حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل سوم: حد

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت اول: یادآوری مفهوم حد و قضایای حد

جلسه اول

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

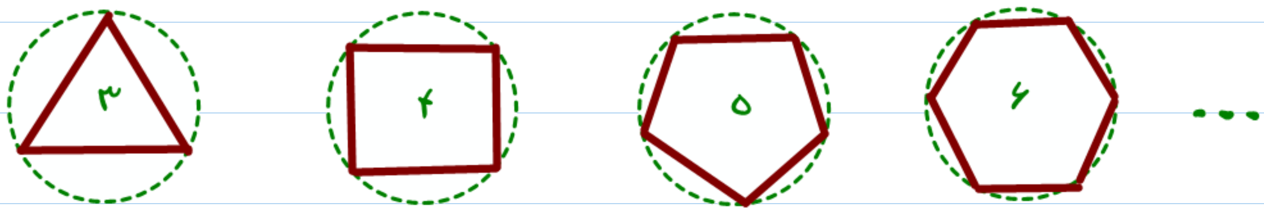
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

قبل از اینکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگوییم، لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم.

۱) فرایند حدی:

- در شکل های زیر در هر مرحله یک n ضلعی منتظم درون دایره قرار داریم. اگر n را زیاد کنیم مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک می شود.



پس می توانیم بگوییم مساحت چندضلعی های محاطی را به هر اندازه که بخواهیم می توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

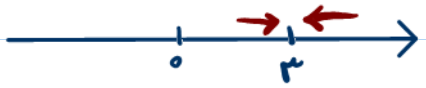
- دنباله $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. اگر n یعنی شماره جمله را بزرگ و بزرگتر کنیم، جملات دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک می شود.

مثال های بالا نمونه ای از فرایندهای حدی هستند.

۲) میل کردن :

وقتی می‌گوییم x به a میل می‌کند یعنی x بسیار به عدد a نزدیک می‌شود ولی هرگز برابر خود a نمی‌شود و می‌نویسیم $x \to a$.

مثلاً



xها از هر دو طرف به ۳ نزدیک شوند : $x \to 3$

وقتی می‌نویسیم $x \to a^+$ یعنی x از مقادیر بزرگتر از a، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این حالت می‌گوییم x از سمت راست به a میل می‌کند.

مثلاً

x از مقادیر بزرگتر از ۵ به ۵ نزدیک شود : $x \to 5^+$

وقتی می‌نویسیم $x \to a^-$ یعنی x از مقادیر کوچکتر از a، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این حالت می‌گوییم x از سمت چپ به a میل می‌کند.

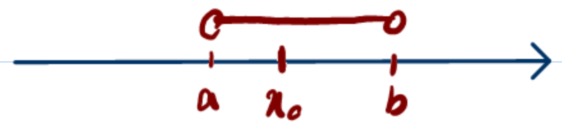
مثلاً

x از مقادیر کوچکتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود : $x \to 4^-$

۳) همسایگی :

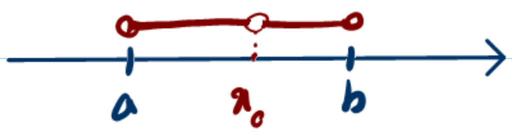
فرض کنید x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم.

(a,b) یک همسایگی x_0



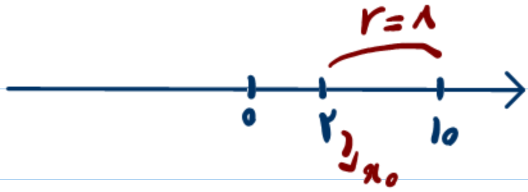
مثال: بازه $(5,8)$ یک همسایگی عدد ۶ است.

اگر عدد x_0 را از همسایگی (a,b) حذف کنیم یعنی $(a,b)-\{x_0\}$، به مجموعه بدست آمده یک همسایگی محذوف x_0 می‌گوئیم.

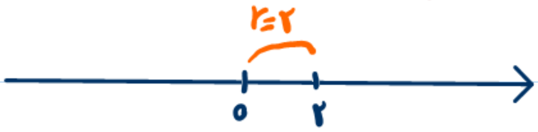


اگر $r>0$ باشد بازه باز (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست عدد x_0 و بازه باز (x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌گوئیم.

مثال: $(2,10)$ یک همسایگی راست ۲



$(0,2)$ یک همسایگی چپ ۲



حال می‌توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

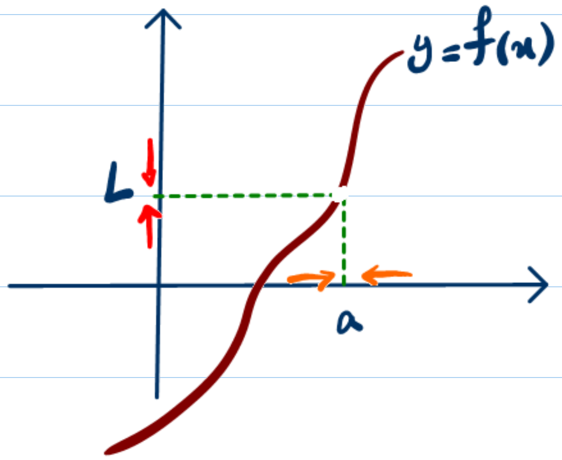
فرض کنید تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد (یعنی در خود a تعریف نشود

یا نشود فرقی ندارد.) می‌گوییم حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر عدد L است هرگاه با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (همان y ها) به L نزدیک شوند و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت :

حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (همان y ها) را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.

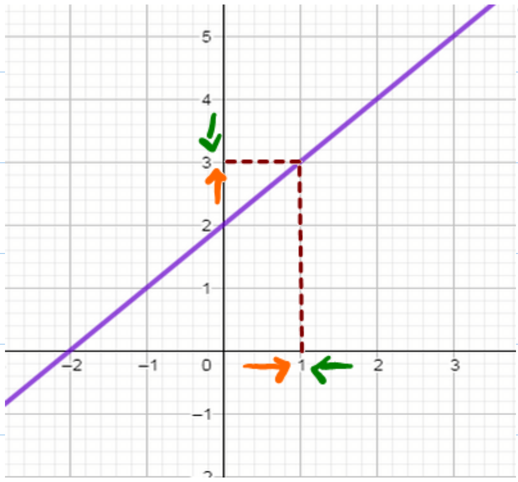


$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

مثال : تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \to 1$ بدست آورید.

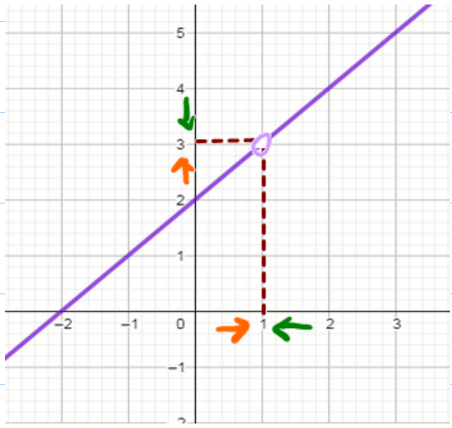
x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	→ ۱ ←		۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲
$y=x+2$	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	→ ۳	۳ ←	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴

$$\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

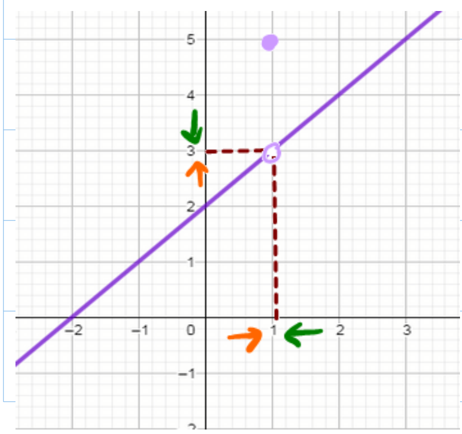


$f(x)=x+2$

در دو حالت زیر هم حد تابع در $x=1$ برابر ۳ است.



$$g(x)=x+2 \quad , \quad D=\mathbb{R}-\{1\}$$



$$h(x)=\begin{cases} x+2 & x\neq 1 \\ 5 & x=1 \end{cases}$$

تعریفِ حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$

برابر L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد،

به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

تعریفِ حد چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$

برابر L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد،

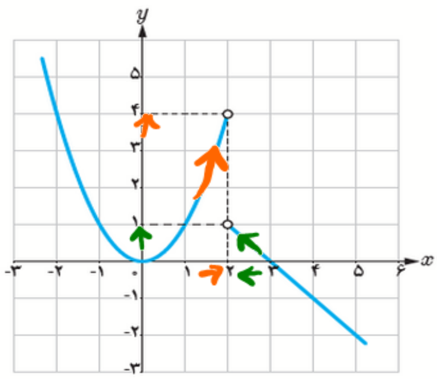
به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند یعنی :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x+۳ & x>۲ \\ x^۲ & x<۲ \end{cases}$ به صورت روبه‌رو است :

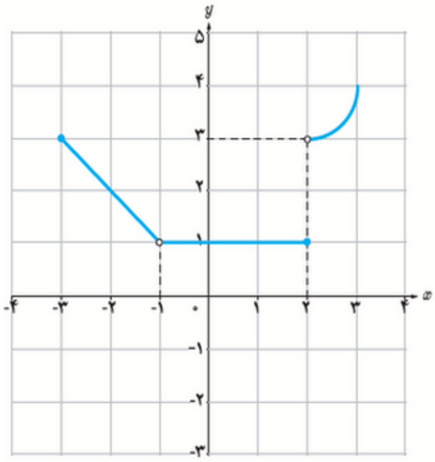


آیا تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد؟

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۱ \qquad \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۴$$

تابع در $x=۲$ حد ندارد زیرا $\lim_{x\to ۲^+} f(x) \neq \lim_{x\to ۲^-} f(x)$

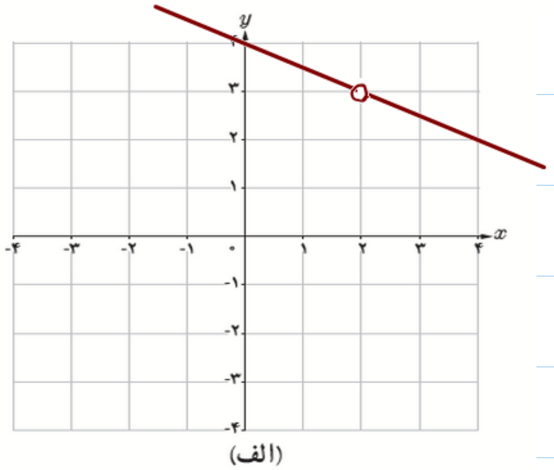
مثال: با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۳$	$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۱$	$\lim_{x\to ۲} f(x) =$ وجود ندارد
$\lim_{x\to -۱^-} f(x) = ۱$	$\lim_{x\to -۱^+} f(x) = ۱$	$\lim_{x\to -۱} f(x) = ۱$
$\lim_{x\to -۳^+} f(x) = ۳$	$\lim_{x\to -۳^-} f(x) =$ وجود ندارد	$\lim_{x\to -۳} f(x) =$ وجود ندارد
$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$	$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۱$	$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۱$

مثال : نموداری از یک تابع رسم کنید که :

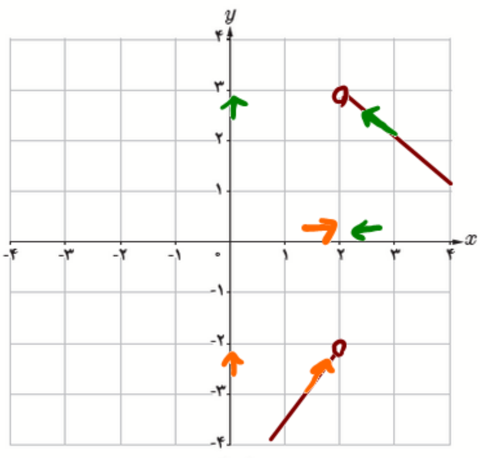
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.



(الف)

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = ۳$$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



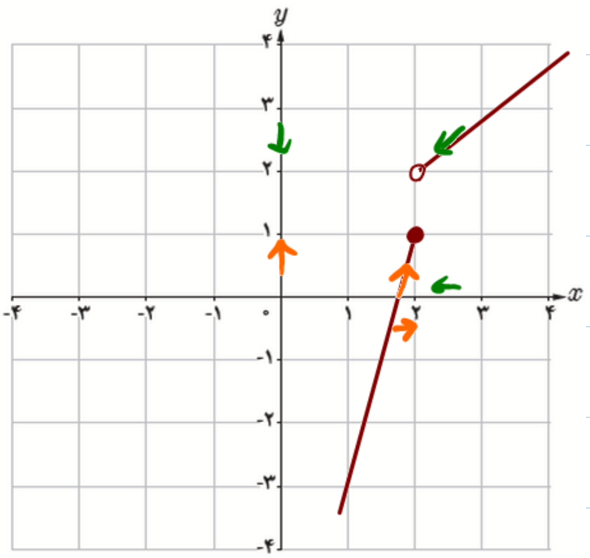
(ب)

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۳$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = -۲$$

در $x=۲$ حد ندارد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.



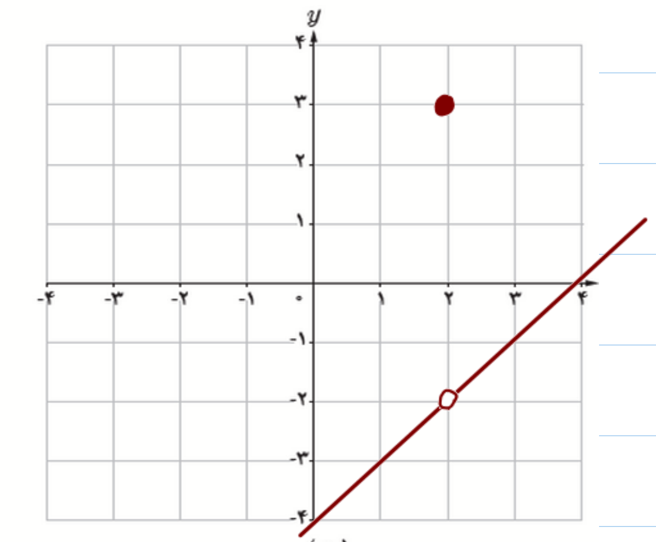
(پ)

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۱$$

در $x=۲$ حد ندارد.

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



(ت)

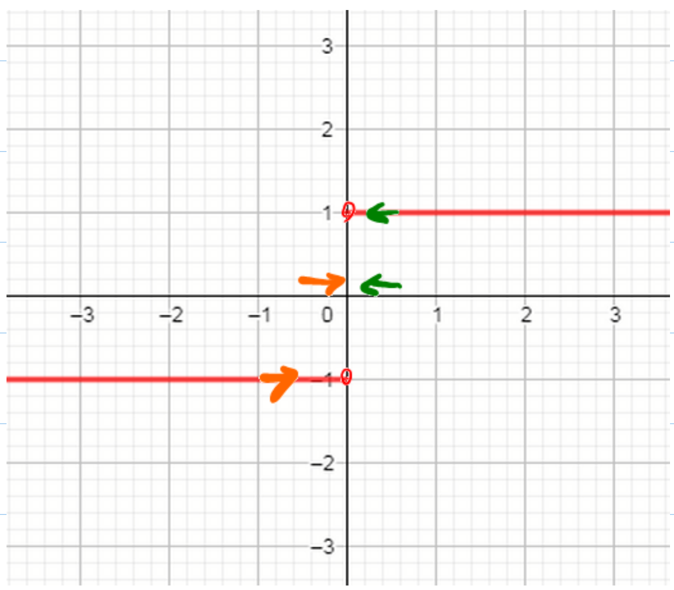
$$\lim_{x \to 2} f(x) = -2$$

$$f(2) = 3$$

مثال: حدهای زیر را با استفاده از رسم نمودار محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \frac{-x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

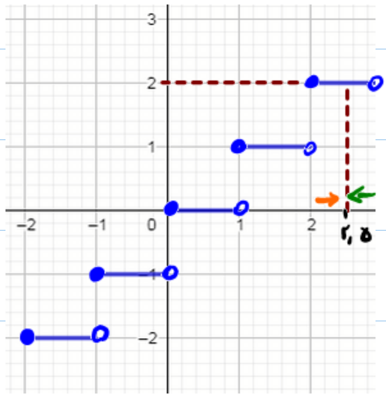


$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

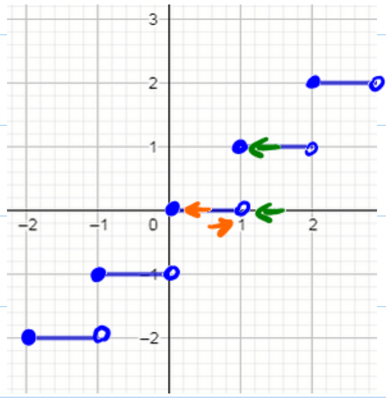
ب) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} [x] = 2$



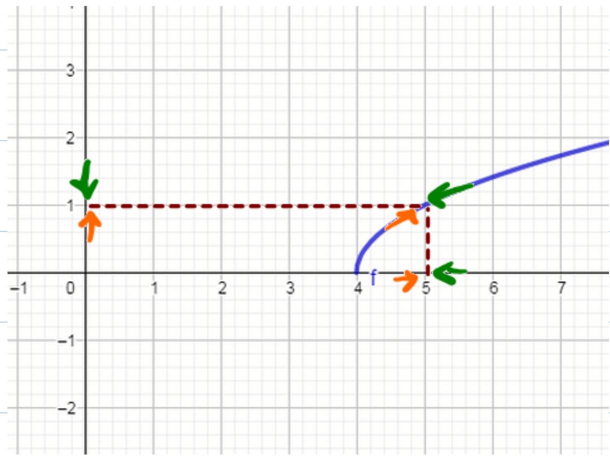
پ) $\lim\limits_{x\to 1} [x] =$ حد ندارد

$\lim\limits_{x\to 1^+} [x] = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} [x] = 0$



ت) $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-4} = 1$

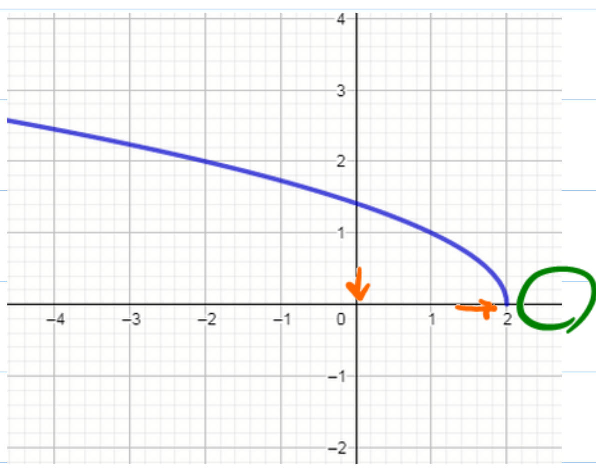


ث) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2-x} =$ حد ندارد

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است پس:

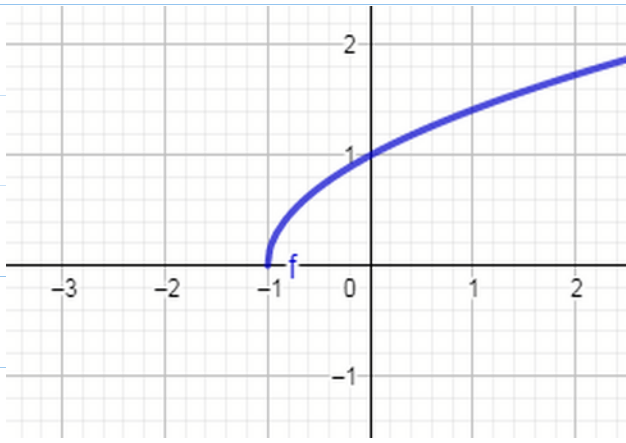
$\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{2-x} =$ موجود نیست

$\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

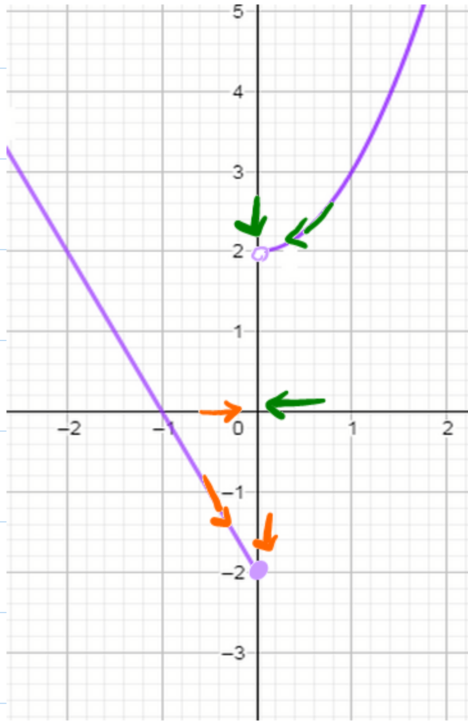


ج) $\lim_{x \to -3} \sqrt{x+1}$ = حد ندارد

زیرا تابع در همسایگی ۳- تعریف نشده است.



مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\le 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

برای محاسبه حد توابع از قضیه‌های زیر کمک می‌گیریم :

قضیه ۱) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a، همان مقدار ثابت c است یعنی :

$$\lim_{x\to a} c = c$$

مثال $\lim_{x\to 8} 3 = 3$

قضیه ۲) حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a می‌شود یعنی :

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال $\lim_{x\to 10} x = 10$

قضیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

آنگاه

الف) مجموع و تفاضل و حاصل ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارند و

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) \underset{\times}{\pm} g(x)\right) = L_1 \underset{\times}{\pm} L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $c\in\mathbb{R}$ باشد آنگاه

الف) $\lim_{x\to a}(cf(x)) = cL$ مثال $\lim_{x\to 4} 3x = 3\times 4 = 12$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = L^n$ مثال $\lim_{x\to 2}(x)^3 = 2^3 = 8$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد , $\lim_{x\to a} f(x)=L$:

الف) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$

پ) $\lim_{x\to a}\cos(f(x)) = \cos L$, $\lim_{x\to a}\sin(f(x)) = \sin L$

نتیجه: اگر تابع f در همسایگی a تعریف شده باشد و با جایگذاری a به جای x در تابع به یک عدد مشخص برسیم، مقدار حد همین عدد خواهد شد، جز موارد خاص که به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۲$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = ۱$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید :

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}(۷g(x) - \frac{۱}{۲}f(x)) = ۷\times۱ - \frac{۱}{۲}\times۲ = ۷ - ۱ = ۶$

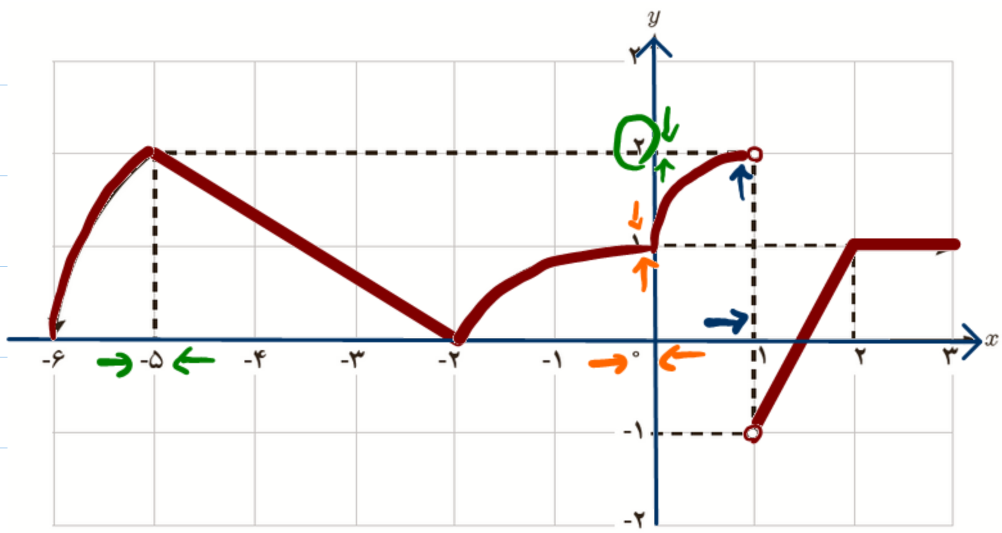
۲) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{(۱+f(x))g(x)}{g(x)+۲} = \frac{(\lim\limits_{x\to ۲} ۱ + \lim\limits_{x\to ۲} f(x))\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} g(x) + \lim\limits_{x\to ۲} ۲}$

$= \frac{(۱+۲)\times۱}{۱+۲} = \frac{۳}{۳} = ۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲}(g(x) + \frac{۲}{f(x)})^۳ = (۱ + \frac{۲}{۲})^۳ = (۱+۱)^۳ = ۲^۳ = ۸$

۴) $\lim\limits_{x\to ۲}(\sqrt{۵x-۱} + \frac{f(x)}{g(x)}) = \sqrt{۵\times۲-۱} + \frac{۲}{۱} = \sqrt{۹} + ۲ = ۳ + ۲ = ۵$

مثال: نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را درصورت وجود بیابید :



۱) $\lim\limits_{x\to -۵}(\frac{x}{۵}-۱)^{۲}\times f(x) = (-\frac{۵}{۵}-۱)^{۲}\lim\limits_{x\to -۵} f(x) = (-۲)^{۲}\times ۲ = ۴\times ۲ = ۸$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۴-x}}{x^{۲}+f(x)} = \frac{\sqrt{۴-۰}}{۰^{۲}+\lim\limits_{x\to ۰} f(x)} = \frac{۲}{۰+۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}}(x^{۲}+x-(f(x))^{۲}) = ۱^{۲}+۱-(\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x))^{۲} = ۱+۱-(۲)^{۲}$

$= ۲-۴ = -۲$

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

۱) $\lim\limits_{x\to -۱}(۲x^{۴}-x^{۳}-۵x^{۲}+۴) = ۲(-۱)^{۴}-(-۱)^{۳}-۵(-۱)^{۲}+۴$

$= ۲-(-۱)-۵+۴ = ۲+۱-۵+۴ = ۲$

۲) $\lim\limits_{x\to ۴}(۱+\frac{x}{۲})^{۲}(x^{۲}-۶x) = (۱+\frac{۴}{۲})^{۲}(۴^{۲}-۶\times ۴) = ۳^{۲}(۱۶-۲۴)$

$= ۹(-۸) = -۷۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱۰}(۵x^{۳}-۶|x|+۱) = ۵(۱۰)^{۳}-۶\times ۱۰+۱ = ۵۰۰۰-۶۰+۱ = ۴۹۴۱$

۴) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} \dfrac{۸x^{۳}+۴x^{۲}+۲x}{۴x+۱} = \dfrac{۸(\frac{۱}{۲})^{۳}+۴(\frac{۱}{۲})^{۲}+۲\times\frac{۱}{۲}}{۴\times\frac{۱}{۲}+۱} = \dfrac{۸\times\frac{۱}{۸}+۴\times\frac{۱}{۴}+۱}{۲+۱}$

$= \dfrac{۱+۱+۱}{۳} = \dfrac{۳}{۳} = ۱$

۵) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱+\sin x}{۱-\cos x} = \dfrac{۱+\sin\frac{\pi}{۲}}{۱-\cos\frac{\pi}{۲}} = \dfrac{۱+۱}{۱-۰} = \dfrac{۲}{۱} = ۲$

۶) $\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{۶}} (۴\sin x+\cos^{۲} x) = ۴\sin(-\frac{\pi}{۶}) + \cos^{۲}(-\frac{\pi}{۶})$

$= -۴\sin\frac{\pi}{۶} + \cos^{۲}\frac{\pi}{۶} = -۴\times\frac{۱}{۲} + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}$

$= -۲ + \frac{۳}{۴} = \dfrac{-۸+۳}{۴} = \dfrac{-۵}{۴}$

۷) $\lim\limits_{x\to ۵} \sqrt{۵x-۹} = \sqrt{۵\times۵-۹} = \sqrt{۲۵-۹} = \sqrt{۱۶} = ۴$

۸) $\lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{\pi\cos x}{x} = \dfrac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \dfrac{\pi\cos\pi}{-\pi} = \dfrac{\pi\times(-۱)}{-\pi} = \dfrac{-\pi}{-\pi} = ۱$

موارد خاص :

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقاطی که ضابطه تابع تغییر می‌کند (نقاط مرزی) خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌های مربوطشان محاسبه شوند.

مثال: حد تابع f را در نقطهٔ a (درصورت وجود) بیابید

1) $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>\circ \\ x-۲ & x<\circ \end{cases} \quad , \quad a=\circ$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-2) = 0-2=-2$

$-2 \neq 0$ پس تابع در $x=0$ حد ندارد

2) $f(x)=\begin{cases} ۵ & x<۳ \\ x+۲ & x>۳ \end{cases} \quad , \quad a=۳$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x+2) = 3+2=5$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 5 = 5$

$5=5$ پس تابع در $x=3$ حد دارد و

$\lim_{x\to 3} f(x) = 5$

۳) $f(x)=\begin{cases} ۳-x & x<۲ \\ -۱ & x=۲ \\ x^۲-۴ & x>۲ \end{cases} \quad , \quad a=۲$

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (x^۲-۴) = ۲^۲-۴ = ۴-۴=۰$

۱≠۰ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (۳-x) = ۳-۲=۱$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} (a+۱)x+۳ & x>-۲ \\ -۲x^۲+۱ & x<-۲ \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ حد داشته باشد.

$\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -۲^+} (a+۱)x+۳ = (a+۱)(-۲)+۳ = -۲a-۲+۳ = -۲a+۱$

$\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -۲^-} -۲x^۲+۱ = (-۲)(-۲)^۲+۱ = -۸+۱ = -۷$

$\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a+۱=-۷ \to -۲a=-۸ \Rightarrow a=۴$

۲) حد توابع شامل رادیکال با فرجه زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همسایگی نقطه a تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف شود مقدار تابع حد تابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نقاطی که ریشه داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می‌یابیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{2x+4}$

x		-2	
$2x+4$	$-$	0	$+$

تابع در همسایگی چپ ۲- تعریف نمی‌شود

$$\lim_{x\to -2^+}\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(-2)+4}=\sqrt{0}=0$$

$\lim\limits_{x\to -2^-}\sqrt{2x+4}=$ حد ندارد

پس این حد موجود نیست.

۲) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+3x}$

x		-3		0	
x^2+3x	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+3x}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x^2+3x}=$ حد ندارد

پس این حد موجود نیست.

۳) $\lim\limits_{x \to ۵} \sqrt{۳-x}$

$D: ۳-x \geq ۰ \Rightarrow -x \geq -۳ \Rightarrow x \leq ۳$

$D = (-\infty, ۳]$

تابع در همسایگی محذوف ۵ تعریف نمی‌شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل جزء صحیح :

می‌دانیم اگر $x \to a^+$ یعنی $x > a$ و اگر $x \to a^-$ یعنی $x < a$ است. در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح از این نکته استفاده کرده عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم و مقدار عبارت جزء صحیح را در همسایگی a محاسبه می‌کنیم تا ببینیم با کدام تابع ثابت برابر می‌شود. پس با جای‌گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می‌آوریم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x \to ۰}(x+۳)[x]$

$\lim\limits_{x \to ۰^+} (x+۳)[x] = (۰+۳) \times ۰ = ۰$

$$\lim_{x\to 0^-}(x+3)[x] = (0+3)\times(-1) = -3$$

۳-۷۵ این حد موجود نیست

۲) $$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+3x}{[x]+1} = \frac{2^2+3\times 2}{[2^-]+1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$$

$1 < x < 2$

۳) $$\lim_{x\to 1^-}[-3x]$$: $x<1 \xrightarrow{\times(-3)} -3x > -3$

در نتیجه عبارت $-3x$ بزرگتر از -3 و نزدیک آن است پس $-3 < -3x < -2$

$$\lim_{x\to 1^-}[-3x] = -3$$

باعددگذاری هم به همین نتیجه می‌رسیم.

۴) $$\lim_{x\to 3} x + \left[\frac{x}{3}\right]$$

$x\to 3^+ : x > 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} > 1$ پس $\frac{x}{3}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است.

$$1 < \frac{x}{3} < 2 \rightarrow \lim_{x\to 3^+} x + \left[\frac{x}{3}\right] = 3+1 = 4$$

پس $\frac{x}{3}$ کوچکتر از یک و نزدیک آن است: $x \to 3^-: \ x<3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3}<1$

$$0<\frac{x}{3}<1 \rightarrow \lim_{x\to 3^-} x+\left[\frac{x}{3}\right] = 3+0=3$$

$4 \neq 3$ پس این حد موجود نیست.

5) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\sqrt{2-2}}{[2^+]+2} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

6) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} x[x] = \frac{1}{2}\times 0 = 0$

$0<x<1$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} 2[x] = 2\times 2 = 4$

$2<x<3$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت دوم: رفع ابهام صفرصفرم

جلسه دوم

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

اگر محاسبه $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ خواسته شده باشد و بعد از قرار دادن a به جای x، صورت و مخرج

هر دو صفر شوند با توجه به نوع صفر ۴ حالت خواهیم داشت.

نزدیک صفر

صفرها دو دسته اند: ۱ـ صفر مطلق (خود صفر) ۲ـ صفر نسبی یا حدی ($0^{\pm}$)

نوع اول: $\frac{0}{0}$: مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

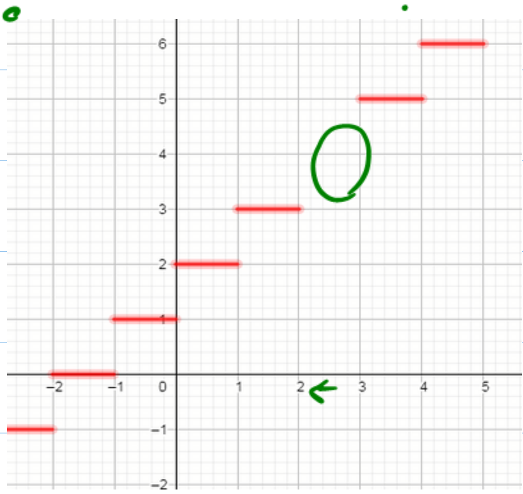
نوع دوم: $\frac{0^{\pm}}{0}$: مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع سوم: $\frac{0}{0^{\pm}}$: صورت صفر مطلق و مخرج غیر صفر (صفر حدی) پس حد کسر صفر می شود.

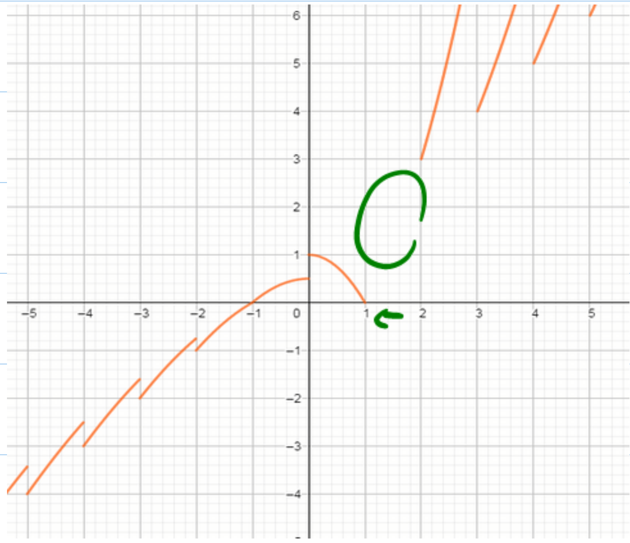
نوع چهارم: $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$: به این حالت، حالت مبهم می گوییم و باید رفع ابهام شود.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

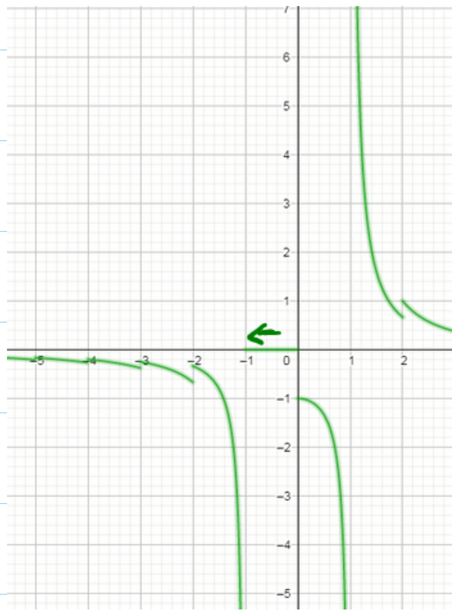
الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{[x]^2-4}{[x]-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ حد وجود ندارد



ب) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{[x]-1} = \frac{1^+-1}{1-1} = \frac{0^+}{0_{\text{مطلق}}}$ حد موجود نیست



ب) $\lim_{x\to -1^+} \frac{[x]+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$



مثال: کنکور تجربی ۹۹

حاصل $\lim_{x\to -2^-} \frac{[x]+3}{x+2}$، کدام است؟

۱) $-\infty$　　۲) -1　　۳) صفر ✓　　۴) ۱

گزینه ۳

$\frac{-3+3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$

رفع ابهام $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$

چون $x \to a$ و صورت و مخرج هر دو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج عامل $(x-a)$ را دارا هستند. به $(x-a)$ عامل ابهام یا صفرکننده می گوییم.

الف) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت و مخرج هر دو چندجمله‌ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری و اتحادها) عامل ابهام را در صورت و مخرج ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشه.

تبصره: هرگاه نتوانیم با اتحادها یا فاکتورگیری عامل ابهام را ایجاد کنیم، چاره‌ای جز تقسیم آن عبارت بر عامل ابهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت حاصل ضرب $(x-a)$ (همان مقسوم علیه) در خارج قسمت را می نویسیم.

یادآوری

۱) رابطه تقسیم:

$$\begin{array}{r|l} P & B \\ \hline R & Q \end{array}$$

مقسوم: P — مقسوم علیه: B — خارج قسمت: Q — باقیمانده: R

$$P = BQ + R$$

در $\frac{0}{0}$ $\rightarrow R=0 \rightarrow P = \overset{\text{عامل ابهام}}{B}Q$

۲) تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای :

روش اول :

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + x^2 + 1 & x+1 \\ \cline{2-2}
-(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 - x + 1 \\ \hline
-x^2 + 1 & \\
-(-x^2 - x) & \\ \hline
x + 1 & \\
-(x+1) & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

روش دوم (روش هورنر) : برای تقسیم درجه n بر درجه یک

ضرایب مقسوم

ریشه مقسوم علیه

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
-1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
 & 2 & -1\times 2+1=-1 & -1(-1)+0=1 & -1\times 1+1=0
\end{array}
$$

باقی‌مانده

خارج قسمت : $2x^2 - 1x + 1 \longrightarrow 2x^2 - x + 1$

مثال: حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+3x}=\dfrac{0}{0}$ عامل ابهام: $(x-(-3))$: $(x+3)$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x}=\frac{-3-3}{-3}=\frac{-6}{-3}=2$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\dfrac{0}{0}$ عامل ابهام: $(x-1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+6}=\frac{1+1}{1+6}=\frac{2}{7}$$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\dfrac{0}{0}$ عامل ابهام: $(x-\frac{1}{2})$

$$8x^3-1=8(x^3-\tfrac{1}{8})=8(x-\tfrac{1}{2})(x^2+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4})$$

روش هورنر

$\frac{1}{2}$			
	6	-5	1
	6	$\frac{1}{2}\times 6-5=-2$	$\frac{1}{2}\times(-2)+1=0$ → باقیمانده

خارج قسمت: $6x-2$

$$6x^2-5x+1=(x-\tfrac{1}{2})(6x-2)$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x-\frac{1}{2})(6x-2)} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{2(3x-1)}$$

$$= 4\,\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

4) $$\lim_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4} = \frac{0}{0}$$ عامل ابهام $(x+4)$

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$$

روش هورنر

-4	1	4	1	4
	1	$-4\times 1+4=0$	$-4\times 0+1=1$	$-4\times 1+4=0$

باقیمانده

خارج قسمت $1x^2+0x+1 = x^2+1$

$$x^3+4x^2+x+4=(x+4)(x^2+1)$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{\cancel{(x+4)}(x-1)}{\cancel{(x+4)}(x^2+1)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{-4-1}{16+1} = \frac{-5}{17}$$

۵) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x^2-4|}{x+2} = \dfrac{0}{0}$

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = -(-2-2) = 4$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -2-2 = -4$$

$4 \neq -4$ پس تابع در $x=-2$ حد ندارد.

ب) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مفهوم گویا کردن و اتحادهای مزدوج یا چاق و لاغر استفاده می کنیم. به این صورت که با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی (برای فرجه های ۲) یا عبارت چاق عبارت رادیکالی (برای فرجه های ۳)، عامل ابهام را ایجاد می کنیم.

مثال: حدود زیر را بیابید

۱) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{x^۲-۴} = \frac{0}{0}$ عامل ابهام $(x-۲)$

مزدوج

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{x^۲-۴} \times \frac{x+\sqrt{۳x-۲}}{x+\sqrt{۳x-۲}} = \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-(۳x-۲)}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۳x+۲}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})} = \lim_{x\to ۲} \frac{\cancel{(x-۲)}(x-۱)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}$$

$$= \frac{۲-۱}{(۲+۲)(۲+\sqrt{۶-۲})} = \frac{۱}{۴(۴)} = \frac{۱}{۱۶}$$

۲) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \dfrac{0}{0}$ عامل ابهام : $(x-4)$

روش هورنر
برای صورت

4	3	-10	-8
	3	$4\times 3-10=2$	$8-8=0$

باقیمانده

خارج قسمت : $3x+2$

$$3x^2-10x-8=(x-4)(3x+2)$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \times \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{3-\sqrt{x}-1}$$

مزدوج

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-\cancel{(\sqrt{x}-2)}}$$

$$= \frac{\underbrace{(\sqrt{4}+2)}_{4}\underbrace{(12+2)}_{14}\underbrace{(\sqrt{3-\sqrt{4}}+1)}_{2}}{-1} = -112$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}=\frac{0}{0}\qquad x:\ \text{عامل ابهام}$$

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}\times\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}+1}\times\frac{\sqrt{3x+4}+2}{\sqrt{3x+4}+2}$$

مزدوج مخرج

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1-1)\left(\sqrt{3x+4}+2\right)}{(3x+4-4)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}\left(\sqrt{3x+4}+2\right)}{3\cancel{x}\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2+2}{1+1}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$4)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}\qquad \text{عامل ابهام}\ (x-2)$$

		-1		2	
x^2-x-2	+	0	−	0	+

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-x-2)}{2x-\sqrt{x^2+12}}\times\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+1)(x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}{4x^2\underbrace{-(x^2+12)}_{-x^2-12}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}{\underbrace{3x^2-12}_{3(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)\cancel{(x-2)}\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}{3\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{-(2+1)(4+4)}{3(2+2)} = \frac{-3 \times 8}{3 \times 4}$$

$$= -2$$

یادآوری اتحاد چاق و لاغر :

$$\overbrace{(a-b)}^{\text{لاغر}}\overbrace{(a^2+ab+b^2)}^{\text{چاق}} = a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

نحوه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱_ جمله اول چاق : مربع (توان دوم) جمله اول لاغر

۲_ جمله دوم چاق : حاصلضرب جمله اول در دوم لاغر با علامت قرینه

۳_ جمله سوم چاق : مربع جمله دوم لاغر

مثال: کنکور تجربی ۹۸

- حدّ عبارت $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x \to -8$، کدام است؟

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

عامل ابهام $(x+8)$

$$\lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)}{6(2+\sqrt[3]{x})} \times \frac{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

لاغر $\longrightarrow$ چاق

$$=\lim_{x\to -8} \frac{\cancel{(x+8)}(x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6(\cancel{8+x})}$$

$2^3 \qquad (\sqrt[3]{x})^3$

$$= \frac{(-8+2)(4-2\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{64})}{6} = \frac{-6(4-2(-2)+4)}{6}$$

$$= -1 \times 12 = -12$$

گزینه ۳

مثال : کنکور ریاضی ۹۹

حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0} \qquad (x-1) \text{ عامل ابهام}$$

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}} \times \frac{2x+5+7\sqrt{x}}{2x+5+7\sqrt{x}} \times \frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}$$

مزدوج مخرج

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left((2x+5)^2-49x\right)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}{\left(4x^2-(3x+1)\right)\left(2x+5+7\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(4x^2+20x+25-49x\right)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}{\left(4x^2-3x-1\right)\left(2x+5+7\sqrt{x}\right)}$$

ریشه‌ها $x=1 , \frac{25}{4}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(4x^2-29x+25\right)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}{\left(4x^2-3x-1\right)\left(2x+5+7\sqrt{x}\right)}$$

ریشه‌ها $x=1 , -\frac{1}{4}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(4x-25)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}{\cancel{(x-1)}(4x+1)\left(2x+5+7\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{(4-25)(2+2)}{(4+1)(2+5+7)} = \frac{-21\times 4}{5\times 14} = \frac{-3\times 2}{5} = -\frac{6}{5} = -1{,}2$$

گزینه ۱

پ) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت یا مخرج یا هردو توابع مثلثاتی باشند:

با استفاده از روابط مثلثاتی عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

1) $$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x} = \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)\cancel{(\cos x+\sin x)}}{\cancel{\cos x+\sin x}}$$

$$= \cos \overset{\pi-\frac{\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4}} - \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{\sin x}\cos x}{\cancel{\sin x}} = 2\cos 0 = 2\times 1 = 2$$

3) $$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

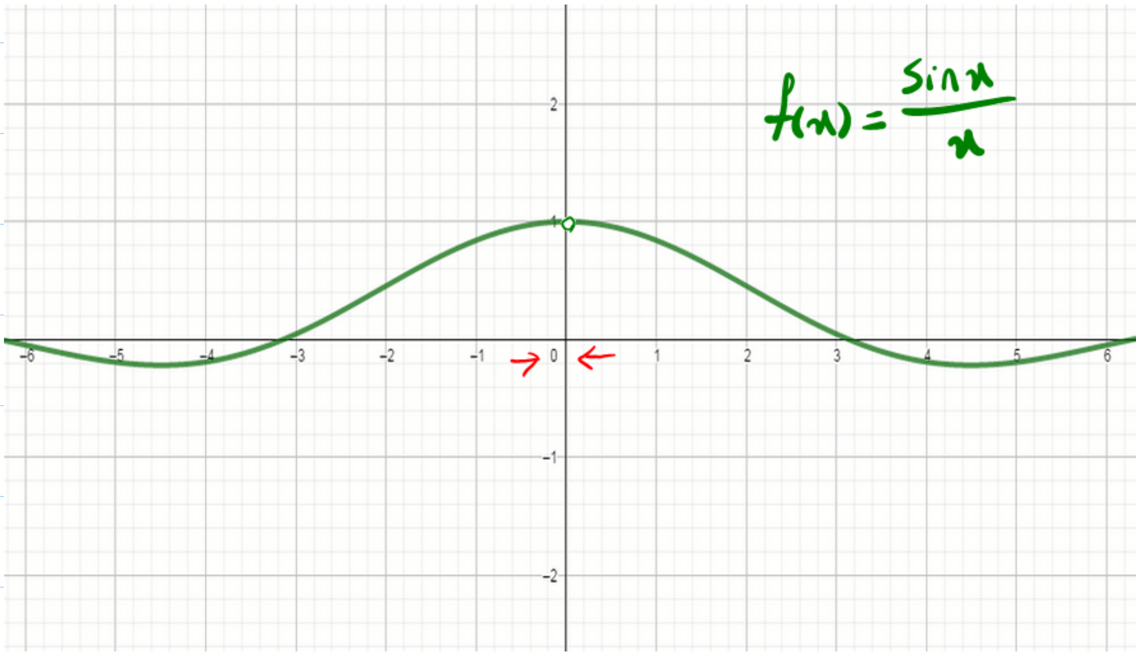
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$$

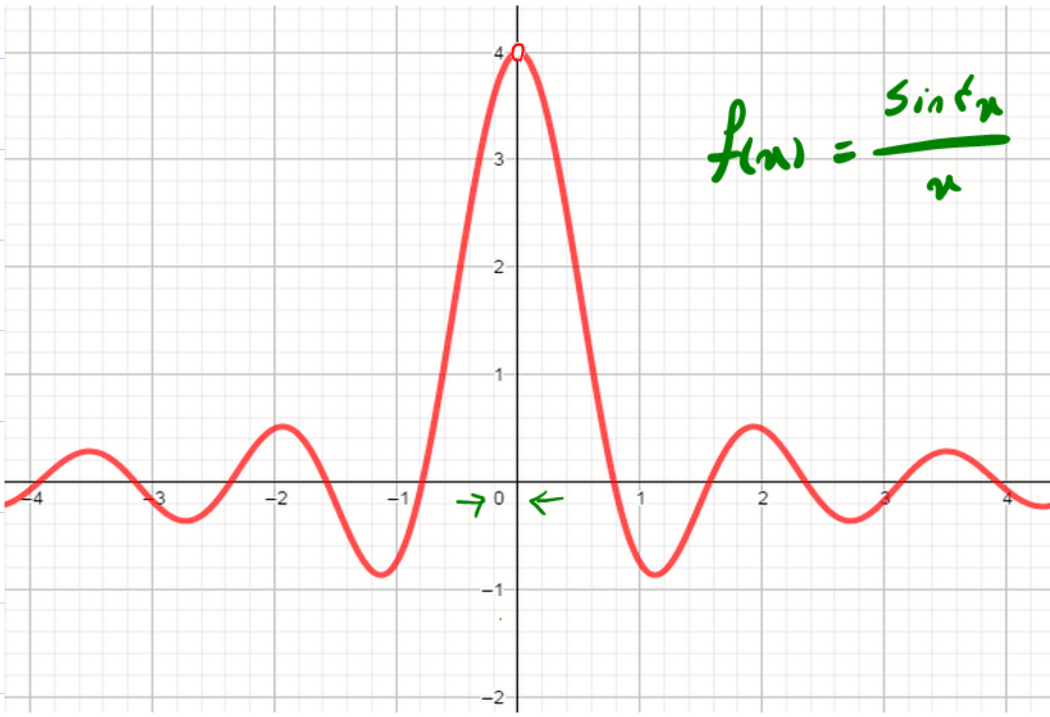
مهم $\boxed{1+\cos 2x = 2\cos^2 x}$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to \pi} \frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\sin^2\frac{\pi}{2} = 2\times 1 = 2$$

نکته: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ داریم: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

در حالت کلی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$.





$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4$

مثال: حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

یعنی هم $\boxed{2\sin^2 x = 1-\cos 2x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = 2\times 2^2 = 2\times 4 = 8$$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x(3+\cos x)}{x \sin 4x}$

$$\xrightarrow[x^2 \text{ تقسیم بر}]{\text{صورت و مخرج}} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}(3+\cos x)}{\dfrac{x\sin 4x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2(3+\cos x)}{\dfrac{\sin 4x}{x}}$$

$$= \frac{2\times 1\times(3+1)}{4} = 2$$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt{\cos x}}{x^2} \times \dfrac{\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2\left(\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$\sqrt{\cos 0}+\sqrt{\cos 0} = 1+1 = 2$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{(1-2\sin^2\frac{3x}{2}) - (1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} - \frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 - \left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{x}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

ت) $\lim_{x \to 0} \left(([2x] + [-2x]) \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \right)$

$\lim_{x \to 0^+} [2x] + [-2x] = 0 - 1 = -1$

$\lim_{x \to 0^-} [2x] + [-2x] = -1 + 0 = -1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} [2x] + [-2x] = -1$

چاق و لاغر

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{-x^2}$$

$$= -2\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 \times (1+1+1)(1+1) = -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 6 = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\left([2x]+[-2x]\right) \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \right) = -1\times(-3) = 3$$

ث) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-|x|\sin 6x}{4x^2-|x|\sin 4x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-(-x)\sin 6x}{4x^2-(-x)\sin 4x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x\sin 6x}{4x^2+x\sin 4x} \xRightarrow{\div x^2} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x\sin 6x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x\sin 4x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1+\frac{\sin 6x}{x}}{4+\frac{\sin 4x}{x}} = \frac{1+6}{4+4} = \frac{7}{8}$$

مثال: کنکور ریاضی ۹۹ (خارج)

حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}\times\frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+3x-\overbrace{(2-x)}^{-2+x}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x}{\sqrt{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)}\times\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

($x\to 0^-$: $\frac{x}{2}$ (ناحیه چهارم) $\to \sin\frac{x}{2}<0$)

$$=\frac{-4}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$

گزینه ۱

روش تغییر متغیر برای رفع ابهام:

در این روش عامل صفرکننده را برابر متغیر جدیدی مانند t می‌گیریم و با تعویض متغیر حد را ساده و محاسبه می‌کنیم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x-1}{4x-\pi}$

عامل ابهام: $x-\frac{\pi}{4}=t$

$$\begin{cases} x=t+\frac{\pi}{4} \\ 4x=4t+\pi \\ 2x=2t+\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left(x\to\frac{\pi}{4} \Rightarrow t\to 0\right)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2t+\frac{\pi}{2})-1}{4t+\pi-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t-1}{4t}=\lim_{t\to 0}\frac{-(1-\cos 2t)}{4t}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2 t}{t}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\sin t$$

$$=-\frac{1}{2}\times 1\times 0=0$$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$

تغییر متغیر $x - \frac{\pi}{2} = t$

$$\left(x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 0 \right) \qquad \begin{cases} x = t + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2t + \pi \\ 3x = 3t + 3\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(2t + \pi)}{\cos(3t + \frac{3\pi}{2})} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin 2t}{\sin 3t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{-\sin 2t}{t}}{\frac{\sin 3t}{t}} = \frac{-2}{3}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت سوم: تعریف حد بی‌نهایت

جلسه سوم: صفحات ۴۶ تا۵۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

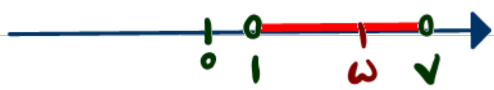
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریفِ همسایگی : اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم.

(a,b) یکِ همسایگی x_0

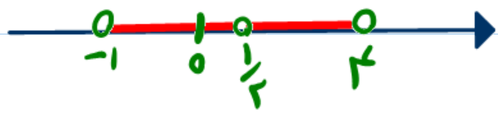
مانند :



$(1,7)$ یکِ همسایگی عدد ۵

تعریفِ همسایگی محذوف : اگر x_0 را از همسایگی بازش خارج کنیم، همسایگی محذوف x_0 به دست می‌آید. یعنی: $(a,b)-\{x_0\}$

مانند :



$(-1,4)-\{\frac{1}{2}\}$ یکِ همسایگی محذوف $\frac{1}{2}$

تعریفِ همسایگی راست و چپ : اگر r عددی حقیقی و مثبت باشد بازه (x_0, x_0+r) را یکِ همسایگی راست x_0 و بازه (x_0-r, x_0) را یکِ همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مانند :

$(2,5)$ یکِ همسایگی راست برای ۲ (۵ یا ۲+۳)

$(0,2)$ یکِ همسایگی چپ برای ۲ (۰ = ۲-۲)

مثال: اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی عدد یک باشد، حدود a را بیابید.

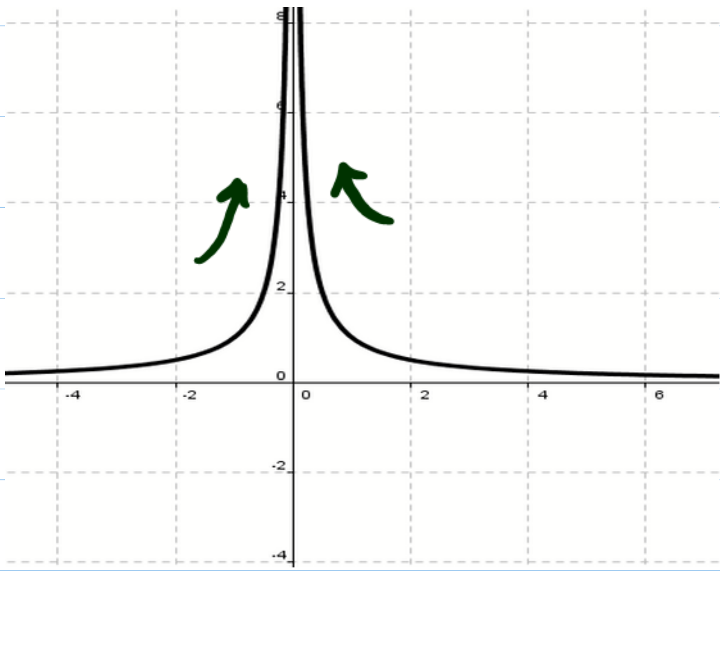
$$a-3<1<2a+1$$

$$\begin{cases} a-3<1 \rightarrow a<4 \\ 2a+1>1 \rightarrow 2a>0 \rightarrow a>0 \end{cases} \cap \rightarrow 0<a<4$$

می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ را در $x=0$ بررسی کنیم. تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود ولی

در یک همسایگی محذوف ۰ وجود دارد.

x	$-0/5$	$-0/01$	$-0/001$	$-0/0001$	$\rightarrow 0$	$0 \leftarrow$	$0/0001$	$0/001$	$0/01$	$0/5$
$y=f(x)$	2	100	1000	10000	$+\infty$	$+\infty$	10000	1000	100	2



تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f با میل x به a بی‌کران افزایش یابند یعنی از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشند می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

در این صورت می‌گوئیم تابع f در a حد نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد.

تذکر: اگر با شرایط تعریف بالا:

۱- مقادیر تابع f بی‌کران کاهش یابد، می‌نویسیم: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

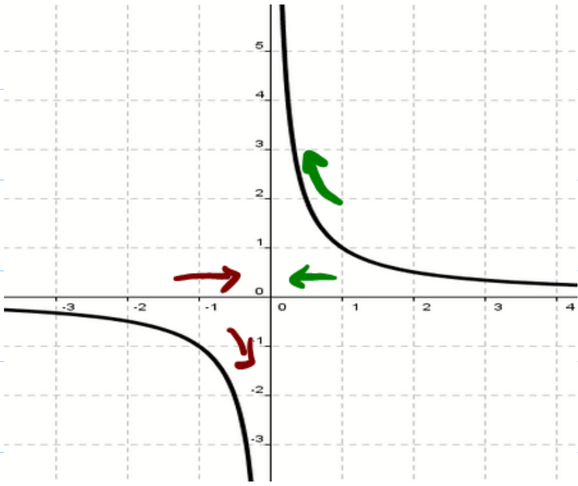
۲- f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کاهش یا افزایش یابند

به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ یا $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

۳- f در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کاهش یا افزایش یابند

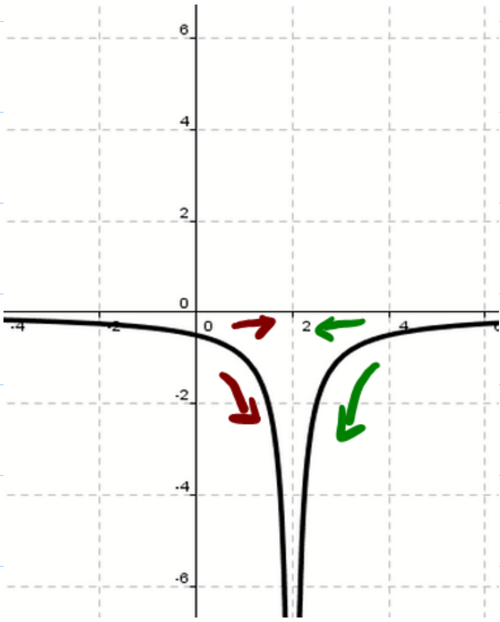
به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ یا $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

مثال :



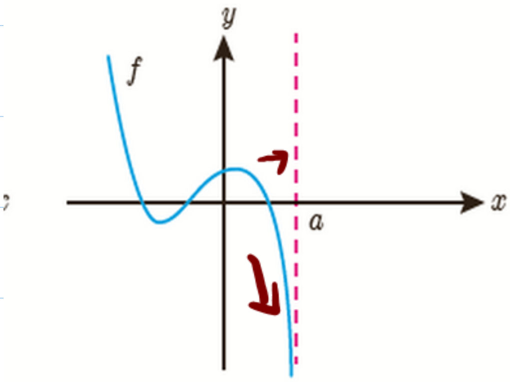
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

محاسبه حد بی نهایت :

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه a حد نامتناهی یا حد بی نهایت دارد و علامت بی نهایت با توجه به علامت L و علامت صفر حدی تابع g در یک همسایگی محذوف a تعیین می شود. این نکته برای حد چپ و حد راست هم درست است.

پس : $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\infty$ (در حد بی نهایت x به سمت یک عدد میل می کند و جواب حد بی نهایت می شود.)

نکته : برای تشخیص علامت صفر حدی با توجه به ضابطه تابع مخرج از عدد گذاری مقادیر نزدیک a یا جدول تعیین علامت و در صورتی که تابع مثلثاتی باشد از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم. همچنین در صورتی که حد چپ و راست در علامت صفر مؤثر باشد باید هر یک را جداگانه بررسی کرد.

کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^-}\dfrac{۲x}{x-۵}=\dfrac{10}{5^- -5}=\dfrac{10}{0^-}=-\infty$

$4{,}9$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^+}\dfrac{۲x}{x-۵}=\dfrac{10}{5^+ -5}=\dfrac{10}{0^+}=+\infty$

$5{,}1$

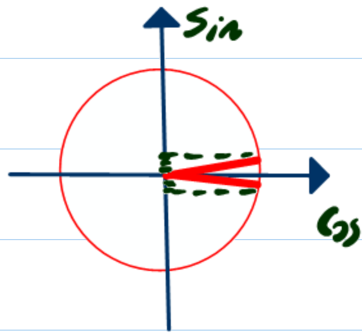
x	$\to$	5	$\leftarrow$
$x-5$	$-$	0	$+$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-1}{(0^{\pm})^2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{|x-3|} = \dfrac{2}{|0^{\pm}|} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

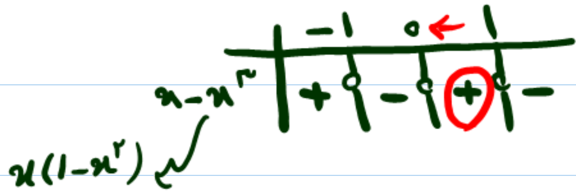
ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{[x]}{|3x+1|} = \dfrac{-1}{|0^{\pm}|} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{(0^{\pm})^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$



مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

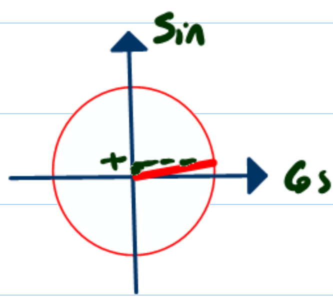
1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x-x^3} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$



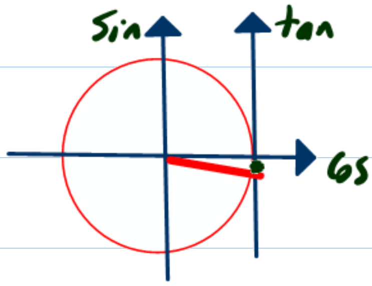
2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-1}{(x-2)^3} = \dfrac{2\times 2-1}{(0^-)^3} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

$1{,}9$

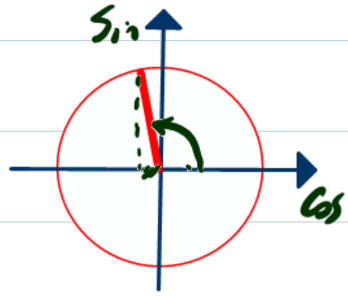
3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \dfrac{1+1}{0^+} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$



۴) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x-2}{\tan x}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty$



۵) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos 2x-1}{\cos x}=\dfrac{\cos 2\frac{\pi}{2}-1}{0}=\dfrac{\cos\pi-1}{0}=\dfrac{-1-1}{0}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty$



۶) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{-2+1}{-2^+ +2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

$-2^+ \to -1.9$

		-2	
$x+2$	$-$	0	$+$

۷) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{[x]-1}{x^2-1}=\dfrac{0-1}{(1^-)^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$

		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

۸) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-[x]-1}{x^2-4}$ $\begin{cases} x\to 2^+: \dfrac{-2-1}{0^+}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty \\ x\to 2^-: \dfrac{-1-1}{0^-}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty \end{cases}$

		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

۹) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\tan x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{(0^+)^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

۱۰) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-4}{x^2-5x+6}=\dfrac{-4}{0}$ $\begin{cases} x\to 2^+: \dfrac{-4}{0^-}=+\infty \\ x\to 2^-: \dfrac{-4}{0^+}=-\infty \end{cases}$

		2		3	
مخرج	$+$	0	$-$	0	$+$

11) $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{0}{0}$$ عامل ابهام $(x-1)$

روش هورنر: برای تقسیم چند جمله ای بر درجه یک

$x^3-x^2-x+1 \,\Big|\, x-1$ $x-1=0$, $x=1$

ریشه مقسوم علیه ← 1

	1	-1	-1	1
1	1	$1\times1-1=0$	$1\times0-1=-1$	$1\times(-1)+1=0$

سه لفظ کلیدی: ضرب ـ جمع

باقیمانده

درجه اش یک واحد کمتر از مقسوم

خارج قسمت: $1x^2 + 0x - 1 = x^2-1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}\underbrace{(x^2-1)}_{0/9}} = \frac{1-2}{0} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

مثال: اگر $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، a و b را بیابید.

$$\frac{\overset{-1}{2-3}}{0^+} = -\infty$$

۲ ریشه مضاعف مخرج است پس:

$$(x-2)^2 = x^2+ax+b$$
$$x^2-4x+4 = x^2+ax+b \longrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$$

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

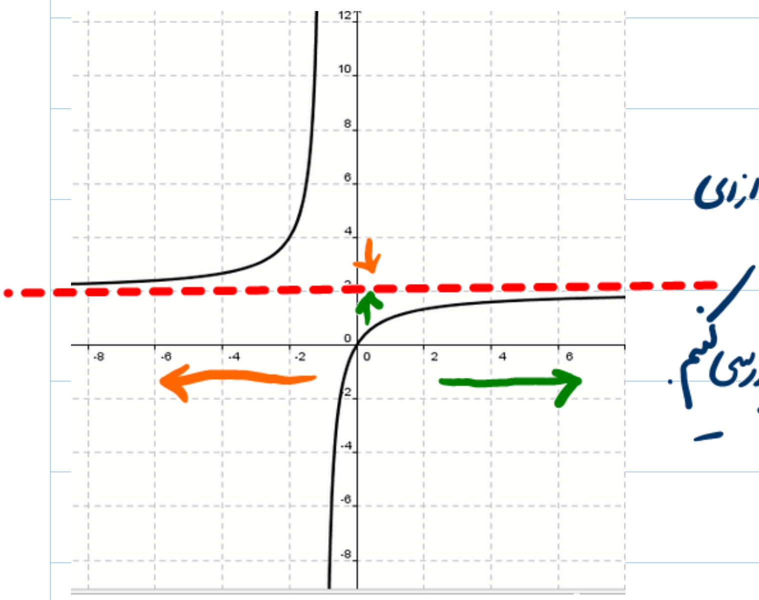
فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس دوم: حد در بی‌نهایت

جلسه چهارم: صفحات ۵۹ تا ۶۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

حد در بی نهایت :



می‌خواهیم رفتار تابع $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ را به ازای برخی مقادیر مثبت و منفی x در جدول زیر بررسی کنیم.

x	$-\infty \leftarrow -۱۰۰۰۰$	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$۱۰۰۰۰ \rightarrow +\infty$
$f(x)$	$۲ \leftarrow$ ۲٫۰۰۰۲	۲٫۰۰۲	۲٫۰۲	۲٫۲	۱٫۸۱	۱٫۹۸	۱٫۹۹۸	۱٫۹۹۹ $\rightarrow$ ۲

تعریف : فرض کنید تابع f روی بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده باشند در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$.

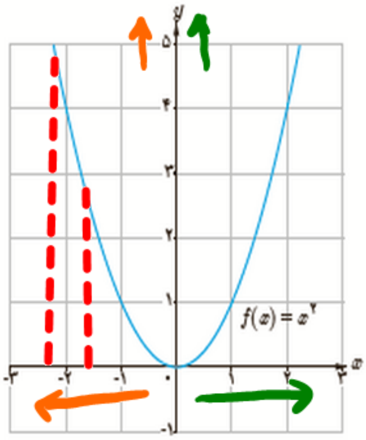
تذکر : اگر در تعریف بالا، بازه $(-\infty,a)$ و مقادیر متغیر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند می‌نویسیم : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

نکته : در حد در بی نهایت x به سمت مثبت یا منفی بی نهایت میل می‌کند و جواب حد یک عدد است.

نکته: در برخی توابع، وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند، مقدار تابع یعنی $f(x)$ هم به هر اندازه دلخواه بزرگ یا کوچک می شود، یعنی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. به این حالت حد نامتناهی در بی نهایت می گوییم.

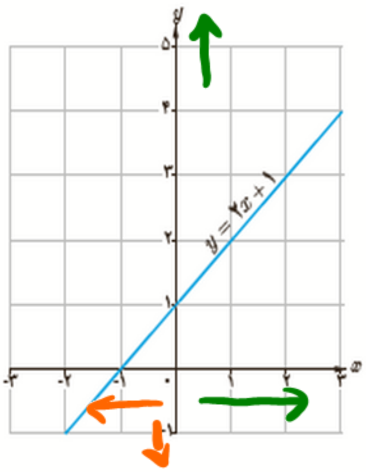
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



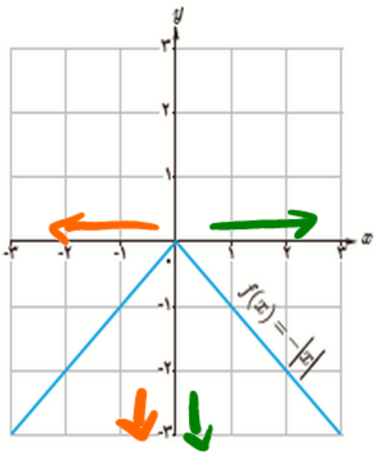
الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



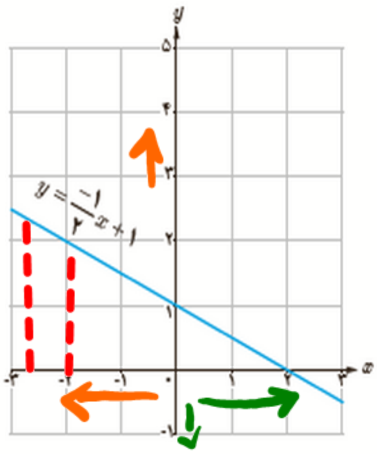
ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$



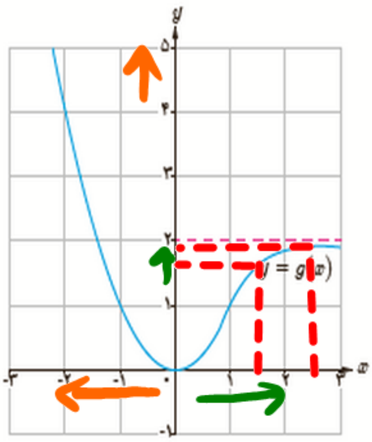
پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



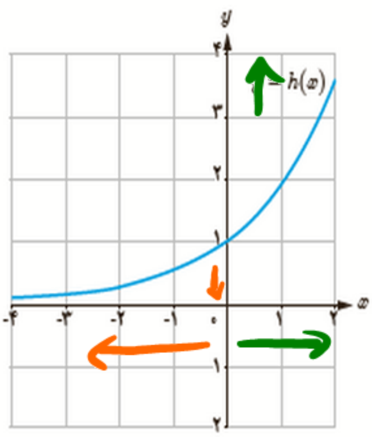
ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = -\infty$



ث) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

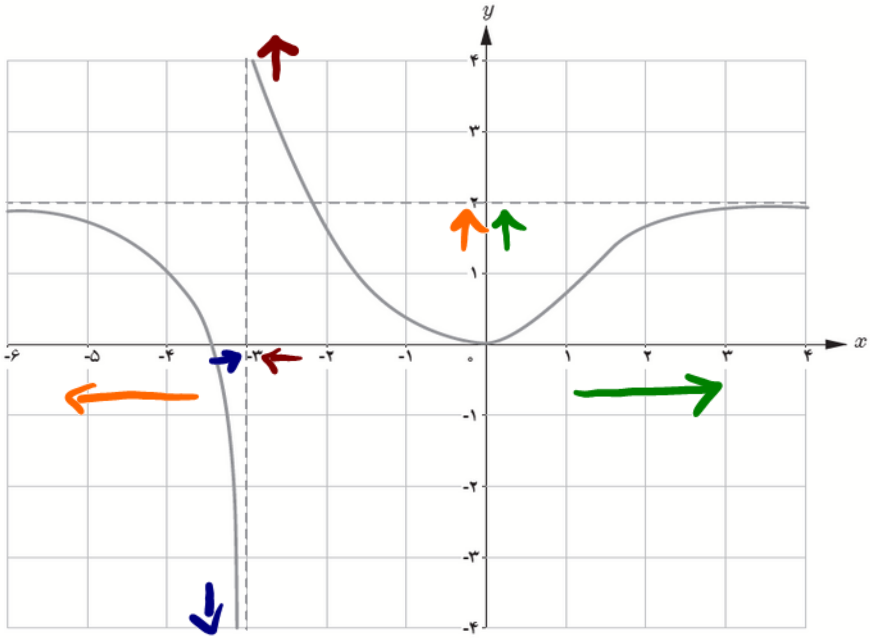
مثال: با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$\lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to(-۳)^-} f(x) = -\infty$

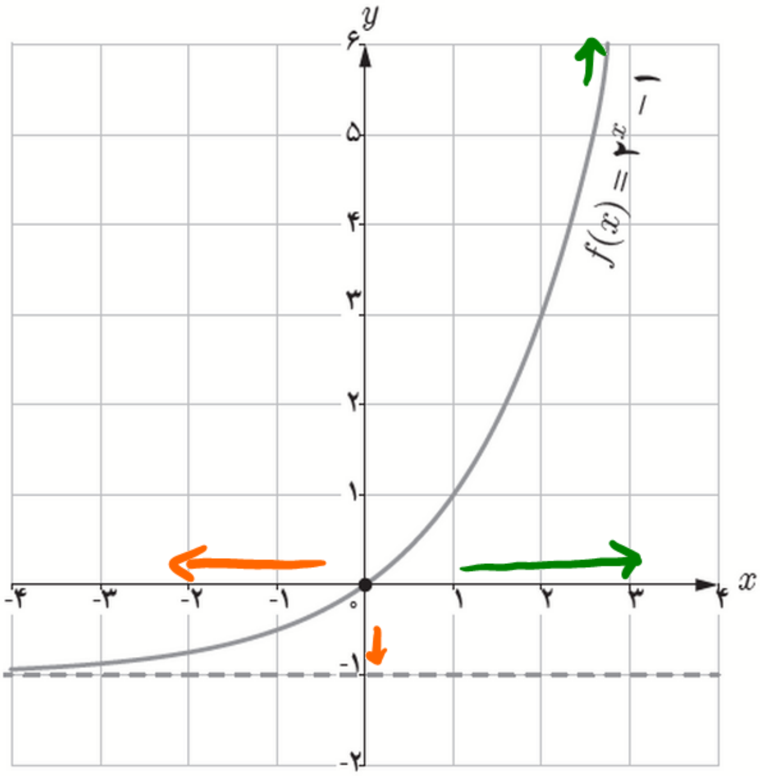
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۲$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۲$



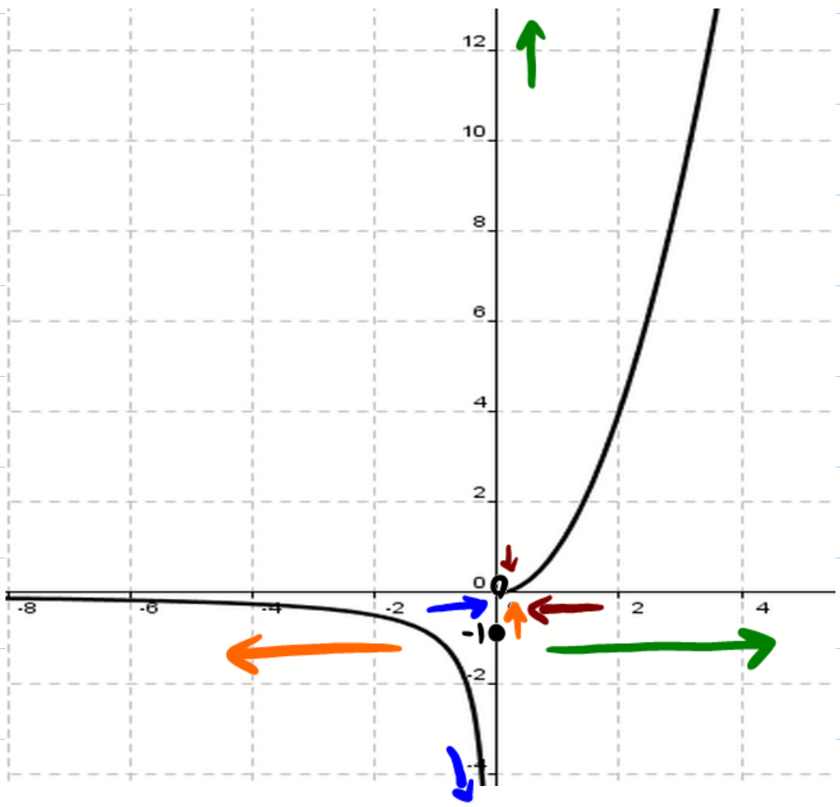
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -۱$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>۰ \\ -۱ & x=۰ \\ \dfrac{۱}{x} & x<۰ \end{cases} \quad : \lim_{x\to ۰^{+}} g(x) \ , \ \lim_{x\to ۰^{-}} g(x) \ , \ \lim_{x\to -\infty} g(x) \ , \ \lim_{x\to +\infty} g(x)$$



$$\lim_{x\to 0^{+}} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^{-}} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$$

محاسبه حد در بی‌نهایت از روی ضابطه :

۱) از قاعده‌های زیر ، بعد از جایگذاری $+\infty$ یا $-\infty$ به جای x ، در محاسبه حد در بی‌نهایت‌ها استفاده می‌کنیم. $(a \in \mathbb{R}-\{0\})$

1) $a \times \infty = \infty$

۲) $a + \infty = \infty$

* ۳) $\frac{a}{\infty} = 0$

۴) $\frac{\infty}{a} = \infty$

(۵) $(\infty)^{a} = \infty \qquad (a \in \mathbb{N})$

۶) $+\infty + \infty = +\infty$

۷) $-\infty - \infty = -\infty$

۸) $\infty - \infty$: حالت مبهم

۹) $\infty \times \infty = \infty$

۱۰) $\frac{\infty}{\infty}$: حالت مبهم

۱۲) $\sqrt{+\infty} = +\infty$

۱۳) $a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$ $\rightarrow (\frac{1}{2})^{+\infty} = 0$, $\rightarrow 4^{+\infty} = +\infty$

۱۴) $a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$ $\rightarrow (\frac{1}{2})^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$, $\rightarrow 3^{-\infty} = (\frac{1}{3})^{+\infty} = 0$

۲) در محاسبه حد در بی‌نهایت چندجمله‌ای های درجه n، از جمله‌ای که توان متغیرشان کمتر از n است صرف‌نظر می‌کنیم.

۳) برای محاسبه حد در بی‌نهایت توابع کسری که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند، ابتدا از نکته ۲ استفاده می‌کنیم و از درجات کمتر صرف‌نظر می‌کنیم. سه حالت رخ می‌دهد:

الف) درجه صورت از مخرج بیشتر است. در این حالت حد نامتناهی می‌شود یعنی $+\infty$ یا $-\infty$.

ب) درجه صورت و مخرج برابر هستند. در این حالت با تقسیم ضرائب متغیر، مقدار حد محاسبه می‌شود.

ج) درجه مخرج از صورت بیشتر است. در این حالت مقدار حد صفر می‌شود.

۴) هرگاه در صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشتیم، از درجات کوچکتر از درجه عبارت زیر رادیکال صرف‌نظر می‌کنیم و در صورت امکان عبارت پرتوان را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم.

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2-3x}$

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{-5t^2}{t^2}=-5$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overset{\text{ثابت}}{1}}{-3x}=0$ یا $\frac{1}{-\infty}=0$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد.

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{-x+2} = -1$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{100x}{x+4} = 100$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{x^3} = 0$ یا $\frac{5}{\infty} = 0$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} -2x^4 = -2\times(+\infty) = -\infty$

مثال: حدهای زیر را بیابید

۱) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3+x+1}{x^3-x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{x^3} = 5$

۲) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

۳) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(۳x^۲-۱)(x+۱)}{x^۳-۲} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۳x^۳}{x^۳} = ۳$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳x^۲+۱}}{۲x-۳} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳x^۲}}{۲x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳}\overset{+}{|x|}}{۲x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳}x}{۲x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۶) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = ۱$

۷) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۶x^۲-\cancel{\sqrt{x-۳}}}{۵x^۲-\cancel{\sqrt{x+۱}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۶x^۲}{۵x^۲} = \frac{۶}{۵}$

۸) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^۲+\sqrt{x^۴+۳x+۱}}{۵x^۲} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^۲+\sqrt{x^۴}}{۵x^۲} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^۲+x^۲}{۵x^۲}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x^۲}{۵x^۲} = \frac{۲}{۵}$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت

جلسه پنجم: مجانب‌ها

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف مجانب یک منحنی :

خطی است که فاصله منحنی از آن در بی نهایت به صفر نزدیک می شود.

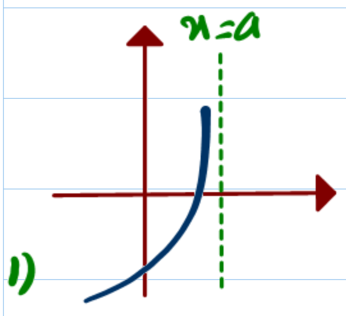
۱) مجانب قائم :

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می نامیم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

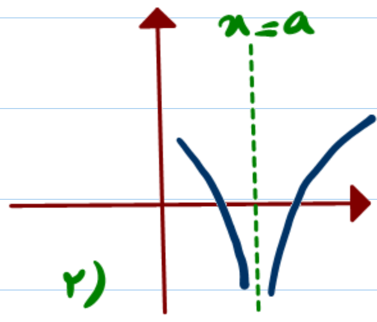
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

مانند :



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

مثال: مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ را بدست آورید.

حد تابع را در $x=-1$ یعنی ریشه مخرج محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

نمودار این تابع اطراف مجانب قائم مانند (۲) است.

نکته: در توابع کسری ریشه‌های مخرج مستعد مجانب قائم بودن هستند. اگر حد تابع در این نقاط بی‌نهایت شود آنگاه خط ($x=$ ریشه مخرج) مجانب قائم است.

تذکر ۱) در توابع کسری که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند، اگر ضابطه تابع را ساده کنیم به طوری که عامل مشترکی در صورت و مخرج نباشد، به طور قطع ریشه‌های مخرج مجانب قائم هستند.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x^2-x-6)(x-4)}$ چند مجانب قائم دارد؟

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+2)(x-4)}=\frac{x-1}{(x+2)(x-4)}$$

پس $x=-2$ و $x=4$ مجانب های قائم اند.

تذکر ۲) در توابع کسری که صورت یا مخرج چندجمله‌ای نیستند، اگر در نقطه‌ای صورت و مخرج صفر شود، نمودار در آن نقطه مجانب قائم دارد. دقت کنید برای اینکه صورت و مخرج تعریف شود باید تابع حداقل در سمت چپ یا راست نقطه تعریف شده باشد.

مثال: نمودار تابع $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x+2)}$ چند مجانب قائم دارد؟

فقط یک مجانب قائم $x=0$ دارد. دقت کنید چون $D_f=(0,+\infty)$ پس تابع در اطراف $x=-2$ تعریف نشده است.

مثال: به ازای چه مقدار a تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+ax+9}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

دو حالت داریم:

۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد: $\Delta=0 \rightarrow a^2-36=0 \rightarrow a=\pm 6$

۳) فقط یکی از ریشه‌های مخرج با صورت برابر باشد تا بعد از ساده کردن صورت و مخرج، یک ریشه برای مخرج باقی بماند.

پس $x=1$ باید ریشهٔ مخرج هم باشد، $x=1 : 1^2+a(1)+9=0$

$\Rightarrow a=-10$

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-10x+9}=\frac{x-1}{(x-1)(x-9)} \Rightarrow$$ مجانب قائم $x=9$

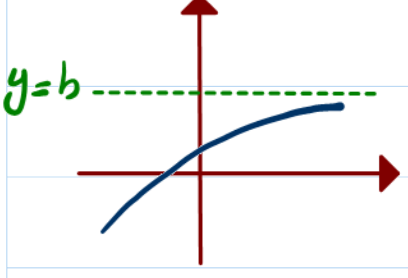
پس به ازای $a=\pm 6$, $a=-10$ این تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

۲) مجانب افقی:

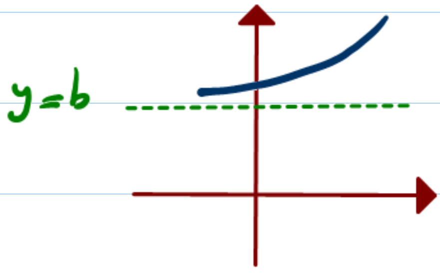
خط $y=b$ را مجانب افقی نمودار تابع f می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

مانند:



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

پس برای یافتن مجانب افقی تابع f کافی است حد تابع f را وقتی $x \to \pm\infty$ حساب کنیم.

مثال: مجانب افقی $f(x) = \dfrac{x}{2x-|x-1|}$ را بیابید.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x-(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x+(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}$$

پس نمودار تابع دو مجانب افقی $y=1$ و $y=\frac{1}{3}$ دارد.

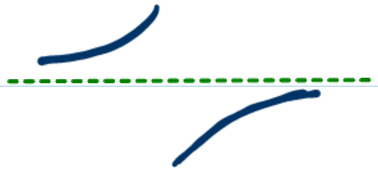
مثال: نمودار تابع $f(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$ در مجاورت مجانب افقی آن چگونه است؟

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \quad \to \quad y=1 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+4} = \frac{x+4-5}{x+4} = 1 - \frac{5}{x+4}$$

$x \to +\infty : \quad \dfrac{5}{x+4} \to 0^+ \quad \to \quad f(x) < 1 \quad :$ نمودار پایین مجانب افقی

$x \to -\infty : \quad \dfrac{5}{x+4} \to 0^- \quad \to \quad f(x) > 1 \quad :$ نمودار بالای مجانب افقی

پس اطراف $y=1$ نمودار به صورت :  است.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x^2+2}$ مجانب افقی خودش را قطع نمی‌کند. حدود m را بیابید.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \to y=0$ مجانب افقی

پس باید معادله $f(x)=0$ جواب نداشته باشد تا نمودار f خط $y=0$ را قطع نکند:

$$\frac{x^2+mx+1}{x^2+2}=0 \to x^2+mx+1=0 \ : \ \Delta=m^2-4<0$$

$$\Rightarrow -2<m<2$$