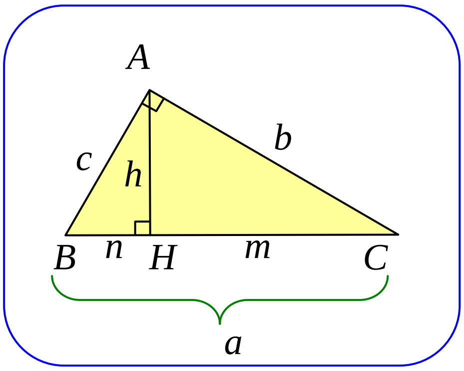
درس اوّل : قضیه ی سینوس ها

در این درس با یک قضیه‌ی بسیار مهم و کاربردی موسوم به قضیه‌ی سینوس ها در مثلث آشنا شویم.

یادآوری روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

منظور از روابط طولی، رابطه هایی است که در مورد اندازه های پاره خط ها و زاویه ها در شکل های مختلف، بحث می کند. در سال گذشته با برخی از این روابط طولی در مثلث قائم الزاویه آشنا شده اید. مهمترین این روابط عبارتند از :



۱) $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$

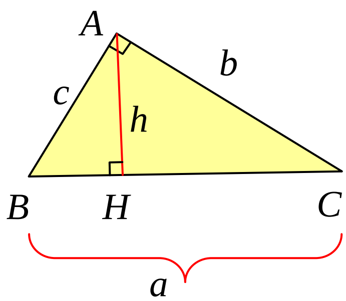
۲) $b^{۲}=a\times m$

۳) $c^{۲}=a\times n$

۴) $h^{۲}=m\times n$

۵) $a\times h=b\times c$

اکنون با توجه به این روابط طولی و تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه می توان، نتایج جالب دیگری را به دست آورد. به ادامه‌ی مطلب توجه نمایید.



تمرین ۱ : در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC شکل مقابل، ارتفاع وارد بر وتر را رسم می کنیم و اندازه‌ی آن را h قرار می دهیم. با توجه به شکل ثابت کنید که : $\frac{۱}{b^{۲}}+\frac{۱}{c^{۲}}=\frac{۱}{h^{۲}}$

حل :

$$\frac{۱}{c^{۲}}+\frac{۱}{b^{۲}}=\frac{b^{۲}}{b^{۲}c^{۲}}+\frac{c^{۲}}{b^{۲}c^{۲}}=\frac{b^{۲}+c^{۲}}{b^{۲}c^{۲}}=\frac{a^{۲}}{b^{۲}c^{۲}}=(\frac{a}{bc})^{۲}=(\frac{a}{ah})^{۲}=\frac{۱}{h^{۲}}$$

تمرین ۲ : در یک مثلث قائم الزاویه، مجموع معکوس مربعات اندازه های دو ضلع زاویه‌ی قائمه برابر $\frac{۱}{۲۵}$ است. اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر را تعیین کنید.

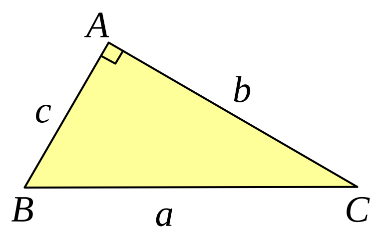
تمرین۳ : ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابل به آن ضلع برابر طول وتر است.

اثبات :

$$\sin A = \sin(۹۰^\circ) = ۱ \to \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{۱} = a$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\frac{b}{a}} = \frac{ab}{b} = a$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\frac{c}{a}} = \frac{ac}{c} = a$$



***

تمرین برای حل :

۴ : طول اضلاع قائم از مثلث قائم الزاویه ای ۹ و ۱۲ واحد است. اندازه‌ی تصویر ضلع کوچکتر بر روی وتر کدام است؟

۱) ۴/۸ ۲) ۵/۴ ۳) ۶ ۴) ۷/۲

۵ : پاره خطی به طول a داده شده است. پاره خطی به طول $\sqrt{a}$ را رسم کنید. (روش رسم را توضیح دهید.

قضیه‌ی سینوس ها: در هر مثلث، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی روبرو به آن ضلع ، با قطر (دو برابر اندازه‌ی شعاع) دایره‌ی محیطی مثلث برابر است.

اثبات: این قضیه را برای در مثلث ABC در سه حالت $\angle A=۹۰^\circ$ و $\angle A<۹۰^\circ$ و $\angle A>۹۰^\circ$ ثابت می کنیم.

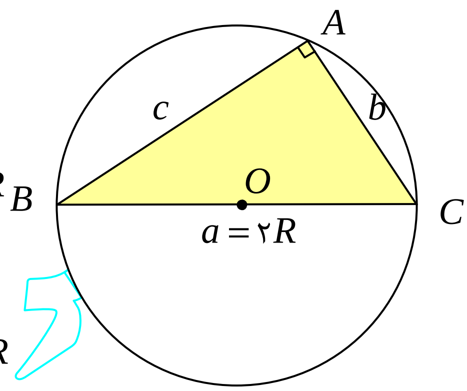
حالت اوّل : در مثلث ABC، $\angle A=۹۰^\circ$ است.

در این صورت مثلث ABC قائم الزاویه است و وتر BC قطر دایره‌ی محیطی می باشد. لذا طبق تمرین قبل داریم:

$$\sin A=\sin(۹۰^\circ)=۱\rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{a}{۱}=a=۲R$$

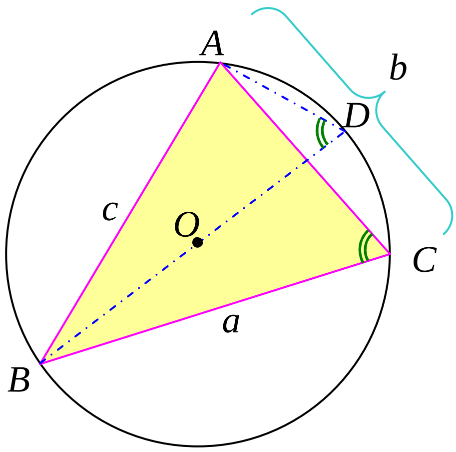
$$\sin B=\frac{b}{BC}\rightarrow \frac{b}{\sin B}=\frac{b}{\frac{b}{BC}}=BC\rightarrow \frac{b}{\sin B}=۲R$$

$$\sin C=\frac{c}{BC}\rightarrow \frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\frac{c}{BC}}=BC\rightarrow \frac{c}{\sin C}=۲R$$



حالت دوّم : در مثلث ABC، $\angle A<۹۰^\circ$ است.

در این حالت قطر BD را رسم می کنیم و D را به A وصل می کنیم. دو زاویه‌ی D و C محاطی و روبرو به یک کمان هستند، لذا با هم مساویند. همچنین مثلث ABD قائم الزاویه و زاویه‌ی BAD (روبرو به قطر) قائم الزاویه است. پس طبق حالت قبل می توان نوشت :



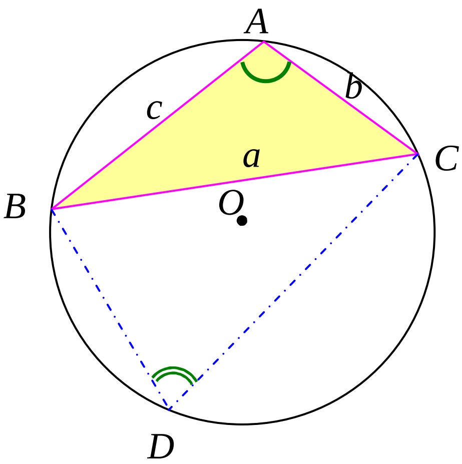
$$\sin C=\sin D\xrightarrow{\sin D=\frac{AB}{BD}}\sin C=\frac{AB}{BD}\rightarrow\frac{c}{\sin C}=BD\xrightarrow{BD=۲R}\frac{c}{\sin C}=۲R$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A}=۲R \qquad \text{و} \qquad \frac{b}{\sin B}=۲R$$

حالت سوّم : در مثلث ABC، $\angle A>۹۰^\circ$ است.

در این نقطه‌ی دلخواه D روی کمان BC (کمان مقابل زاویه‌ی A) را به نقاط B و C وصل می کنیم. زاویه های A و D مکمل یکدیگرند.(چرا؟) و A منفرجه است ، لذا زاویه‌ی D حاده است. پس :



$$\sin A=\sin(\pi-D)$$

یعنی

$$\sin A=\sin D$$

و در مثلث BCD طبق قسمت قبل داریم :

$$\frac{a}{\sin D}=۲R$$

لذا

$$\frac{a}{\sin A}=۲R$$

از طرف چون زاویه های دیگر مثلث ABC حاده هستند، پس طبق قسمت قبل خواهیم داشت.

$$\frac{b}{\sin B}=۲R \qquad \text{و} \qquad \frac{c}{\sin C}=۲R$$

***

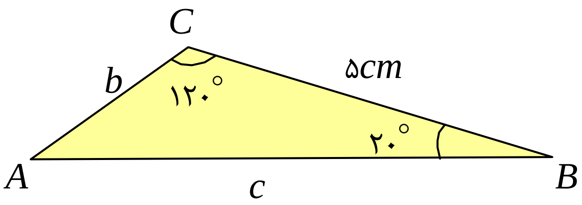
قضیه‌ی سینوس ها : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

که R شعاع دایره‌ی محیطی مثلث است.

تمرین۶ : با توجه بـه شـکل مقابـل انـدازه‌ی مقادیر b و c را به دست آورید.

($\sin ۲۰^\circ = ۰/۳۴$ و $\sin ۴۰^\circ = ۰/۶۴$)

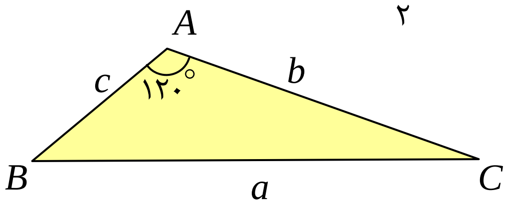


تمرین۷ : در مثلث ABC، $BC = ۱۰\ cm$ و $\angle A = ۱۲۰^\circ$ و $AC = \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ ، مقدار شـعاع دایـره‌ی محیطی مثلث و اندازه‌ی زاویه های B و C را به دست آورید.

حل : به کمک قضیه‌ی سینوس ها می توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin A} = ۲R \to \frac{۱۰}{\sin ۱۲۰^\circ} = ۲R \xrightarrow{\sin ۱۲۰ = \sin(۱۸۰ - ۶۰) = \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} \frac{۱۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۲R$$

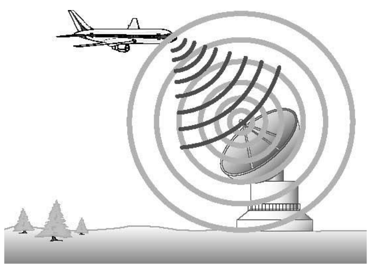
$$\to \frac{۲۰}{\sqrt{۳}} = ۲R \to R = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}}$$

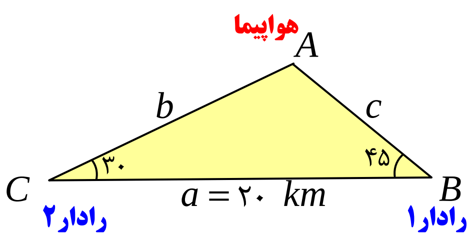


$$\frac{b}{\sin B} = ۲R \to \frac{\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B} = ۲(\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}) \to \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳\sin B} = \frac{۲۰}{\sqrt{۳}} \to \sin B = \frac{۱۰ \times ۳\sqrt{۲}}{۳ \times ۲۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\to \begin{cases} \angle B = ۴۵^\circ \xrightarrow{\angle A + \angle B + \angle C = ۱۸۰} \angle C = ۱۵^\circ \\ \angle B = ۱۳۵^\circ \xrightarrow{\angle A + \angle B + \angle C = ۱۸۰} \angle C = \text{وجودندارد.} \end{cases}$$

تمرین۸ : دو ایستگاه رادار که در فاصله‌ی ۲۰ کیلومتری از هم واقع اند، هواپیمایی را با زاویه های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده اند. فاصله‌ی هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.





حل :

$$\angle A = ۱۸۰ - (\angle B + \angle C) = ۱۸۰ - (۳۰ + ۴۵) = ۱۰۵^\circ$$

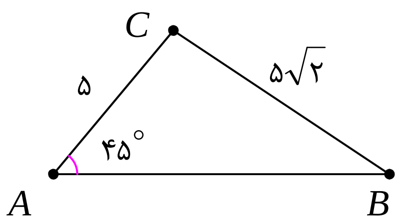
اکنون به کمک ماشین حساب داریم: $\sin(۱۰۵^\circ) \approx ۰/۹۶$ و $\sin ۴۵ = ۰/۷$ و $\sin ۳۰ = ۰/۵$ لذا

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{۲۰}{۰/۹۶} = \frac{b}{۰/۷} \rightarrow b = \frac{۲۰ \times ۰/۷}{۰/۹۶} = ۱۴/۵۸$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{۲۰}{۰/۹۶} = \frac{c}{۰/۵} \rightarrow c = \frac{۲۰ \times ۰/۵}{۰/۹۶} = ۱۰/۴۱$$

تمرین برای حل :

۹ : در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی B را محاسبه کنید.



۱۰ : در مثلثی $BC = ۱۰$ و $\angle A = ۴۵^\circ$ و $\angle B = ۶۰^\circ$ اندازه‌ی دیگر اضلاع مثلث را بیابید.
$(\sin ۷۵^\circ = ۰/۹۶)$

۱۱: نشان دهید که مثلثی با مشخصات $a = ۲$ و $b = ۶$ و $\angle A = ۶۰^\circ$ وجود ندارد.

۱۲ : در مثلث ABC، $BC = ۲۰$ و $\angle B + \angle C = ۱۲۰^\circ$ و $AC = \frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}$

الف : شعاع دایره‌ی محیطی مثلث را بدست آورید.

ب : اندازه‌ی زاویه های B و C پیدا کنید.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس دوّم : قضیه‌ی کسینوس ها

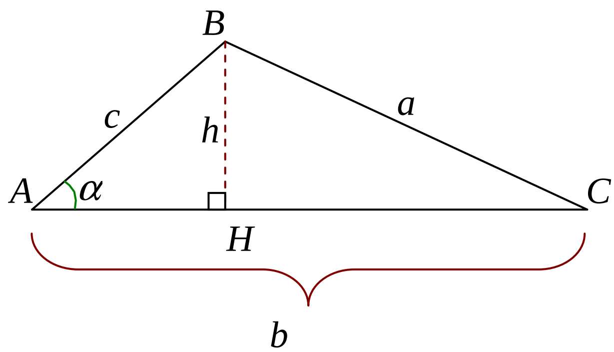
در این درس با یک قضیه‌ی بسیار مهم و کاربردی دیگری موسوم به قضیه‌ی کسینوس ها در مثلث آشنا شویم.

قضیه‌ی کسینوس ها: در هر مثلث، مربع هر ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین این دو ضلع برابر است.

اثبات: این قضیه را برای در مثلث ABC در سه حالت $\angle A=۹۰^\circ$ و $\angle A<۹۰^\circ$ و $\angle A>۹۰^\circ$ ثابت می کنیم.

حالت اوّل : در مثلث ABC، $\angle A<۹۰^\circ$ است.

در این حالت ابتدا ارتفاع BH را رسم می کنیم. سپس با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه، می توان نوشت :



$$\Delta(ABH):\cos\alpha=\frac{AH}{c}\rightarrow AH=c\times\cos\alpha$$

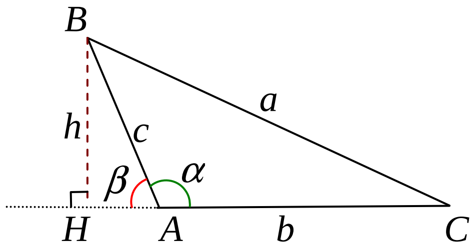
$$\Delta(ABH):c^{۲}=h^{۲}+AH^{۲}$$

$$\Delta(BCH):a^{۲}=h^{۲}+CH^{۲}\xrightarrow{CH=b-AH}a^{۲}=h^{۲}+(b-AH)^{۲}$$
$$\rightarrow a^{۲}=h^{۲}+b^{۲}-۲b\times AH+AH^{۲}$$

$$\rightarrow a^{۲}=c^{۲}+b^{۲}-۲b\times(c\times\cos\alpha)=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\alpha$$

حالت دوّم : در مثلث ABC، $\angle A > ۹۰^\circ$ است.

در این حالت ابتدا ارتفاع BH را رسم می کنیم. سپس با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه، می توان نوشت :



چون β زاویه‌ی خارجی رأس A می باشد. پس $\beta = \pi - \alpha$ لذا :

$$\sin\beta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\Delta(ABH) : \cos\beta = \frac{AH}{AB} \rightarrow AH = c \times \cos\beta \rightarrow AH = -c \times \cos\alpha$$

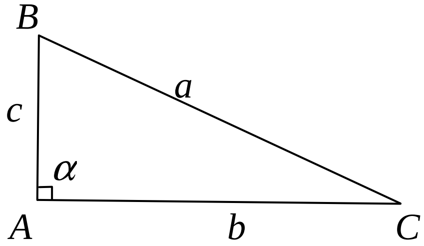
$$\Delta(ABH) : c^{۲} = h^{۲} + AH^{۲}$$

$$\Delta(BCH) : a^{۲} = h^{۲} + CH^{۲} \xrightarrow{CH = b + AH} a^{۲} = h^{۲} + (b + AH)^{۲}$$
$$\rightarrow a^{۲} = h^{۲} + b^{۲} + ۲b \times AH + AH^{۲}$$

$$\rightarrow a^{۲} = c^{۲} + b^{۲} + ۲b \times (-c \times \cos\alpha)$$

$$\rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos\alpha$$

حالت سوّم : در مثلث ABC، $\angle A = ۹۰^\circ$ است.



در این حالت طبق قضیه‌ی فیثاغورس می توان نوشت:

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$$

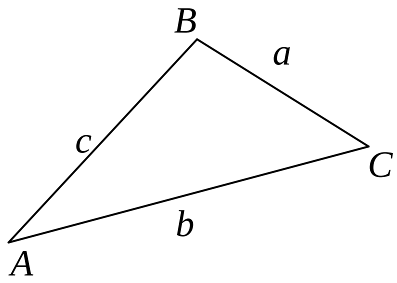
حال چون $\cos A=۰$ پس مانعی ندارد که بنویسیم:

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\alpha$$

پس در این حالت، قضیه‌ی داده شده نیز برقرار است.

***

قضیه‌ی کسینوس ها : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

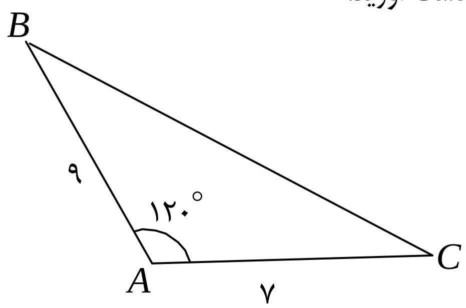


$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A$$

$$b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}-۲ac\cos B$$

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos C$$

تمرین۱ : با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی ضلع BC را به دست آورید.



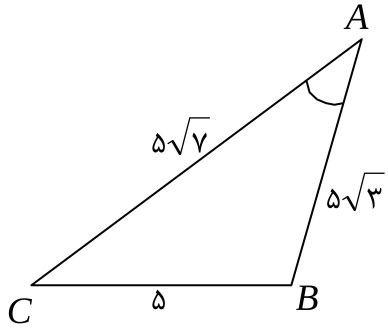
تمرین۲ : طول قطر یک پنج ضلعی منتظم که طول ضلع آن۱۰ سانتی متر باشد را پیدا کنید.

$(\cos ۱۰۸^{\circ}=-۰/۳)$

توجه : با توجه به رابطه‌ی فوق می توان نتیجه گرفت که:

$$\cos A=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc}$$

تمرین۳ : با توجه به شکل مقابل کسینوس زاویه‌ی A را محاسبه کنید.

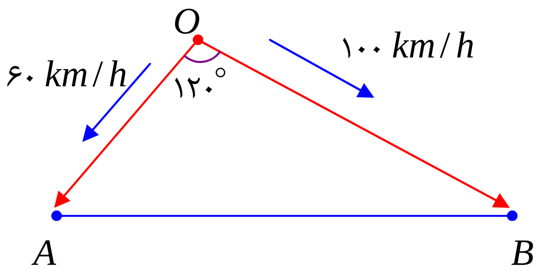


حل :

$$\cos A=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc}=\frac{(۵\sqrt{۷})^{۲}+(۵\sqrt{۳})^{۲}-(۵)^{۲}}{۲(۵\sqrt{۷})(۵\sqrt{۳})}$$

$$=\frac{۱۷۵+۷۵-۲۵}{۵۰\sqrt{۲۱}}=\frac{۲۲۵}{۵۰\sqrt{۲۱}}=\frac{۹}{۲\sqrt{۲۱}}=\frac{۹\sqrt{۲۱}}{۲(۲۱)}=\frac{۳\sqrt{۲۱}}{۱۴}$$

تمرین۴ : مطابق شکل مقابل، دو قایق از یک نقطه در دریاچه ای با سرعت های ۶۰ و ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت و با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه از هم دور می شوند. تعیین کنید که نیم ساعت بعد این دو قایق چه فاصله ای از یکدیگر دارند؟



حل : با توجه به نقطه‌ی شروع دو قایق و سرعت های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق به صورت زیر است.

$$OA=۶۰\times\frac{۱}{۲}=۳۰\ km \qquad \text{و} \qquad OB=۱۰۰\times\frac{۱}{۲}=۵۰\ km$$

حال به کمک قضیه‌ی کسینوس ها می نویسیم.

$$AB^{۲}=(۳۰)^{۲}+(۵۰)^{۲}-۲(۳۰)(۵۰)\cos(۱۲۰)$$

$$\rightarrow AB^{۲}=۹۰۰+۲۵۰۰-۳۰۰۰(-\frac{۱}{۲})=۹۰۰+۲۵۰۰+۱۵۰۰=۴۹۰۰$$

$$\rightarrow AB=۷۰km$$

تمرین۵ : در مثلث ABC داریم، $AB=۲\sqrt{۲}$ و $AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ و $\angle A=۶۰^\circ$ در این صورت:

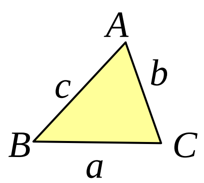
الف : طول ضلع BC را به دست آورید.

ب : اندازه‌ی زاویه های ABC و ACB را به دست آورید.

حل : با توجه به قضیه‌ی کسینوس ها داریم.

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A$$

$$\rightarrow a^{۲}=(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۲}+(۲\sqrt{۲})^{۲}-۲(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})\cos(۶۰^\circ)$$



$$\rightarrow a^{۲} = (\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۲} + (۲\sqrt{۲})^{۲} - ۲(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})(\frac{۱}{۲})$$

$$\rightarrow a^{۲} = ۶ + ۲\sqrt{۱۲} + ۲ + ۸ - ۲\sqrt{۱۲} - ۴ = ۱۲ \rightarrow a = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

همچنین با توجه به قضیه‌ی سینوس ها می توان نوشت:

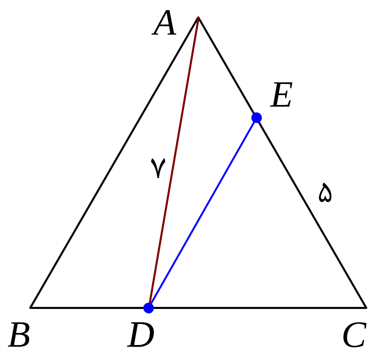
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰} \rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C} = ۴ \rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\rightarrow \angle C = ۴۵^{\circ}$$

و در نهایت داریم:

$$\angle B = ۱۸۰ - (\angle A + \angle B) = ۱۸۰ - (۶۰ + ۴۵) = ۷۵^{\circ}$$

تمرین۶ : در مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع ۸ واحد، روی ضلع BC نقطه‌ی D، به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A، همچنین روی ضلع AC نقطه‌ی E، به فاصله‌ی ۵ واحد از رأس C در نظر گرفته شده اند.

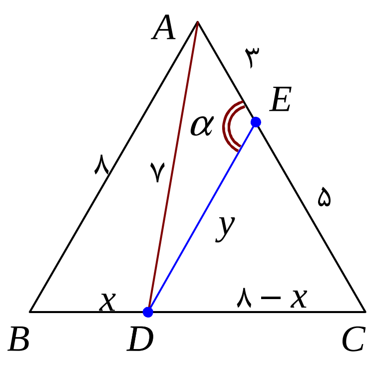


الف : با فرض اینکه $CD > BD$، تعیین کنید که نقطه‌ی D از نقاط B و C چه فاصله ای دارد؟

ب : تعیین کنید که نقطه‌ی E از نقطه‌ی D چه فاصله ای دارد؟

ج : اندازه‌ی زاویه‌ی AED را محاسبه کنید؟

حل : قرار می دهیم، $BD = x$ و $DE = y$ و $\angle AED = \alpha$ در این صورت داریم:



$$\Delta(ABD): ۷^۲ = x^۲ + ۸^۲ - ۲(x)(۸)\cos ۶۰ \to x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \to (x-۳)(x-۵) = ۰$$

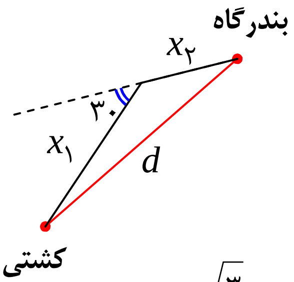
$$\to x = ۳ \ , \ \ x = ۵ \xrightarrow{DB<DC} x = DB = ۳ \ , \ \ DC = ۵$$

و چون $DC = CE = ۵$ پس مثلث DEC متساوی الساقین است و چون یـک زاویـه‌ی۶۰ درجـه دارد، پس متساوی الاضلاع است. یعنی $DE = ۵$. در مثلث DEC زاویه‌ی α یک زاویه‌ی خارجی است. پس :

$$\alpha = ۶۰ + ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

تمرین۷ : یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰ درجه انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می دهد و یک سـاعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

حل :



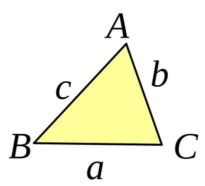
$$\begin{cases} t_۱ = ۱ \\ x_۱ = ۶۰ \times ۱ = ۶۰ km \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_۲ = ۱/۵ - ۱ = ۰/۵ \\ x_۲ = ۴۰ \times (۰/۵) = ۲۰ \ km \end{cases}$$

$$d^۲ = (۶۰)^۲ + (۲۰)^۲ - ۲(۶۰)(۲۰)\cos(۱۵۰) = ۳۶۰۰ + ۴۰۰ - ۲۴۰۰(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$\to d^۲ = ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} \xrightarrow{\sqrt{۳}=۱/۷۳} d = \sqrt{۶۰۷۸} = ۷۷/۹۶ \ \ km$$

تمرین ۸ : به کمک قضیه‌ی کسینوس ها ثابت کنید، در مثلث ABC



الف : $\angle A > ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$

ب : $\angle A < ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$

پ : $\angle A = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$

اثبات الف:

$$\angle A > ۹۰^\circ \to \cos A < ۰ \to ۲bc\cos A < ۰ \to -۲bc\cos A > ۰$$

$$\xrightarrow{+(b^۲+c^۲)} b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A > b^۲ + c^۲ \to a^۲ > b^۲ + c^۲$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \to b^2 + c^2 - 2bc\cos A > b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc\cos A > 0$$

$$\to 2bc\cos A < 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A < 0 \to \angle A > 90^\circ$$

اثبات ب:

$$\angle A < 90^\circ \to \cos A > 0 \to 2bc\cos A > 0 \to -2bc\cos A < 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2 \to a^2 < b^2 + c^2$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \to b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc\cos A < 0$$

$$\to 2bc\cos A > 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A > 0 \to \angle A < 90^\circ$$

اثبات پ:

$$\angle A = 90^\circ \to \cos A = 0 \to 2bc\cos A = 0 \to -2bc\cos A = 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 \to a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \to b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc\cos A = 0$$

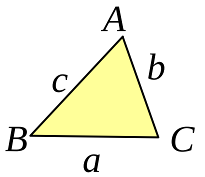
$$\to 2bc\cos A = 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A = 0 \to \angle A = 90^\circ$$

تمرین۹ : در هر مورد، مشخصاتی از مثلث ABC داده شده است. به کمک این مشخصات، نوع زاویه‌ی A (حاده، منفرجه یا قائمه بودن) را تعیین کنید.

الف : $AB = 10$ و $AC = 6$ و $BC = 9$

ب : $AB = 8$ و $AC = 4$ و $BC = 9$

ج : $AB = 8$ و $AC = 15$ و $BC = 17$



حل : به کمک تمرین قبل، کافی است، مقدار a^2 را با $b^2 + c^2$ مقایسه کنیم. در این صورت:

الف:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 81 \\ b^2 + c^2 = 36 + 100 = 136 \end{array}\right\} \to a^2 < b^2 + c^2 \to \angle A < 90^\circ$$

ب :

$$\left.\begin{array}{l} a^{۲}=۸۱ \\ b^{۲}+c^{۲}=۱۶+۶۴=۸۰ \end{array}\right\} \rightarrow a^{۲}>b^{۲}+c^{۲} \rightarrow \angle A>۹۰^{\circ}$$

ج :

$$\left.\begin{array}{l} a^{۲}=۲۸۹ \\ b^{۲}+c^{۲}=۲۲۵+۶۴=۲۸۹ \end{array}\right\} \rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲} \rightarrow \angle A=۹۰^{\circ}$$

تمرین ۱۰ : در مثلثی رابطه‌ی $a=۲b\cos C$ برقرار است. نوع مثلث را تعیین کنید.

حل :

$$\cos C=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab} \xrightarrow{\cos c=\frac{a}{۲b}} \frac{a}{۲b}=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}$$

$$\rightarrow a^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-c^{۲} \rightarrow b^{۲}-c^{۲}=۰ \rightarrow b^{۲}=c^{۲} \rightarrow b=c$$

یعنی مثلث متساوی الساقین است.

تمرین ۱۱ : در مثلث ABC ثابت کنید که :

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۲abc}$$

حل :

$$\cos A=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc} \rightarrow \frac{\cos A}{a}=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲abc}$$

$$\cos B=\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲ac} \rightarrow \frac{\cos B}{b}=\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲abc}$$

$$\cos C=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab} \rightarrow \frac{\cos C}{c}=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲abc}$$

$$\rightarrow \frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲abc}+\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲abc}+\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲abc}$$

$$=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۲abc}$$

***

تمرین برای حل :

۱۲ : طول اضلاع مثلثی ۴ و ۵ و ۷ است.کسینوس بزرگترین زاویه‌ی این مثلث را تعیین کنید.

۱۳ : طول قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم که طول ضلع آن ۵ سانتی متر باشد را پیدا کنید.

۱۴ : در مثلثی رابطه‌ی $a^۲ = b^۲ + c^۲ - bc$ برقرار است. اندازه‌ی زاویه‌ی A چقدر است؟

۱۵ : در مثلثی رابطه‌ی $a^۲ = b^۲ + c^۲ + bc$ برقرار است. اندازه‌ی زاویه‌ی A چقدر است؟

۱۶ : در مثلثی $a = ۴$ و $b = ۲\sqrt{۳}$ و $\angle C = ۳۰^\circ$ اندازه‌ی دیگر زاویه ها و ضلع سوّم مثلث را بیابید.

۱۷ : در مثلث ABC، اگر $AB = BC = ۲$ و $AC = ۲\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$. اندازه‌ی زاویه‌ی ABC را محاسبه کنید.

۱۸ : طول اضلاع مثلثی ۴ و ۵ و ۷ است. حاصل $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$ را تعیین کنید.

***

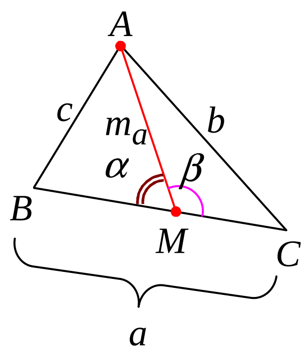
محاسبه‌ی طول میانه ها

می دانید که میانه پاره خطی است که یک رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل آن وصل می کند. در این قسمت رابطه ای را معرفی می کنیم که به کمک آن می توان با داشتن اندازه‌ی اضلاع مثلث، اندازه‌ی میانه را محاسبه کرد.

قضیه‌ی طول میانه ها : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$، اگر اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع a برابر m_a باشد، در این صورت می توان نوشت:

$$b^۲+c^۲=۲m_a{}^۲+\frac{۱}{۲}a^۲$$

اثبات :



$$\beta=۱۸۰-\alpha \rightarrow \cos\beta=-\cos\alpha$$

$$\Delta(AMC): b^۲=(\frac{a}{۲})^۲+m_a{}^۲-۲(\frac{a}{۲})(m_a)\cos\beta$$

$$\rightarrow b^۲=\frac{a^۲}{۴}+m_a{}^۲+a.m_a\cos\alpha \quad (۱)$$

$$\Delta(ABM): c^۲=(\frac{a}{۲})^۲+m_a{}^۲-۲(\frac{a}{۲})(m_a)\cos\alpha$$

$$\rightarrow c^۲=\frac{a^۲}{۴}+m_a{}^۲-a.m_a\cos\alpha \quad (۲)$$

اکنون اگر روابط (۲)و(۱) را نظیر به نظیر جمع کنیم. خواهیم داشت:

$$b^۲+c^۲=(\frac{a^۲}{۴}+m_a{}^۲+a.m_a\cos\alpha)+(\frac{a^۲}{۴}+m_a{}^۲-a.m_a\cos\alpha)$$

$$\rightarrow b^۲+c^۲=۲m_a{}^۲+\frac{a^۲}{۲}$$

توجه : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$، اگر اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع a برابر m_a باشد، در این صورت می توان نوشت:

$$m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}$$

قضیه‌ی طول میانه ها : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

تمرین۱۹: در مثلث ABC با اضلاع $BC=8$ و $AC=6$ و $AB=4$، طول میانه‌ی AM را تعیین کنید.

حل :

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(36+16)-64}=\frac{1}{2}\sqrt{104-64}=\frac{1}{2}\sqrt{40}=\sqrt{10}$$

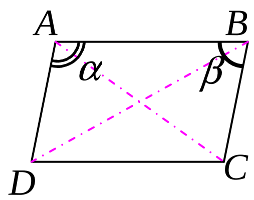
تمرین برای حل :

۲۰ : طول اضلاع مثلثی ۹ و ۸ و ۳ سانتی متر می باشند، طول میانه‌ی وارد بر بزرگترین ضلع این مثلث را محاسبه کنید.

***

تمرین ۲۱ : ثابت کنید که در هر متوازی الاضلاع، مجموع مربعات دو قطر با مجموع مربعات اضلاع برابر است.

اثبات :



$$\alpha+\beta=180\rightarrow\beta=180-\alpha\rightarrow\cos\beta=-\cos\alpha$$

$$\Delta(ABD):BD^2=AB^2+AD^2-2(AB)(AD)\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\Delta(ABC):AC^2=AB^2+BC^2-2(AB)(BC)\cos\beta$$

$$\xrightarrow{\cos\beta=-\cos\alpha}AC^2=AB^2+BC^2+2(AB)(BC)\cos\alpha$$

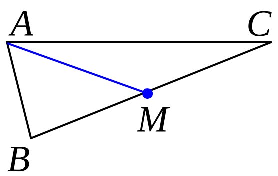
$$\xrightarrow{AB=DC\ ,\ BC=AD}AC^2=DC^2+BC^2+2(AB)(AD)\cos\alpha \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)}AC^2+BD^2=AB^2+AD^2+DC^2+BC^2$$

نتیجه : بنابر اینکه در متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی می باشند. در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات دو قطر با دو برابر مجموع مربعات هر دو ضلع مجاور برابر است.

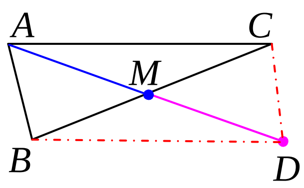
$$AC^۲ + BD^۲ = ۲(AB^۲ + BC^۲)$$

تمرین۲۲ : در مثلث مقابل AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC است. ثابت کنید:



$$m_a = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲ + c^۲) - a^۲}$$

اثبات : میانه‌ی AM را از طرف نقطه‌ی M به اندازه‌ی خودش امتداد می دهیم، تا نقطه‌ی D بدست آید.نقطه‌ی D را به نقاط B و C وصل می کنیم. قطرهای چهارضلعی بدست آمده، همدیگر را نصف می کنند، لذا این چهارضلعی متوازی الاضلاع است. پس :



$$AD^۲ + BC^۲ = AC^۲ + DC^۲ + BD^۲ + AB^۲$$

$$\xrightarrow{AC=BD\ ,\ DC=AB} AD^۲ + BC^۲ = ۲(AC^۲ + AB^۲)$$

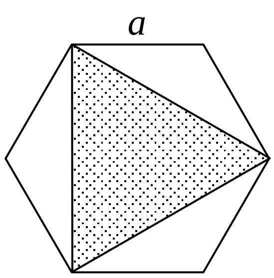
$$\xrightarrow{AD=۲AM} (۲AM)^۲ + BC^۲ = ۲(AC^۲ + AB^۲)$$

$$\rightarrow (۲m_a)^۲ = ۲(b^۲ + c^۲) - a^۲$$

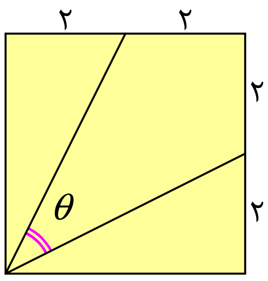
$$\rightarrow ۲m_a = \sqrt{۲(b^۲ + c^۲) - a^۲} \rightarrow m_a = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲ + c^۲) - a^۲}$$

***

تمرین برای حل :



۲۳ : در شکل مقابل شش ضلعی منتظم به ضلع a داده شده است. مساحت مثلثی که از وصل کردن یک در میان رئوس شش ضلعی تشکیل می شود را تعیین کنید.



۲۴ : در مربع شکل مقابل ، مقدار $\sin\theta$ کدام است؟ (راه حل قید شود.)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

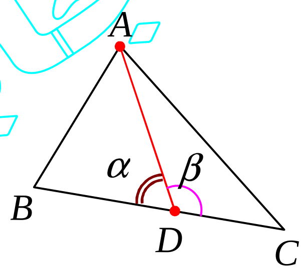
قضیه‌ی استوارت

در این قسمت به معرفی یک قضیه‌ی معروف در هندسه، موسوم به قضیه‌ی استوارت، می پردازیم. این قضیه اندازه‌ی پاره‌خط وارد از یک رأس بر ضلع روبرو را بر حسب اندازه اضلاع مثلث و دو پاره‌خط ایجاد شده بر روی ضلع را تعیین می کند.

قضیه‌ی استوارت: اگر D نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC در مثلث ABC باشد. در این صورت می توان نوشت:

$$AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.BC + DB.DC.BC$$

اثبات : با توجه به شکل مقابل برای مثلث های ADB و ADC قضیه‌ی کسینوس ها را می نویسیم. در این صورت داریم:



$$\beta = 180 - \alpha \rightarrow \cos\beta = -\cos\alpha$$

$$\Delta(ABD): AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2(AD)(DB)\cos\alpha$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^2.DC = AD^2.DC + DB^2.DC - 2(AD)(DB)(DC)\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\Delta(ADC): AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2(AD)(DC)\cos\beta$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2.DB = AD^2.DB + DC^2.DB + 2(AD)(DC)(DB)\cos\alpha \qquad (2)$$

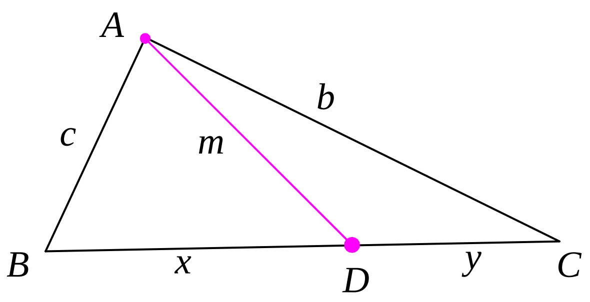
حال روابط (۱)و(۲) را نظیر به نظیر جمع می کنیم.

$$AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.DC + DB^2.DC + AD^2.DB + DC^2.DB$$

$$\rightarrow AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2(DC + DB) + DB.DC(DB + DC)$$

$$\rightarrow AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.BC + DB.DC.BC$$

قضیه‌ی استـوارت: اگـر D نقطـه‌ای دلخـــــواه روی ضـــــلع BC در مثلث ABC باشد. در این صورت می توان نوشت :



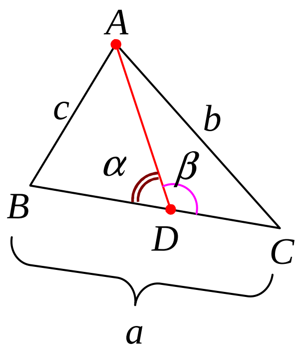
$$xb^۲ + yc^۲ = (x+y)m^۲ + xy(x+y)$$

تمرین۲۵ : به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه ها را ثابت کنید.

حل: گیریم که نقطه‌ی D پای میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد. پس $DB = DC$ لذا طبق قضیه‌ی استوارت داریم.

$$AB^۲.DC + AC^۲.DB = AD^۲.BC + DB.DC.BC$$

$$\xrightarrow{DB=DC} AB^۲.DB + AC^۲.DB = AD^۲.BC + DB^۲.BC$$

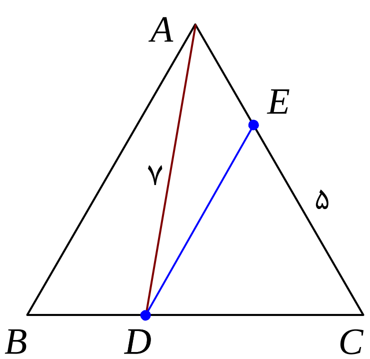


$$\xrightarrow{BC=۲DB} c^۲.DB + b^۲.DB = {m_a}^۲.۲DB + DB^۲.a$$

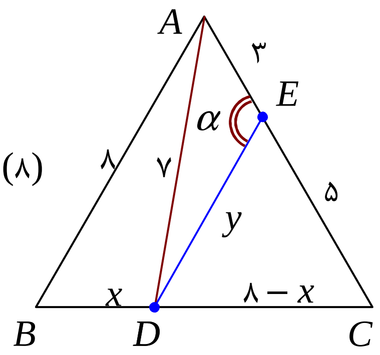
$$\xrightarrow{\div DB} c^۲ + b^۲ = ۲{m_a}^۲ + DB.a$$

$$\xrightarrow{DB=\frac{۱}{۲}a} c^۲ + b^۲ = ۲{m_a}^۲ + \frac{۱}{۲}.a^۲ \rightarrow m_a = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}$$

تمرین۲۶: در مثلث متساوی الاضـلاع ABC بـه طـول ضـلع ۸ واحد، روی ضلع BC نقطه‌ی D، به فاصـله‌ی ۷ واحـد از رأس A، همچنین روی ضلع AC نقطه‌ی E، به فاصله‌ی ۵ واحد از رأس C در نظر گرفته شده اند. با فرض اینکه $CD > BD$، تعیین کنید کـه نقطه‌ی D از نقاط B و C چه فاصله ای دارد؟



حل : قرار می دهیم، $BD=x$ و $DE=y$ و $\angle AED=\alpha$ در این صورت داریم:



$$AB^{۲}.DC+AC^{۲}.DB=AD^{۲}.BC+DB.DC.BC$$

$$\rightarrow (۸)^{۲}.(۸-x)+(۸)^{۲}.(x)=(۷)^{۲}.(۸)+(x).(۸-x).(۸)$$

$$\rightarrow ۶۴(۸-x)+۶۴x=۴۹\times ۸+۸x(۸-x)$$

$$\rightarrow ۶۴\times ۸-۶۴x+۶۴x=۴۹\times ۸+۸x(۸-x)$$

$$\xrightarrow{\div ۸} ۶۴=۴۹+۸x-x^{۲} \rightarrow x^{۲}-۸x+۱۵=۰ \rightarrow (x-۳)(x-۵)=۰$$

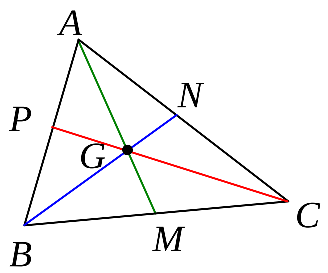
$$\xrightarrow{\div ۸} x=۳ \;,\; x=۵ \xrightarrow{DB<DC} x=DB=۳ \;,\; DC=۵$$

تمرین۲۷ : اگر AM و BN و CP میانه های مثلث ABC و نقطه‌ی G محل تلاقی آنها باشد.

ثابت کنید که :

$$AG^{۲}+BG^{۲}+CG^{۲}=\frac{۱}{۳}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})$$

حل :



$$b^{۲}+c^{۲}=۲m_a{}^{۲}+\frac{a^{۲}}{۲} \rightarrow ۲m_a{}^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-\frac{a^{۲}}{۲}$$

$$\xrightarrow{AG=\frac{۲}{۳}m_a \rightarrow m_a=\frac{۳}{۲}AG} ۲(\frac{۳}{۲}AG)^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-\frac{a^{۲}}{۲}$$

$$\rightarrow \frac{۹}{۲}AG^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-\frac{a^{۲}}{۲} \rightarrow AG^{۲}=\frac{۲}{۹}(b^{۲}+c^{۲}-\frac{a^{۲}}{۲})=\frac{۲}{۹}b^{۲}+\frac{۲}{۹}c^{۲}-\frac{۱}{۹}a^{۲}$$

به همین ترتیب :

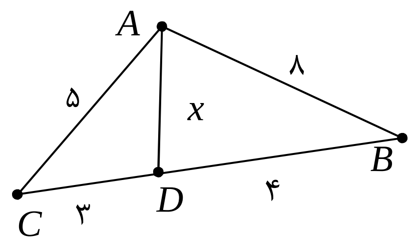
$$BG^{۲}=\frac{۲}{۹}a^{۲}+\frac{۲}{۹}c^{۲}-\frac{۱}{۹}b^{۲}$$

$$CG^{۲}=\frac{۲}{۹}a^{۲}+\frac{۲}{۹}b^{۲}-\frac{۱}{۹}c^{۲}$$

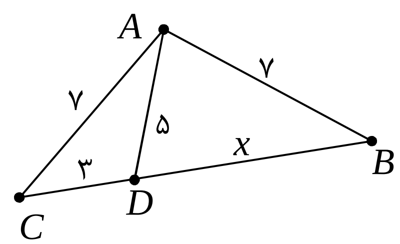
که با جمع هر سه تساوی فوق داریم :

$$AG^{۲}+BG^{۲}+CG^{۲}$$
$$=(\frac{۲}{۹}b^{۲}+\frac{۲}{۹}c^{۲}-\frac{۱}{۹}a^{۲})+(\frac{۲}{۹}a^{۲}+\frac{۲}{۹}c^{۲}-\frac{۱}{۹}b^{۲})+(\frac{۲}{۹}a^{۲}+\frac{۲}{۹}b^{۲}-\frac{۱}{۹}c^{۲})$$
$$=\frac{۱}{۳}a^{۲}+\frac{۱}{۳}b^{۲}+\frac{۱}{۳}c^{۲}=\frac{۱}{۳}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})$$

۲۸ : با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی پاره خط AD را به دست آورید.



۲۹ : با توجه به شکل مقابل مقدار x را بیابید.



***

تهیه کننده : جابرعامری

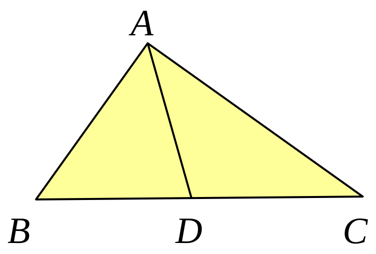
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس سوّم : قضیه‌ی نیمسازهای زاویه های داخلی

یکی دیگر از قضایای مهم هندسی ، قضیه‌ی نیمساز های زاویه های داخلی مثلث است. در این درس با این قضیه و روش محاسبه‌ی طول نیمساز آشنا شویم.

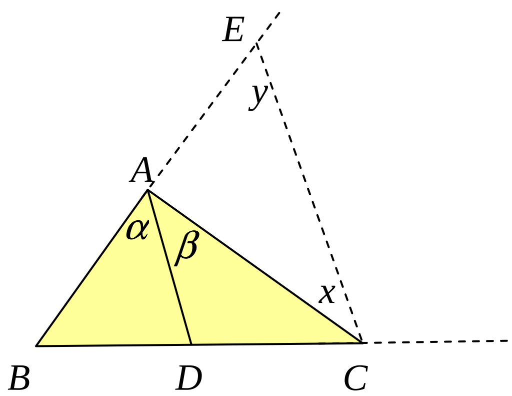
قضیه‌ی نیمساز های زوایه های داخلی مثلث : در هر مثلث ، نیمساز هر زاویه‌ی داخلی ، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می کند.



پاره خط AD نیمساز زاویه‌ی BAC است. : فرض

$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$: حکم

اثبات: اضلاع AB و BC را از طرف نقاط A و C امتداد داده و سپس از نقطه‌ی C خطی موازی با نیمساز زاویه‌ی A یعنی AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه‌ی E قطع کند. در این صورت داریم:



$AD \| CE \Rightarrow \angle\beta=\angle x$ و AC مورب

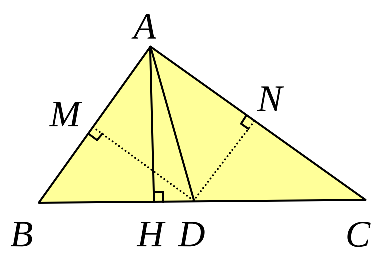
$AD \| CE \Rightarrow \angle\alpha=\angle y$ و BE مورب

از طرفی طبق فرض داشتیم: $\angle\alpha=\angle\beta$ پس $\angle x=\angle y$ و در نتیجه مثلث ACE متساوی الساقین است، یعنی $AE=AC$

از طرفی طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$AD \| CE \rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{CD} \xrightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD} \rightarrow \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$$

روش دوّم : از نقطه‌ی D بر اضلاع مثلث دو خط DM و DN را عمود می کنیم. می دانیم که هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس $DM=DN$ از طرفی:



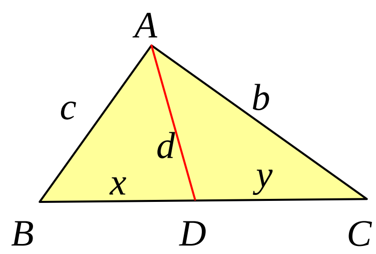
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BD}{\frac{1}{2}AH\times DC}=\frac{BD}{DC} \quad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{1}{2}DM\times AB}{\frac{1}{2}DN\times AC}\overset{DM=DN}{=}\frac{AB}{AC} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\rightarrow\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$$

***

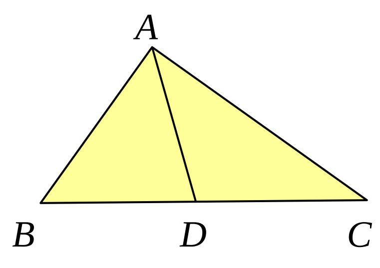
قضیه‌ی نیمساز ها : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$ اگر AD نیمساز زاویه‌ی داخلی A باشد داریم:



$$\frac{c}{x}=\frac{b}{y}$$

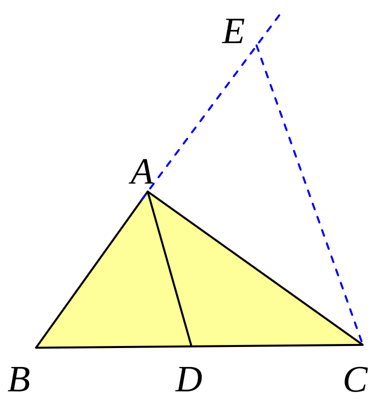
***

تمرین ۱ : نقطه‌ی D روی ضلع BC از مثلث ABC طوری قرار دارد که $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$. ثابت کنید، نقطه‌ی D پای نیمساز نظیر رأس A است.



فرض : $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$

حکم : پاره خط AD نیمساز زاویه‌ی BAC است.



اثبات: از نقطه‌ی C خطی موازی با AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه‌ی E قطع کند. در این صورت و بنابر قضیه‌ی تالس در مثلث BCE داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}(۱)$$

اکنون با توجه به فرض داریم:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}\rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}(۲)$$

بنابر نتایج ۱ و ۲ می توان نوشت : $\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{AC}\rightarrow AE=AC$

یعنی مثلث ACE متساوی الساقین است. پس $\angle AEC=\angle ACE$. و چون AD و CE موازیند، پس:

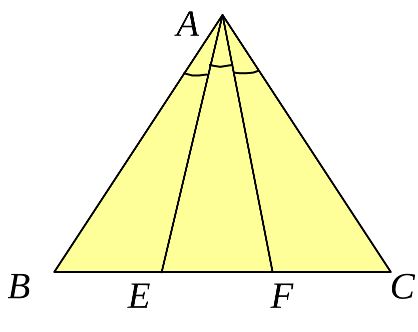
$$\begin{cases}\angle CAD=\angle ACE\\ \angle BAD=\angle AEC\end{cases}\rightarrow\angle BAD=\angle CAD$$

یعنی AD نیمساز زاویه‌ی BAC است.

***

نتیجه : در هر مثلث، نیمساز هر زاویه ، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می کند و برعکس

***



تمرین۲: در شکل مقابل AE و AF زاویه‌ی A را به سه قسمت برابر تقسیم کرده اند. ثابت کنید که:

$$\frac{BE}{CF}=\frac{AB\times AE}{AC\times AF}$$

اثبات:

الف: در مثلث ABF پاره خط AE نیمساز زاویه‌ی BAF است. پس:

$$\frac{AB}{BE}=\frac{AF}{EF}\rightarrow\frac{AB}{AF}=\frac{BE}{EF}(۱)$$

ب: در مثلث AEC پاره خط AF نیمساز زاویه‌ی EAC است. پس:

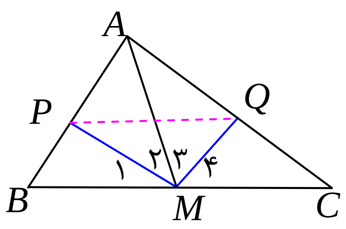
$$\frac{AE}{EF}=\frac{AC}{CF}\rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{EF}{CF}(۲)$$

اکنون نتایج ۱ و ۲ را در همدیگر ضرب می کنیم.

$$\frac{AB}{AF}\times\frac{AE}{AC}=\frac{BE}{EF}\times\frac{EF}{CF}\rightarrow\frac{AB\times AE}{AC\times AF}=\frac{BE}{CF}$$

***

تمرین ۳ : در مثلث ABC میانه‌ی AM و نیمساز های دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم کنید. اگر این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند. ثابت کنید دو خط PQ و BC موازیند.



اثبات:

در مثلث AMB پاره خط PM نیمساز رأس M است ، پس :

$$\frac{MB}{PB}=\frac{AM}{AP}\rightarrow\frac{AP}{PB}=\frac{AM}{MB}\quad(۱)$$

در مثلث AMC پاره خط QM نیمساز رأس M است ، پس :

$$\frac{MC}{QC}=\frac{AM}{AQ}\rightarrow\frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{MC}\quad(۲)$$

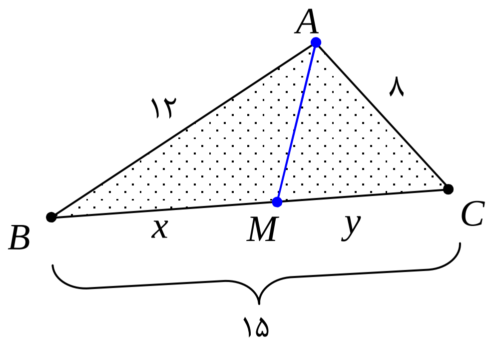
از مقایسه‌ی روابط ۱ و ۲ و بنابر اینکه $MB=MC$ ، پس می توان نوشت : $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$

و طبق عکس قضیه‌ی تالس نتیجه می شود: $PQ \| BC$

***

تمرین۴ : اندازه های سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی متر می باشند. اندازه‌ی پاره خط هایی که نیمساز درونی زاویه‌ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید.

حل: می دانیم که در هر مثلث بزرگترین زاویه روبرو به بزرگترین ضلع است. از طرفی نیمساز هر زاویه‌ی داخلی ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می کند. پس:



$$x+y=۱۵$$

$$\frac{۱۲}{x}=\frac{۸}{y}\rightarrow\frac{۱۲}{۸}=\frac{x}{y}\rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{x}{y}\rightarrow ۲x=۳y\rightarrow ۲x-۳y=۰$$

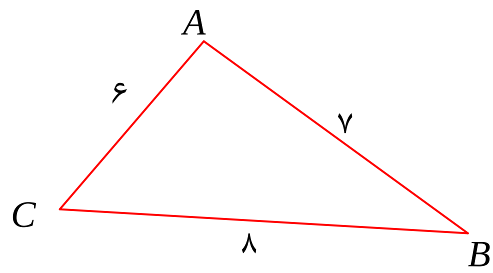
حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x+y=۱۵ \\ ۲x-۳y=۰ \end{cases}\rightarrow x=۹, y=۶$$

***

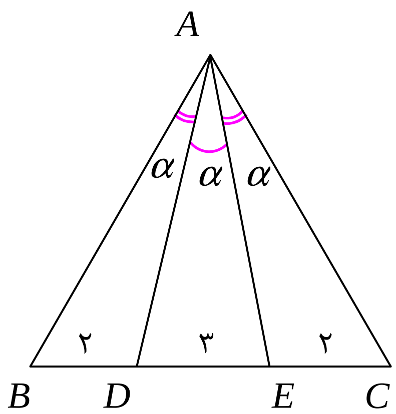
تمرین برای حل :

۵ : در شکل روبرو، طول دو قطعه‌ای که نیمساز زاویه‌ی C روی ضلع AB جدا می کند، را حساب کنید.



۶ : در مثلث ABC داریم، $AB=۷$ و $AC=۵$ و $BC=۱۰$ است. طول های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه‌ی A روی ضلع مقابل آن ایجاد می کند، را به دست آورید.

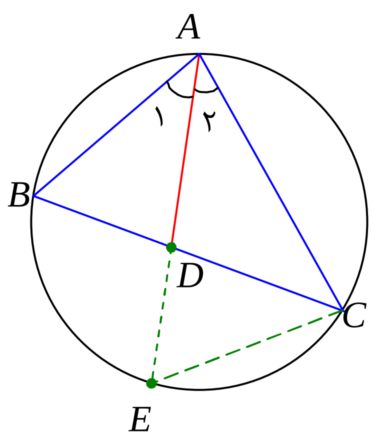
۷ : با توجه به شکل زیر ، حاصل $\frac{AB\times AD}{AC\times AE}$ را بدست آورید.



محاسبه‌ی طول نیمساز ها

در این قسمت رابطه ای را معرفی می کنیم که به کمک آن می توان، به کمک اندازه‌ی اضلاع مثلث، اندازه‌ی نیمساز زاویه‌ی داخلی مثلث را محاسبه کرد.

قضیه‌ی طول نیمساز ها : در هر مثلث ، مربع اندازه‌ی هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه‌ی دوضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه‌ی دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند.



اثبات : نیمساز زاویه‌ی داخلی A را امتداد می دهیم. تا دایره‌ی محیطی مثلث را در نقطه‌ی E قطع کند. سپس نقطه‌ی E را به C وصل می کنیم. در این صورت چون AD نیمساز زاویه‌ی A است، پس $\angle A_1 = \angle A_2$. همچنین چون دو زاویه‌ی B و E محاطی بوده و برابر نصف کمان AC می باشند، پس $\angle B = \angle E$. لذا دو مثلث ABD و AEC به حالت تساوی دو زاویه متشابهند.

پس :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD}$$

از تناسب اوّل می توان نتیجه گرفت:

$$AB.AC = AD.AE$$

و چون $AE = AD + DE$ داریم.

$$AB.AC = AD.(AD + DE)$$

یا اینکه :

$$AB.AC = AD^2 + AD.DE \quad (۱)$$

همچنین بنابر اینکه دو وتر BC و AE در داخل دایره متقاطع هستند. پس :

$$AD.DE = BD.DC \quad (۲)$$

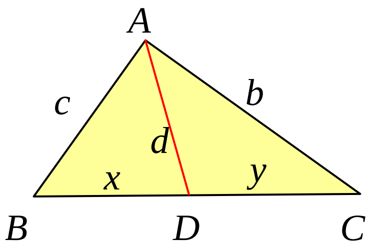
در نهایت از روابط (۲) و(۱) داریم:

$$AB.AC = AD^2 + BD.DC$$

یعنی :

$$AD^2 = AB.AC - BD.DC$$

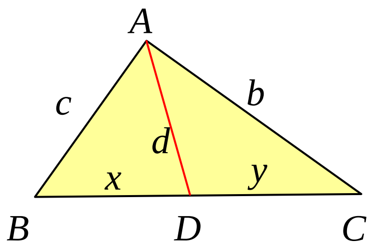
قضیه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی داخلی: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$، اگر نیمساز زاویه‌ی A برابر d و این نیمساز، ضلع a را به دو قطعه به طول های x و y تبدیل کند، در این صورت می توان نوشت:



$$d_a=\sqrt{bc-xy}$$

تمرین۸ : در مثلث ABC، $AB=۳$ و $AC=۵$ و $BC=۷$ است. نیمساز زاویه‌ی داخلی A را به دست آورید.

حل : به کمک قضیه‌ی نیمسازها داریم.



$$\frac{c}{x}=\frac{b}{y}\rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{۵}{y}\rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۳}{۵}\rightarrow\frac{x+y}{y}=\frac{۸}{۵}$$

$$\xrightarrow{x+y=۷}\frac{۷}{y}=\frac{۸}{۵}\rightarrow y=\frac{۳۵}{۸}$$

$$\xrightarrow{x+y=۷}x=۷-\frac{۳۵}{۸}=\frac{۲۱}{۸}$$

اکنون به کمک قضیه‌ی طول نیمساز ها می توان نوشت:

$$d_a=\sqrt{bc-xy}$$

$$\rightarrow d_a=\sqrt{(۵)(۳)-(\frac{۲۱}{۸})(\frac{۳۵}{۸})}=\sqrt{۱۵-\frac{۷۳۵}{۶۴}}=\sqrt{\frac{۲۲۵}{۶۴}}\rightarrow d_a=\frac{۱۵}{۸}$$

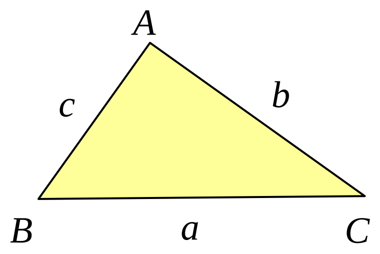
تمرین برای حل :

۹ : در مثلث ABC، $AB=۷$ و $AC=۴$ و $BC=۱۰$ است. نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.

***

درس چهارم : قضیه‌ی هرون برای محاسبه ی مساحت مثلث

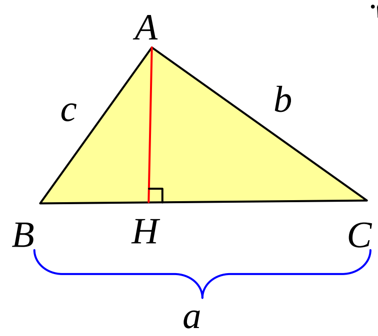
به کمک اندازه‌ی سه ضلع مثلث می توان مساحت آن را محاسبه کرد. در این درس، با این روش را که موسوم به دستور هرون می باشد، آشنا شویم.



قضیه‌ی هرون : اگر c و b و a اندازه های سه ضلع یک مثلث و $p=\frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط آن باشد. می توان مساحت مثلث را به صورت زیر به دست آورد.

$$S=\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$$

اثبات[1]: در ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می کنیم. سپس رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث ABH می نویسیم.



$$\Delta(ABH): AH^۲+BH^۲=c^۲$$
$$\rightarrow AH^۲+(a-CH)^۲=c^۲$$
$$\rightarrow AH^۲+a^۲-۲a.CH+CH^۲=c^۲$$

و چون در مثلث ACH داریم، $AH^۲+CH^۲=b^۲$ پس :

$$b^۲+a^۲-۲a.CH=c^۲$$

لذا

$$CH=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲a}$$

بازچون در مثلث ACH رابطه‌ی $AH^۲=b^۲-CH^۲$ را داریم. پس:

$$AH^۲=b^۲-(\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲a})^۲$$

در ادامه داریم:

---

[1]. اثبات این قضیه برای مطالعه است.

$$AH^{۲}=[b-(\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲a})][b+(\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲a})]$$

$$\to AH^{۲}=[\frac{۲ab}{۲a}-\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲a}][\frac{۲ab}{۲a}+\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲a}]$$

$$\to AH^{۲}=(\frac{۲ab-a^{۲}-b^{۲}+c^{۲}}{۲a})(\frac{۲ab+a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲a})$$

$$\to AH^{۲}=\frac{c^{۲}-(a-b)^{۲}}{۲a}\times\frac{(a+b)^{۲}-c^{۲}}{۲a}$$

$$\to AH^{۲}=\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{۲a}\times\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{۲a}$$

$$\to AH^{۲}=\frac{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)}{۴a^{۲}}$$

$$\to AH^{۲}=\frac{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)}{۱۶}\times\frac{۴}{a^{۲}}$$

$$\to AH^{۲}=\frac{a+b+c}{۲}\times\frac{c-a+b}{۲}\times\frac{c+a-b}{۲}\times\frac{a+b-c}{۲}\times\frac{۴}{a^{۲}}$$

$$\to AH^{۲}=(\frac{a+b+c}{۲})\times(\frac{a+b+c}{۲}-a)\times(\frac{a+b+c}{۲}-b)\times(\frac{a+b+c}{۲}-c)\times\frac{۴}{a^{۲}}$$

$$\xrightarrow{p=\frac{a+b+c}{۲}} AH^{۲}=p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)\times\frac{۴}{a^{۲}}$$

$$\to AH=\frac{۲}{|a|}\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$$

$$\xrightarrow{|a|=a} AH=\frac{۲}{a}\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$$

با داشتن ارتفاع مثلث می توان مساحت را نیز محاسبه نمود.

$$S=\frac{۱}{۲}a.AH\to S=\frac{۱}{۲}a\times\frac{۲}{a}\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$$

$$\to S=\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$$

توجه: چون در هر مثلث $S=\frac{۱}{۲}ah_a$ ، پس می توان نوشت:

$$h_a=\frac{۲S}{a}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

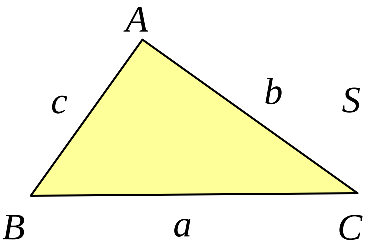
$$h_c=\frac{۲S}{c} \qquad \text{و} \qquad h_b=\frac{۲S}{b}$$

یعنی می توان بدین شکل اندازه‌ی ارتفاع های مثلث را نیز به دست آورد.

***

قضیه‌ی هرون: مساحت مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$ ، به صورت زیر است.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



که در آن $p=\frac{a+b+c}{۲}$ (نصف محیط) می باشد.

تمرین۱: به کمک دستور هرون مساحت و ارتفاع های مثلثی را حساب کنید که اندازه‌ی اضلاع آن ۱۳ و۱۴و ۱۵ باشند.

حل :

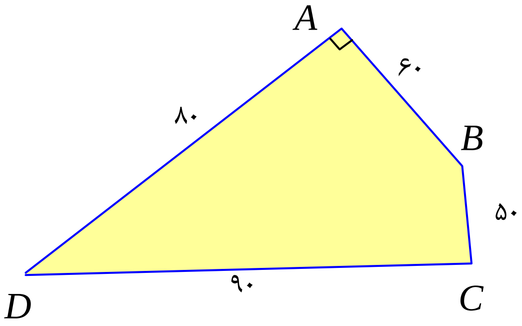
$$p=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=\frac{۴۲}{۲}=۲۱$$

$$S=\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}=\sqrt{۲۱\times(۲۱-۱۳)\times(۲۱-۱۴)\times(۲۱-۱۵)}$$

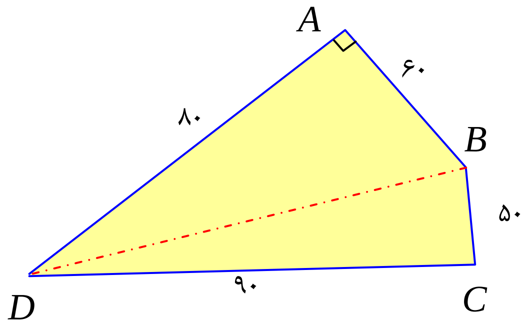
$$\rightarrow S=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۶}=\sqrt{۷^۲\times۳^۲\times۲^۲}=۸۴$$

$$\rightarrow\begin{cases} h_a=\frac{۲S}{a}=\frac{۲\times۸۴}{۱۳}=\frac{۱۶۸}{۱۳} \\ h_b=\frac{۲S}{b}=\frac{۲\times۸۴}{۱۴}=۱۲ \\ h_c=\frac{۲S}{c}=\frac{۲\times۸۴}{۱۵}=\frac{۵۶}{۵} \end{cases}$$

تمرین۲ : مساحت چهارضلعی شکل مقابل را به دست آورید.



حل : ابتدا قطر BD را رسم می کنیم. در این صورت چون مثلث ABD قائم الزاویه است. پس:



$$BD^{۲}=۸۰^{۲}+۶۰^{۲}=۶۴۰۰+۳۶۰۰=۱۰۰۰۰$$

$$\rightarrow BD=۱۰۰$$

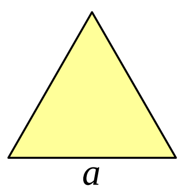
$$\Delta(ABD):S_{۱}=\frac{۱}{۲}(۸۰)\times(۶۰)=۲۴۰۰$$

$$\Delta(CBD):\begin{cases} p=\dfrac{۱۰۰+۵۰+۹۰}{۲}=۱۲۰ \\ S_{۲}=\sqrt{۱۲۰\times(۱۲۰-۱۰۰)(۱۲۰-۵۰)(۱۲۰-۹۰)}=۶۰۰\sqrt{۱۴} \end{cases}$$

$$\rightarrow S_t=S_{۱}+S_{۲}=۲۴۰۰+۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

تمرین۳ : به کمک دستور هرون مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.

حل :



$$S=\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$$

$$\xrightarrow{b=c=a} S=\sqrt{p(p-a)^{۳}}$$

$$\xrightarrow{p=\frac{۳a}{۲}} S=\sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{۳a}{۲}-a)^{۳}}=\sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{a}{۲})^{۳}}=\sqrt{\frac{۳a^{۴}}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

***

تمرین برای حل :

۴ : مساحت مثلثی به اضلاع ۷ و ۸ و ۹ را به دست آورید.

۵ : در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ سانتی متر، اندازه‌ی ارتفاع وارد از رأس با زاویه‌ی بزرگتر کدام است؟

الف) ۱۰/۵ ب) ۸/۵ ج) ۹/۶ د) ۹/۵

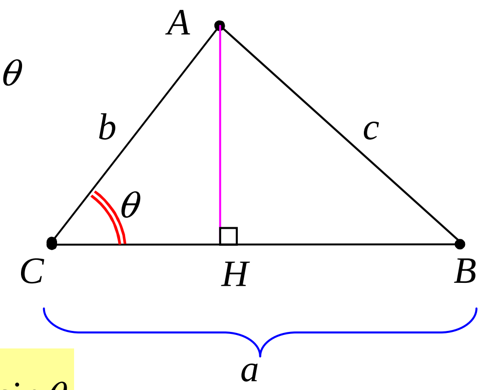
***

دستوری سینوسی برای محاسبه‌ی مساحت مثلث

در این قسمت به روشی دیگر به یک دستور دیگر برای محاسبه‌ی مساحت مثلث می پردازیم.

قضیه (محاسبه‌ی مساحت مثلث): مساحت هر مثلث با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه-ی بین آن دو ضلع برابر است.

اثبات :



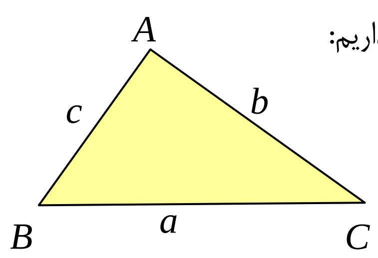
$$\Delta(ACH):\sin\theta=\frac{AH}{AC}\to AH=AC\times\sin\theta$$

$$S=\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{1}{2}BC\times AC\times\sin\theta$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

***

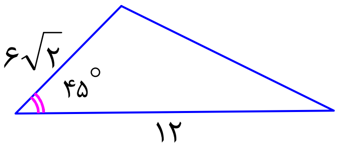
قـضیه‌ی سینوســی مــساحت مثلـث : در هــر مثلــث ABC بــا اضــلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$ داریم:



$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

***

تمرین۶ : مساحت مثلث مقابل را حساب کنید.



تمرین۷ : یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، را در نظر بگیرید. سپس ثابت کنید:

الف: مساحت این مثلث برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

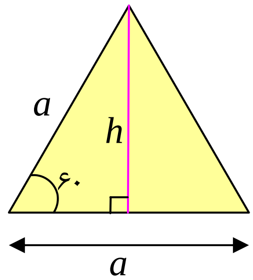
ب: اندازه‌ی ارتفاع مثلث برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

حل :

الف :

$$S=\frac{1}{2}(a)(a)\sin(60)=\frac{1}{2}a^2(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

ب :



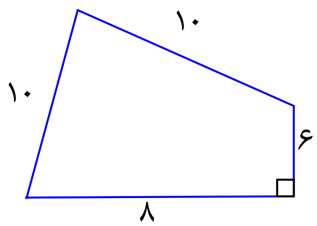
$$h=\frac{2S}{a}=\frac{2(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

***

تمرین برای حل :

۸ : مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع، به طول ضلع ۱۰ سانتی متر را حساب کنید.

۹ : مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



۱۰ : به کمک دستور سینوسی مساحت ثابت کنید در هر مثلث، نسبت اندازه‌ی یک ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابل برابر نسبت اندازه‌ی ضلع دیگر به سینوس زاویه‌ی مقابل می باشد. (قضیه‌ی سینوس ها)

۱۱ : ثابت کنید که مساحت هر متوازی الاضلاع برابر حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع است.

۱۲ : مساحت متوازی الاضلاعی را حساب کنید که اندازه‌ی دو ضلع آن $7\sqrt{3}$ و ۸ سانتی متر و زاویه‌ی بین آنها ۱۲۰ درجه است.

۱۳ : ثابت کنید که مساحت هر چهارضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه های دو قطر در سینوس کوچکترین زاویه ی بین آن دو قطر است.

۱۴ : اگر c و b و a اندازه های سه ضلع یک مثلث و R شعاع دایره‌ی محیطی آن باشد، ثابت کنید که مساحت مثلث را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$S = \frac{abc}{۴R}$$

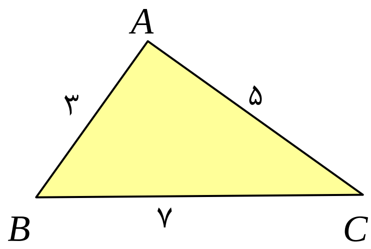
❋❋❋

تعیین زاویه های مثلث به کمک مساحت

به کمک دستور هرون و با داشتن اندازه های اضلاع مثلث می توان مساحت را به دست آورد. اگر این مساحت را به کمک دستور سینوسی مساحت نیز محاسبه کرده و برابر همدیگر قرار دهیم، اندازه‌ی زاویه ها را می توان به دست آورد.

تمرین۱۵: اندازه های سه ضلع مثلثی ۳ و ۵ و ۷ می باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی مقابل به ضلع ۷ سانتی متر را به دست آورید.

حل :



$$p=\frac{۳+۵+۷}{۲}=\frac{۱۵}{۲}$$

$$S=\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}=\sqrt{\frac{۱۵}{۲}\times(\frac{۱۵}{۲}-۳)\times(\frac{۱۵}{۲}-۵)\times(\frac{۱۵}{۲}-۷)}$$

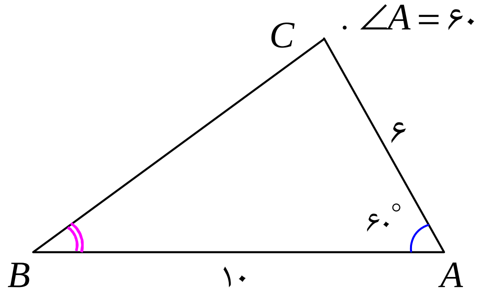
$$\to S=\sqrt{\frac{۱۵}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۲}}=\frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}\qquad(۱)$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times۳\times۵\times\sin A=\frac{۱۵}{۲}\times\sin A\qquad(۲)$$

اکنون به کمک روابط ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{۱۵}{۲}\times\sin A=\frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}\to\sin A=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to\angle A=۶۰^\circ\quad or\quad\angle A=۱۲۰^\circ$$

تمرین ۱۶ : در مثلث ABC ، $AB=۱۰$ و $AC=۶$ و $\angle A=۶۰^\circ$.



الف : طول BC را به دست آورید.

ب : مساحت مثلث را تعیین کنید.

پ : مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

حل :

الف :

$$BC^{۲} = AC^{۲} + AB^{۲} - ۲AC.BC.\cos A$$

$$\rightarrow BC^{۲} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲(۶)(۱۰)(\frac{۱}{۲}) = ۷۶ \rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$$

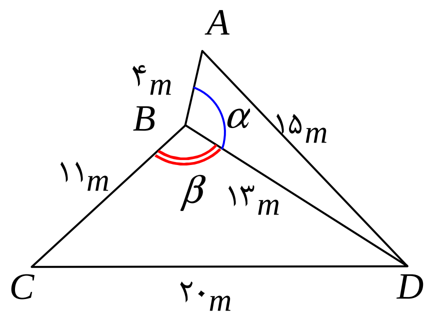
ب :

$$S = \frac{۱}{۲}(AC)(AB)\sin A = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$$

پ :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \rightarrow \frac{۶}{\sin B} = \frac{۲\sqrt{۱۹}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۶}{۲\sqrt{۱۹}} = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$$

تمرین ۱۷: دو قطعه زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳متر، مطابق شکل از هم جدا شده اند. ابعاد این قطعه زمین ها هم در شکل مشخص شده اند. اگر با برداشتن دیوار، این دو قطعه به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می شود؟ نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و۱۱متری زاویه های برابر می سازد.



حل :

$$\Delta(ABD): \begin{cases} p = \frac{۴+۱۳+۱۵}{۲} = ۱۶ \\ S = \sqrt{۱۶\times۱۲\times۳\times۱} = ۲۴ \end{cases}$$

$$\Delta(BCD): \begin{cases} p = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲} = ۲۲ \\ S = \sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲} = ۶۶ \end{cases}$$

$$S_{ABCD} = A_{\Delta(ABD)} + S_{\Delta(BCD)} = ۲۴ + ۶۶ = ۹۰ \quad m^{۲}$$

$$S_{\Delta(ABD)} = \frac{۱}{۲}AB \times BD \sin\alpha \rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱۳ \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \quad (۱)$$

$$S_{\Delta(BCD)}=\frac{۱}{۲}BC\times BD\sin\beta \rightarrow ۶۶=\frac{۱}{۲}\times ۱۱\times ۱۳\sin\beta \rightarrow \sin\beta=\frac{۱۲}{۱۳} \quad (۲)$$

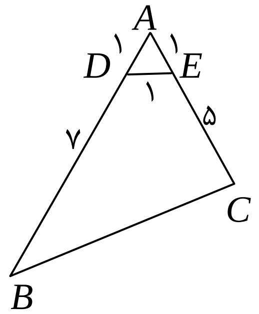
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \sin\alpha=\sin\beta \rightarrow \alpha=\beta$$

***

تمرین ۱۸: با توجه به شکل مقابل،

اولاً : طول BC را به دست آورید.

ثانیاً : مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.



حل : با توجه به اینکه مثلث ADE متساوی الاضلاع است، پس زاویه‌ی DAE برابر ۶۰ درجه است. پس :

$$BC^۲=AC^۲+AB^۲-۲AC.BC.\cos A$$

$$\rightarrow BC^۲=۳۶+۶۴-۲(۶)(۸)(\frac{۱}{۲})=۵۲\rightarrow BC=۲\sqrt{۱۳}$$

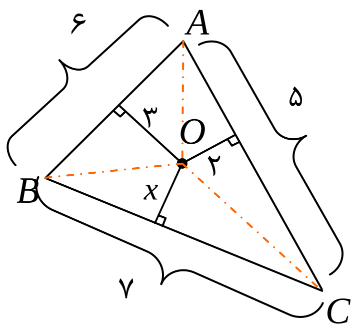
$$S_{\Delta(ABC)}=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{\Delta(ADE)}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱)^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{BCED}=S_{\Delta(ABC)}-S_{\Delta(ADE)}=۱۲\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴۷\sqrt{۳}}{۴}$$

تمرین ۱۹: در مثلث ABC به اضلاع ۵ و۶ و۷ سانتی متر، نقطه ای که از اضلاع به طول های ۵ و۶ به ترتیب به فاصله‌ی ۲ و ۳ سانتی متر است، از ضلع بزرگتر چه فاصله ای دارد؟

حل :



$$\Delta(ABC):\begin{cases} p=\dfrac{۵+۶+۷}{۲}=۹ \\ S=\sqrt{۹\times ۲\times ۳\times ۴}=۶\sqrt{۶}\end{cases}$$

$$\Delta(AOB): S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۳=۹$$

$$\Delta(AOC): S=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۲=۵$$

$$\Delta(BOC): S=\frac{۱}{۲}\times ۷\times x=\frac{۷}{۲}x$$

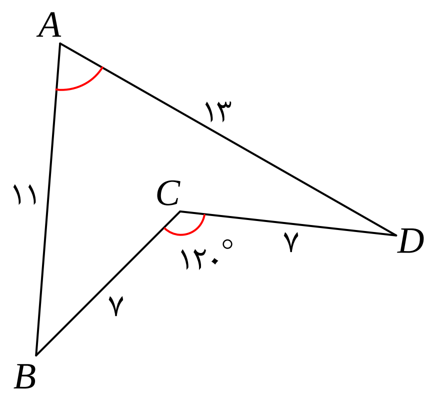
$$S_{\Delta(ABC)}=S_{\Delta(OAB)}+S_{\Delta(OAC)}+S_{\Delta(OBC)}$$

$$\rightarrow ۶\sqrt{۶}=۹+۵+\frac{۷}{۲}x\rightarrow x=\frac{۲}{۷}(۶\sqrt{۶}-۱۴)\approx ۰/۲$$

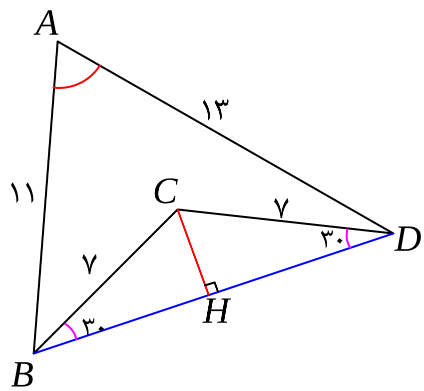
تمرین ۲۰ : با توجه به شکل زیر

الف: اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.

ب : مساحت چهارضلعی $ABCD$ را بیابید.



حل : اگر دو رأس B و C را به هم وصل کنیم. مثلث BCD بوجود می آید. این مثلث متساوی الساقین است. با توجه به اندازه‌ی زاویه‌ی C در این مثلث ، معلوم می شود که دو زاویه‌ی دیگر این مثلث ۳۰ درجه می باشند. نظر به اینکه در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.پس



$$CH=\frac{BC}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

$$\left.\begin{aligned}S_{\Delta(BCD)}&=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times BD=\frac{۷}{۴}BD\\ S_{\Delta(BCD)}&=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۷\sin ۱۲۰=\frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴}\end{aligned}\right\}\rightarrow \frac{۷}{۴}BD=\frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴}\rightarrow BD=۷\sqrt{۳}$$

$$p_{\Delta(ABD)}=\frac{11+13+7\sqrt{3}}{2}=12+\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta(ABD)}=\sqrt{(12+\frac{7\sqrt{3}}{2})(12+\frac{7\sqrt{3}}{2}-7\sqrt{3})(12+\frac{7\sqrt{3}}{2}-11)(12+\frac{7\sqrt{3}}{2}-13)}$$

$$S_{\Delta(ABD)}=\sqrt{(12+\frac{7\sqrt{3}}{2})(12-\frac{7\sqrt{3}}{2})(1+\frac{7\sqrt{3}}{2})(\frac{7\sqrt{3}}{2}-1)}$$

$$S_{\Delta(ABD)}=\sqrt{(144+\frac{174}{4})(\frac{147}{4}-1)}=\frac{143}{4}\sqrt{3}$$

از طرفی

$$S_{\Delta(ABD)}=\frac{1}{2}\times 11\times 13\times \sin A=\frac{143}{2}\sin A$$

لذا

$$\frac{143}{2}\sin A=\frac{143}{4}\sqrt{3}\rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \angle A=60^\circ$$

همچنین

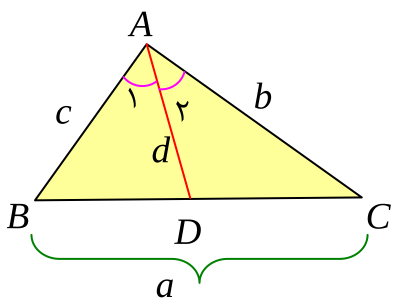
$$S_{ABCD}=S_{\Delta(ABD)}-S_{\Delta(BCD)}=\frac{143}{4}\sqrt{3}-\frac{49}{4}\sqrt{3}=\frac{94}{4}\sqrt{3}$$

***

محاسبه‌ی طول نیمساز ها

در این قسمت رابطه‌ی را معرفی می کنیم که به کمک آن می توان، به کمک اندازه‌ی اضلاع مثلث، اندازه‌ی نیمساز زاویه‌ی داخلی مثلث را محاسبه کرد.

قضیه (طول نیمساز زاویه‌ی داخلی): در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$، اگر نیمساز زاویه‌ی A برابر d_a باشد. آنگاه



$$d_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

اثبات :

$$S_{\Delta(ABC)}=S_{\Delta(ABD)}+S_{\Delta(ACD)}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A=\frac{۱}{۲}AB\times AD\times \sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}AD\times AC\times \sin\frac{A}{۲}$$

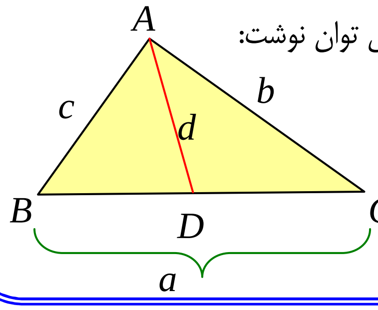
$$\xrightarrow{\times ۲} AB\times AC\times \sin A=AB\times AD\times \sin\frac{A}{۲}+AD\times AC\times \sin\frac{A}{۲}$$

$$\rightarrow AB\times AC\times \sin A=AD\times \sin\frac{A}{۲}(AB+AC)$$

$$\xrightarrow{\sin A=۲\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}} ۲AB\times AC\times \sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}=AD\times \sin\frac{A}{۲}(AB+AC)$$

$$\rightarrow ۲AB\times AC\times \cos\frac{A}{۲}=AD\times (AB+AC)\rightarrow AD=\frac{۲AB\times AC\times \cos\frac{A}{۲}}{AB+AC}$$

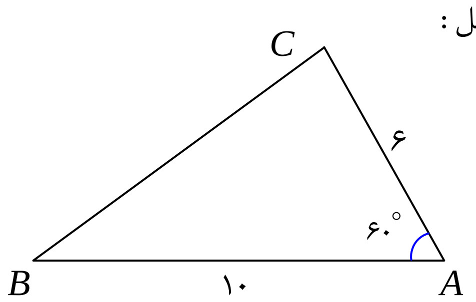
قضیه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی داخلی: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$، اگر نیمساز زاویه‌ی A برابر d_a باشد. در این صورت می توان نوشت:



$$d_a=\frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$

تمرین ۲۱ : در مثلث ABC، $AB=۱۰$ و $AC=۶$ و $\angle A=۶۰^\circ$. طول نیمساز زاویه‌ی A را به دست آورید.

حل :



$$d_a=\frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}=\frac{۲(۶)(۱۰)\cos ۳۰}{۶+۱۰}=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$$

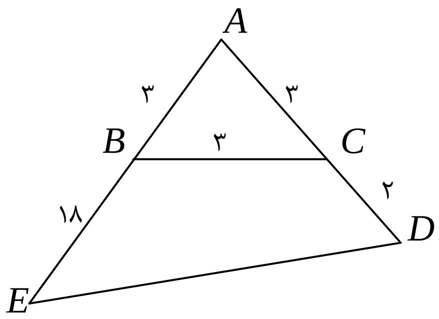
***

تمرین برای حل :

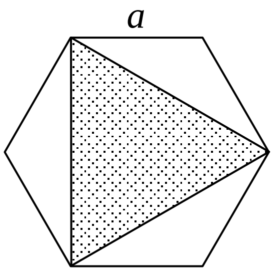
۲۲ : در شکل مقابل

الف : طول ضلع DE را بدست آورید.

ب : مساحت چهارضلعی $BCDE$ را بیابید.



۲۳ : در شکل مقابل شش ضلعی منتظم به ضلع a داده شده است. مساحت مثلثی که از وصل کردن یک در میان رئوس شش ضلعی تشکیل می شود را تعیین کنید.



❋❋❋

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان