



مثال: ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دوراس آن روی محور طولها و دو راس

دیگرش بالای محور طولها و روی سهمی به معادله  $y = 12 - x^2$  باشند.

هندسه



تفکر تجسمی

هدف اصلی از این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است. به طور خاص ما به دوران حول یک محور و برش دادن اجسام

دوران

میپردازیم.

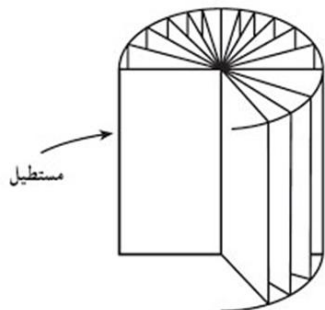
دوران یک مستطیل: از دوران مستطیل حول ضلع هایش استوانه درست میشود. (شهریور ۹۸ جاخالی)



فرض کنید طول مستطیل  $a$  و عرض آن  $b$  بوده است.

با دوران حول ضلع  $b$  اکنون استوانه ای داریم با شعاع قاعده  $a$  و ارتفاع  $b$

از این به بعد و با فهم این موضوع میتوان انواع سوالات را طراحی کرد.



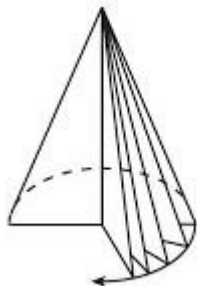


مثال: مستطیلی به اضلاع  $۵, ۳$  را حول طول آن دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بیابید. یک شکل شهودی بکشید.



دوران مثلث قائم الزاویه حول اضلاع قائمه اش: از دوران این نوع مثلث حول اضلاع قائمه یک مخروط توخالی

درست میشود. (خرداد ۹۸، درست و نادرست)



فرض کنید اضلاع قائمه  $b, a$  بوده است و حول ضلع  $a$  دوران داده ایم. اکنون ارتفاع مخروط

$a$  و شعاع قاعده برابر  $b$  است.

مثال: یک مثلث با اضلاع قائمه  $۳$  و  $۴$  را حول ضلع  $۳$  دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بیابید.

مثال: اگر یک مثلث قائم الزاویه را حول وتر دوران دهیم چه شکلی درست خواهد شد؟





نکته: حجم شکل حاصل مثال فوق در صورتی که وتر  $a$  و اضلاع قائمه  $b, c$  باشد برابر است با:

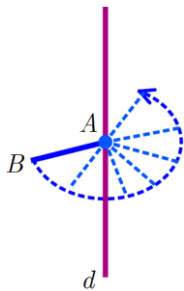
$$v = \frac{\pi}{3a} b^2 c^2$$



دوران یک پاره خط عمود بر خط  $d$ : از دوران پاره خط  $AB = a$  که بر خط  $d$  عمود است، یک دایره به

شعاع  $a$  حاصل میشود.

مثال: پاره خط  $AB$  با اندازه ۴ سانتی متر داده شده است.

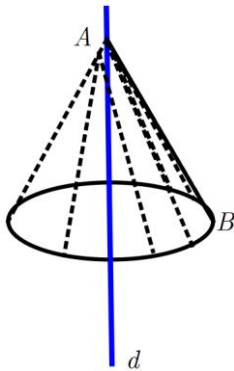


اگر این پاره خط در نقطه  $A$  بر خط  $d$  عمود باشد، و آن را حول  $d$  دوران دهیم،

مساحت شکل حاصل را بیابید.



دوران یک پاره خط مایل با خط  $d$ : از دوران پاره خط  $AB$  حول خط  $d$  یک استوانه درست میشود.



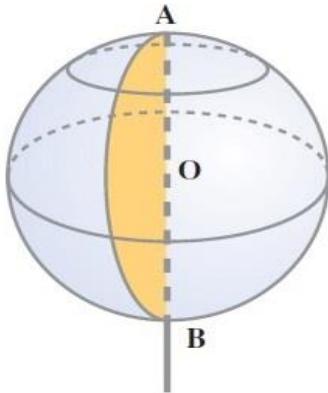
مثال: از دوران نیم خط مایل حول خط  $d$  چه شکلی درست میشود؟





دوران یک دایره حول قطرش : از دوران یک دایره حول قطرش میتوان یک کره درست

کرد.



مثال: یک دایره به محیط  $۱۲\pi$  را حول قطرش دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بیابید.

**نکته:** اگر یک نیم دایره را حول قطرش دوران دهیم باز هم کره درست میشود.

**نکته:** اگر یک نیمدایره را حول شعاع عمود بر قطر دوران دهیم به نیم کره درست میشود.

### برش دادن اجسام

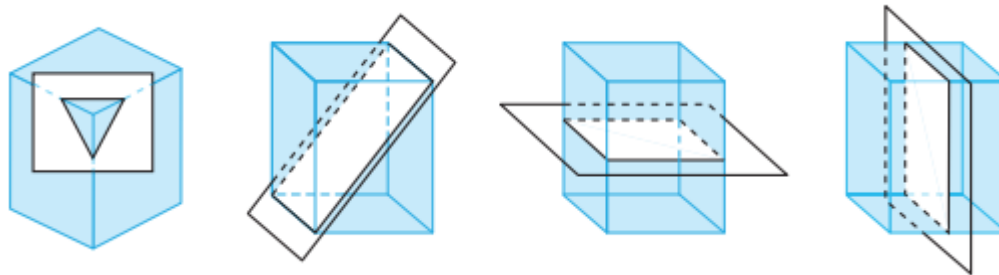


به شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی فضایی حاصل می شود، **سطح مقطع** گفته میشود.

در شکلهای زیر یک صفحه را با یک مکعب مستطیل تو خالی برش زده ایم. چه شکل هایی درست شده است زیر هر قسمت

بنویسید.





مثال: یک استوانه بکشید و در حالت‌های زیر یک صفحه را با استوانه برخورد دهید و نام شکل حاصل را بنویسید.

الف) صفحه رسم شده موازی قاعده های استوانه باشد

ب) صفحه رسم شده موازی محور استوانه باشد.

پ) صفحه رسم شده نه بر محور استوانه عمود باشد نه موازی باشد و در ضمن قاعده ها را هم قطع نکند.

ت) صفحه رسم شده نه بر محور استوانه عمود باشد نه موازی باشد و در ضمن یکی از قاعده ها را قطع کند.

مثال: یک استوانه با شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳ مفروض است. مساحت مقطعی که یک صفحه موازی قاعده ها ایجاد

میکند، چند برابر سطح مقطع صفحه ای است که از محور استوانه میگذرد؟





مثال: وقتی یک صفحه استوانه ای را به صورت عمود برش میزند چه شکلی درست میشود؟ در چه

صورتی بیشترین مساحت را خواهیم داشت؟؟؟

مثال: یک صفحه کره ای را قطع کرده است. مقطع حاصل چه شکلی است؟ از بین شکل های حاصل کدام شکل

بیشترین مساحت را داراست؟

### حالتهای برش یک صفحه با مخروط



اگر صفحه ای موازی با قاعده یک مخروط آن را قطع کند، مقطع حاصل یک **دایره** است.

اگر صفحه ای به طور مایل مخروط را قطع کند ولی صفحه قاعده

را قطع نکند یک **بیضی** تشکیل میشود.

اگر صفحه ای به طور مایل مخروط را قطع کند و صفحه قاعده

را قطع کند یک **سهمی** درست شده است.





اگر صفحه از موازی با محور مخروط و به طور عمود بر قاعده رسم

شود شکل حاصل یک **هذلولی** است. (البته هذلولی از دو قسمت تشکیل شده

اما این مبحث هذلولی و سهمی و ویژگی های آنها مورد بحث این کتاب نیست)

### بیضی

مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های آن ها از دو نقطه ثابت برابر مقداری ثابت باشد.



به زبان راحت تر بیضی مجموعه نقاطی مثل  $M$  و دو نقطه ثابت (به نامهای  $F, F'$  که کانون نام دارد) است که مجموع

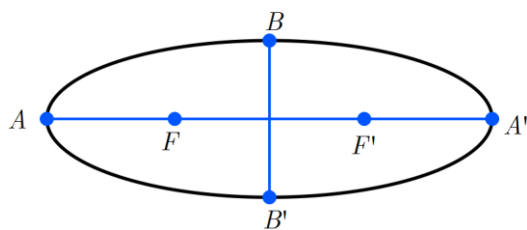
$MF + MF'$  همواره مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را با  $2a$  نمایش میدهیم. پس در بیضی همواره

$$M \in \text{بیضی} \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$$

### مفاهیم مهم در یک بیضی از روی شکل روبرو



۱- فاصله دو کانون یعنی  $FF'$  را **فاصله کانونی** میگویند و با  $2c$  نشان میدهیم.



$$FF' = 2c$$

۲- بزرگترین قطر بیضی را با  $AA'$  نشان میدهیم و اندازه آن همان

$$AA' = 2a \quad (\text{قطر کانونی})$$

۳- کوچک ترین قطر بیضی را با  $BB'$  نشان میدهیم و اندازه آن  $2b$  است.

۴- مهم ترین رابطه در بیضی، رابطه ی بین قطرها و فاصله کانونی است.  $a^2 = b^2 + c^2$





۵- وسط هر سه پاره خط  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  مرکز بیضی است.

۶- اندازه های  $a, b, c$  بر شکل بیضی تاثیر میگذارد. هرچه  $\frac{c}{a}$  بزرگ تر شود و به عدد یک نزدیک شود بیضی کشیده تر

میشود و هرچه کسر  $\frac{c}{a}$  کوچک تر شود و به عدد صفر نزدیک شود شکل بیضی به دایره نزدیک تر است.

۷- کسر  $\frac{c}{a}$  را خروج از مرکز بیضی می گوئیم و با  $e$  نمایش می دهیم.  $e = \frac{c}{a}$  و همواره  $0 \leq \frac{c}{a} \leq 1$ .

۸- گاهی اوقات میتوان بدون محاسبه ی  $c$  خروج از مرکز بیضی را با فرمول  $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$  محاسبه کرد.

مثال: در یک بیضی اندازه قطر بزرگ ۱۰ و اندازه قطر کوچک ۶ است. فاصله کانونی را بیابید.

مثال: در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟ دی ۹۷

مثال: هرچه خروج از مرکز بیضی ..... (کوچکتر، بزرگتر) شود، شکل به دایره نزدیک تر خواهد شد. خرداد ۹۸







**مثال:** در یک بیضی قطر کوچک و بزرگ به ترتیب ۸ و ۱۰ است. محیط مثلثی که یه راس آن روی بیضی و دو راس دیگر آن بر روی کانون های بیضی واقع باشد را محاسبه کنید.

**مثال:** در بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله کانونی را به دست آورید. خرداد ۹۸

**مثال:** طول بلندترین قطر یک بیضی، دو برابر طول کوتاه ترین قطر آن است. خروج از مرکز این بیضی را بیابید.

**مثال:** کانون های یک بیضی نقاط  $(-5, 1)$  و  $(3, 1)$  است. الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را به دست آورید.

ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه قطر کوچک و اندازه خروج از مرکز را پیدا کنید. تیر ۹۸، دی ۹۸، تیر ۹۹





مثال: دو نقطه  $(-5, -2)$ ,  $(1, -2)$  کانون های یک بیضی با خروج از مرکز  $6/10$  هستند.

مختصات مرکز و نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.

مثال: اگر در یک بیضی داشته باشیم  $a = 5, b = 3$  در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.

شهریور ۹۸

مثال: در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مختصات مرکز آن  $O \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  باشد،

خرداد ۹۹ خارج

الف) فاصله کانونی بیضی را بیابید.

ب) مختصات دو سر قطر بزرگ آن را بنویسید.





دایره



**دایره** مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها تا نقطه ثابتی به نام مرکز همواره مقداری ثابت است. به عبارت دیگر دایره مجموعه نقاطی مانند  $A$  است که فاصله تمام این نقاط تا مرکز ثابت دایره به نام  $O$  همواره برابر  $r$  است.

یعنی در یک دایره برای هر نقطه  $A$  روی دایره داریم:  $OA = r$

فرض کنیم مرکز دایره  $O(\alpha, \beta)$  باشد و شعاع دایره  $r$

اگر  $A(x, y)$  نقطه دلخواهی از دایره باشد چون میدانیم:  $OA = r$  پس:

$$OA = r \rightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r \rightarrow \boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2}$$



معادله اخیر را **معادله استاندارد دایره** میگوییم.

📖 **مثال:** معادله دایره ای با مرکز  $O(1, -3)$  و شعاع ۴ بنویسید.


📖 **مثال:** اگر معادله دایره ای به صورت  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$  باشد، مختصات مرکز و اندازه شعاع را بیابید.


📖 **مثال:** معادله دایره را بنویسید که مرکز آن محل تلاقی دو خط  $2x + y = 3$  و  $-3x + 2y = -1$  باشد و اندازه شعاع


آن ۴ باشد.







مثال: معادله دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۲ بنویسید. 

مثال: شعاع و مرکز دایره  $2x^2 + 2(y + 4)^2 = 16$  را بیابید. 

مثال: مرکز دایره  $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 1 = 0$  را بیابید. 

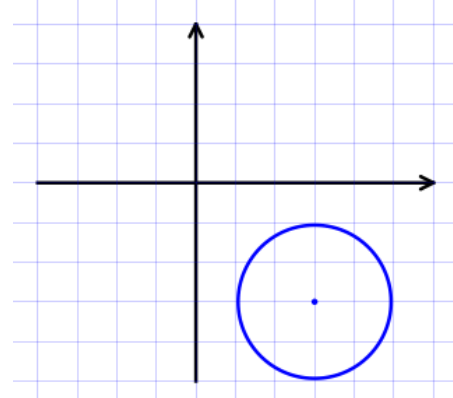
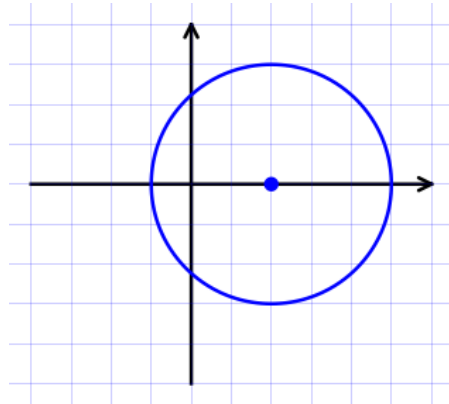
مثال: معادله دایره ای را بنویسید که یکی از نقاط آن  $M(1, 4)$  بوده و مرکز آن  $A(-2, 0)$  باشد. 

مثال: معادله دایره ای که نقاط  $A(5, -6)$  و  $B(1, 8)$  مختصات دو سر قطری از آن دایره باشند. 





مثال: معادله دایره های رسم شده زیر را بنویسید.



معادله استاندارد دایره به صورت  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  است. این اتحادها را باز میکنیم:



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را معادله گسترده دایره می نامیم.

در این معادله مختصات مرکز  $O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$  و اندازه شعاع  $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$  است.

**نکته:** در عبارت مربوط به شعاع باید عبارت زیر رادیکال منفی نشود. پس در معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

اگر  $a^2 + b^2 - 4c > 0$  معادله دایره است. (شرط وجود دایره)

اگر  $a^2 + b^2 - 4c = 0$  تنها یک نقطه داریم. (چون شعاع صفر شده است)

اگر  $a^2 + b^2 - 4c < 0$  معادله فوق نمایش دهنده ی یک دایره نیست.





مثال: معادله دایره  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 11 = 0$  داده شده است. معادله دایره را ابتدا به صورت

استاندارد نوشته سپس مرکز و شعاع را بیابید.

مثال: معادله گسترده دایره ای به صورت  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$  است. مرکز و شعاع دایره را بنویسید. دی ۹۷

مثال: مساحت دایره ای به معادله  $(x-1)^2 + y^2 + 4y - 2 = 0$  را بیابید.

مثال: شعاع دایره ای  $2x^2 + ax^2 + 8x - 4y - 8 = 0$  را به دست آورید.

مثال: حدود  $m$  را چنان بیابید که عبارت  $x^2 + y^2 + (m-1)x + 2y + 5 = 0$  معادله یک دایره باشد.





مثال: معادله دایره به مرکز  $(-1, -2)$  و طول قطر ۵ کدام است؟

$$4x^2 + 4y^2 - 8x - 16y = 5 \quad (2)$$

$$4x^2 + 4y^2 + 8x + 16y = 5 \quad (1)$$

$$4x^2 + 4y^2 - 2x - 4y = 20 \quad (4)$$

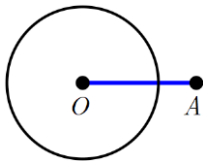
$$4x^2 + 4y^2 + 2x + 4y = 20 \quad (3)$$

وضعیت یک نقطه نسبت به دایره



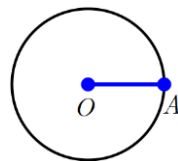
اگر دایره  $C$  و نقطه  $A(x_0, y_0)$  را داشته باشیم و بخواهیم وضعیت این نقطه را نسبت به دایره  $C$  بیابیم باید بدانیم  $OA$  و  $r$  نسبت به هم چه وضعی دارند. ( $OA$  فاصله مرکز دایره تا نقطه مورد نظر است)

$OA > r$



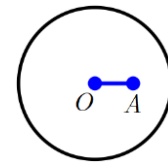
نقطه بیرون دایره است.

$OA = r$



نقطه روی دایره است.

$OA < r$



نقطه درون دایره قرار دارد

مثال: وضعیت نقطه  $A(1, 2)$  را نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 25 = 0$  مشخص کنید.





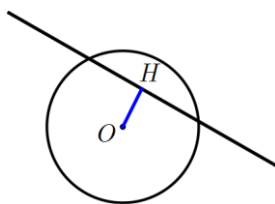
مثال: وضعیت نقطه  $A(2, 3)$  را نسبت به دایره  $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 6$  مشخص کنید.

مثال: وضعیت نقطه  $A(2, -1)$  را نسبت به دایره  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$  مشخص کنید.

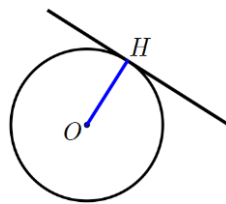
### وضعیت یک خط نسبت به دایره



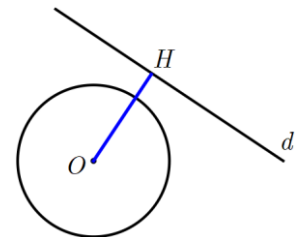
اگر دایره  $C$  و نقطه  $d: ax + by + c = 0$  را داشته باشیم و بخواهیم وضعیت این خط را نسبت به دایره  $C$  بیابیم باید بدانیم فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع بیشتر است یا کمتر یا مساوی؟



$$OH < R$$



$$OH = R$$



$$OH > R$$


**نکته:** برای یافتن فاصله نقطه تا مرکز از فرمول زیر کمک میگیریم:


$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad : \quad ax + by + c = 0 \quad \text{فاصله نقطه } (x_0, y_0) \text{ نسبت به خط}$$









مثال: وضعیت خط  $-3x + 4y = 1$  را نسبت به دایره  $x^2 + y^2 = 4$  مشخص کنید. 

مثال: وضعیت خط  $x + y = 3$  را نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$  مشخص کنید. شهریور ۹۸ 

مثال: وضعیت دایره  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$  و خط  $y = -1$  را نسبت به هم مشخص کنید. دی ۹۸ 

مثال: مرکز یک دایره نقطه  $O(2, -1)$  است. این دایره روی خط  $5x - 3y - 15 = 0$  وترى به طول  $2\sqrt{\frac{41}{5}}$  جدا 

میکنند. معادله دایره را بنویسید.

وضعیت دو دایره نسبت به هم 

فرض کنید دو دایره  $C_1(O_1, R_1), C_2(O_2, R_2)$  را داشته باشیم و بخواهیم بدانیم نسبت به هم چه وضعی دارند.





<p><b>۲ مماس بیرون</b> <math>O_1O_2 = R_1 + R_2</math></p>	<p><b>۱ متخارج</b> <math>O_1O_2 &gt; R_1 + R_2</math></p>
<p><b>۴ مماس درونی</b> <math>O_1O_2 =  R_1 - R_2 </math></p>	<p><b>۳ متقاطع</b> <math> R_1 - R_2  &lt; O_1O_2 &lt; R_1 + R_2</math></p>
<p><b>۶ هم مرکز</b> <math>O_1O_2 = 0</math></p>	<p><b>۵ متداخل</b> <math>O_1O_2 &lt;  R_1 - R_2 </math></p>

**نکته:** پس در حالت کلی باید در هر دو دایره مرکز و شعاع رایباید. و سپس طبق جدول بالا محاسبه کنیم.

مثال: دودایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$  و  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$  نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟





مثال: وضعیت دو دایره  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  را نسبت به هم مشخص

کنید. خرداد ۹۸

مثال: معادله دایره ای که مرکز آن  $O(2, -2)$  بوده و بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$  مماس خارج

باشد را بنویسید. دی ۹۸ رشته ریاضی

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن  $(1, 1)$  باشد و با دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$  مماس

داخل باشد.

