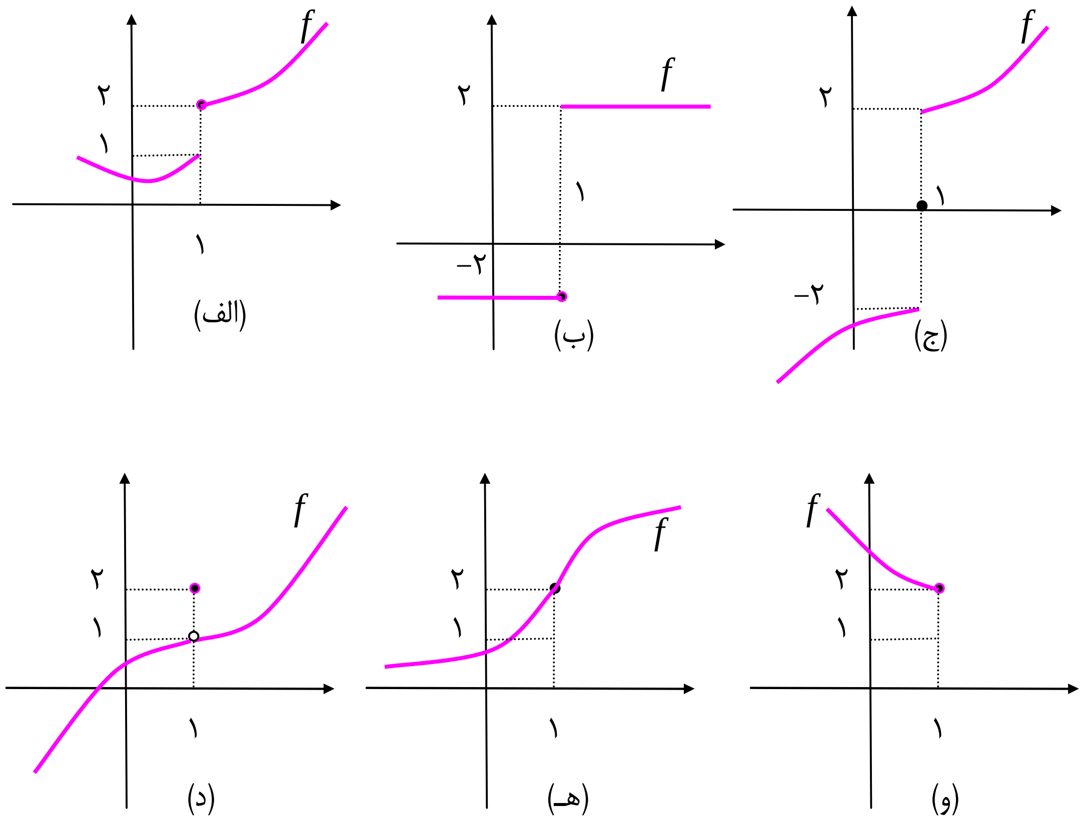


تمرین ۱۳ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -x+۳ & x<۱ \\ ۲x & x\geq ۱ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱۴: در هر مورد پیوستگی تابع داده شده را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.



۱۵ : مقدار k را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۴$ پیوستگی راست داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-k & x>۴ \\ ۵+۳x & x=۴ \\ -x+۱ & x<۴ \end{cases}$$

۱۶ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲x+۵ & x\le ۱ \\ x^{۲}+۲ & x>۱ \end{cases}$$

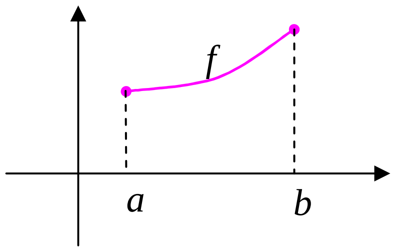
۱۷ : تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه‌ی $x=۱$ برابر -۱ باشد، ولی در این نقطه پیوسته نباشد. نموداری برای این تابع را رسم کنید.

***

قسمت سوّم : پیوستگی در یک فاصله

پیوستگی در یک فاصله را به یکی از حالت های زیرتعریف می کنیم.

تعریف۱: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $[a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه



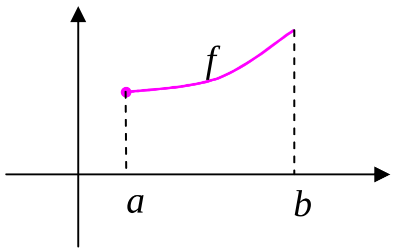
الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

ج) در نقطه‌ی $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

***

تعریف۲: تـابع $y=f(x)$ را در فاصـله ای مانـند $[a,b)$ پیوسـته گویند، هرگاه

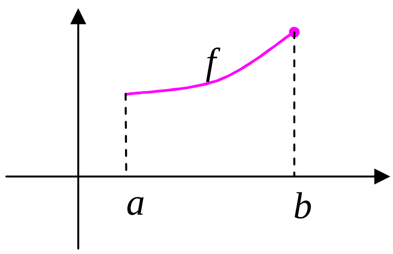


الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

***

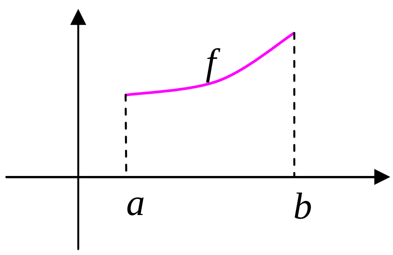
تعریف۳: تـابع $y=f(x)$ را در فاصـله ای مانـند $(a,b]$ پیوسـته گویند، هرگاه



الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

***



تعریف۴ : تـابع $y=f(x)$ را در فاصـله ای مانـند (a,b) پیوسـته گویند، هرگاه در تمام نقاط این فاصله پیوسته باشد.

***

مثال : پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله‌ی $[۱,۲)$ بررسی کنید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم که تابع درنقطه‌ی $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

مقدار $f(۱)=[۱]=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=[۱^+]=۱$

تابع در $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

حال نشان می دهیم که تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است. گیریم که $a\in(۱,۲)$ پس $[a]=۱$

مقدار تابع $f(a)=[a]=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=[a^+]=۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=[a^-]=۱$

تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.

مثال : پیوستگی تابع $f(x)=۲x+\sqrt{۲-x}$ را در فاصله‌ی $(۱,۲]$ بررسی کنید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم که تابع درنقطه‌ی $x=۲$ پیوستگی چپ دارد.

مقدار $f(۲)=۲(۲)+\sqrt{۲-۲}=۴$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲(۲)+\sqrt{۲-۲}=۴$

تابع در $x=۲$ پیوستگی چپ دارد.

حال نشان می دهیم که تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.گیریم که $a\in(۱,۲)$

مقدار تابع $f(a)=۲a+\sqrt{۲-a}$

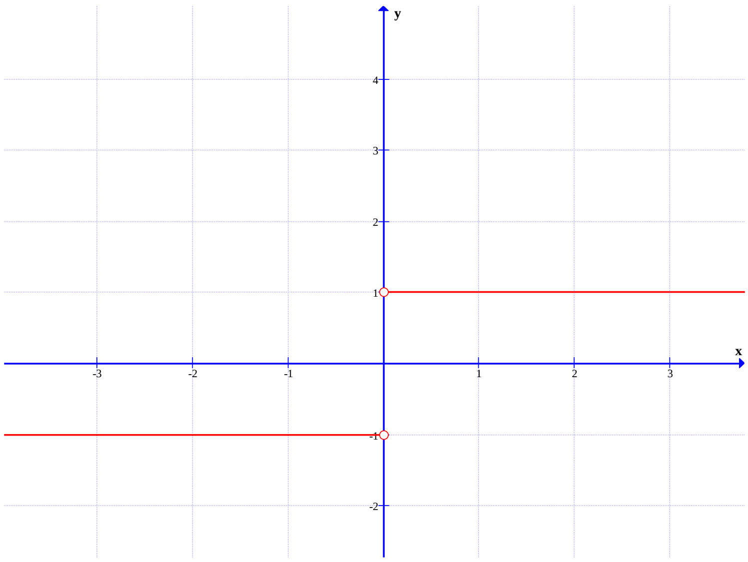
حد راست $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=۲a+\sqrt{۲-a}$

حد چپ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=۲a+\sqrt{۲-a}$

تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.

مثال : دو بازه‌ی بسته مثال بزنید که تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

حل : تابع f در بازه‌ی $[۱,۲]$ پیوسته است ولی در بازه‌ی $[-۱,۱]$ ناپیوسته است.



تمرین۱۸ : تابع زیر را در نظر بگیرید. سپس درستی یا نادرستی هر عبارت را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^{+}} f(x)=۰$ ب) $\lim\limits_{x\to ۵^{-}} f(x)=۰$ پ) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۰$

ت) تابع f روی بازه‌ی $(-\infty,-۱]$ پیوسته است. ث) تابع f روی بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ پیوسته است.

ج) تابع f روی بازه‌ی $[۲,۵]$ پیوسته است. ح) تابع f روی بازه‌ی $(-۲,۰)$ پیوسته است.

***

توجه : فاصله ای که یک تابع در تمام نقاط آن پیوسته باشد را فاصله‌ی پیوستگی مـی نامنـد. بـرای تعیـین فاصله‌ی پیوستگی یک تابع ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم و سپس پیوستگی تابع را در تمام نقاط مرزی و یا شکستگی بررسی کرده و در صورت ناپیوسته بودن در آن نقاط آنها را از دامنه حذف می کنیم.

منظور از نقاط مرزی نقاط ابتدا و انتهای دامنه (به شرط اینکه بصورت بسته باشند.) و منظور از نقاط شکستگی نقاطی که در آنها ضابطه‌ی تابع عوض می شود.

مثال : ابتدا دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورده و سپس فاصله‌ی پیوستگی آن را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=\{x\,|\,x\geq ۱\}\cup\{x\,|\,x<۱\}=R$

حال پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۱=۰$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در این نقطه پیوسته نمی باشد و در نتیجه فاصله‌ی پیوستگی آن به صورت زیر است.

$$R-\{۱\}=(-\infty,۱)\cup(۱,+\infty)$$

مثال : فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ \dfrac{۱}{x}-۳ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=R-\{۰\}$

حال پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۳=-۲$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در این نقطه پیوسته نمی باشد و در نتیجه فاصله‌ی پیوستگی آن به صورت زیر است.

$$R-\{۱,۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$$

مثال: آیا تابع مقابل در بازه‌ی $(-۲,۲)$ پیوسته است؟ چرا؟

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۱}}{x^۳-۹x}$$

حل :

$$x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2-9) = 0 \rightarrow x = 0 \;,\quad x = 3 \;,\quad x = -3$$

چون بازه‌ی داده شده شامل $x=0$ است و این نقطه عضو دامنه‌ی تابع نمی باشد. لذا تابع در این فاصله پیوسته نیست.

مثال : فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & x \leq 1 \\ x^2+4x & 1 < x < 3 \\ 6+5x & x \geq 3 \end{cases}$$

حل : دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی است. با بررسی پیوستگی در نقاط $x=1$ و $x=3$ معلوم می شود که تابع در $x=1$ پیوسته نیست ولی در $x=3$ پیوسته است. لذا فاصله‌ی پیوستگی این تابع می شود.

$$R-\{1\} = (-\infty,+\infty)-\{1\}$$

تمرین ۱۹: فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x \geq 1 \\ 4x-1 & x < 1 \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۲۰ : ثابت کنید که تابع زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} |x-1| & x < 1 \\ x-[x] & 1 \leq x < 2 \\ -x+3 & x \geq 2 \end{cases}$$

۲۱ : مقدار b و a را طوری بیابید که تابع زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} & x < 1 \\ ax+b & 1 \leq x < 3 \\ x^2 & x \geq 3 \end{cases}$$

۲۲ : تابع $f(x)=[x]$ در بازه‌ی $(2,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

۲۳ : بازه ای ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

قسمت چهارم : توابع پیوسته

تابع f را تابع پیوسته گویند، هرگاه در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته[1] باشد. در این صورت

الف : هر تابع چند جمله ای در تمام نقاط پیوسته است.

ب : تابع ثابت و تابع همانی در تمام نقاط پیوسته هستند.

ج : تابع کسری وقتی همواره پیوسته است، هرگاه مخرج آن ریشه نداشته باشد.

د : هر تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج (تابع اصم) به ازاء همه‌ی مقادیر حقیقی که زیر رادیکال را نامنفی کنند، پیوسته است.

و : توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ در تمام نقاط پیوسته هستند.

مثال : نقاطی را تعیین کنید که تابع زیر در آن نقاط پیوسته نباشد.

$$f(x)=\frac{۳x-۵}{x^{۲}-۴x}$$

حل : ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم.

$$x^{۲}-۴x=۰\rightarrow x(x-۴)=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=۴$$

$$D_f=R-\{۰,۴\}$$

این تابع در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است. لذا نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد.

***

تمرین برای حل :

۲۴: در هر مورد نقاطی از اعداد حقیقی را تعیین کنید که تابع داده شده در آن نقاط پیوسته نباشد.

الف) $f(x)=\frac{۳x-۱}{x^{۲}-۴}$ ب) $f(x)=\frac{۵}{x^{۳}-۴x}$

۲۵ : ثابت کنید که تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x^{۲}+۵}$ همواره پیوسته است.

۲۶ : فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۳-x}}$$

---

[1] . به عبارتی دیگر نمودار تابع در تمام نقاط پرش یا بریدگی نداشته باشد.

۲۷ : نقاط ناپیوستگی تابع زیر را در فاصله‌ی $[۱,۶]$ تعیین کنید.

$$f(x)=[x]+\sqrt{x-۲}$$

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان