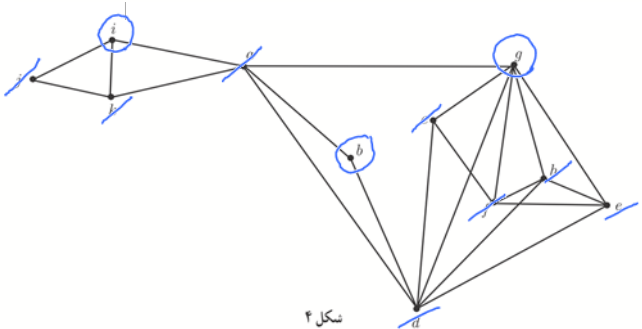


شکل ۴



شکل ۴

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید.

۳ ایستگاه

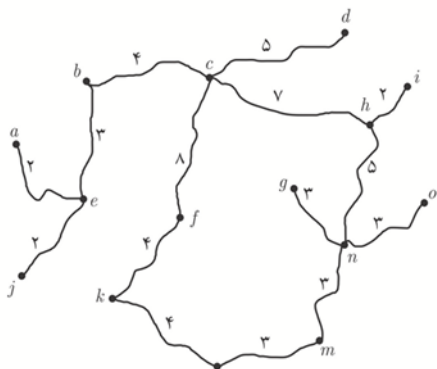
$$\{d, f, i\}$$

ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر  $b$  احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

باید حداقل ۳ ایستگاه دیگر در شهرهای  $g$  و  $h$  ای‌کنیم.

۲ نقشه مقابل نقشه یک منطقه شامل چند روستا و

جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.



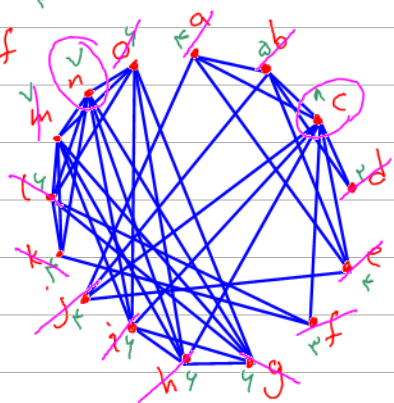
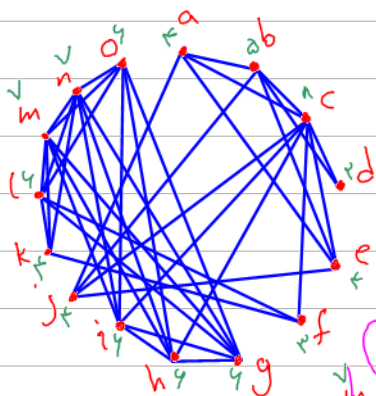
شکل ۱۵

$$n=15, \Delta=8 \rightarrow \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{15}{9} \rceil = 2$$

۲ روستا مثلا  $c, n$

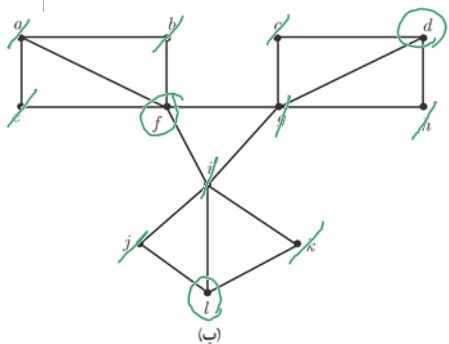
$$\text{شماره ایستگاه‌ها} = \{n, c\}$$

مدل‌سازی با گراف را در این صورت می‌توانیم که رأس  $b$  همان روستاها باشند و یال‌ها بین دو روستای باشند که فاصله آنها از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد.



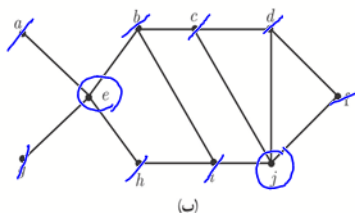
شکل ۱۵

۲ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



$$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{12}{2+1} \rceil = 2 \rightarrow \delta \geq 2$$

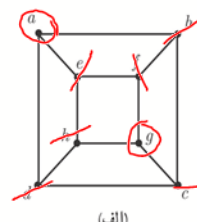
$$D = \{f, l, d\} \rightarrow \delta = 3$$



(ب)

$$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{10}{4+1} \rceil = 2 \rightarrow \delta \geq 2$$

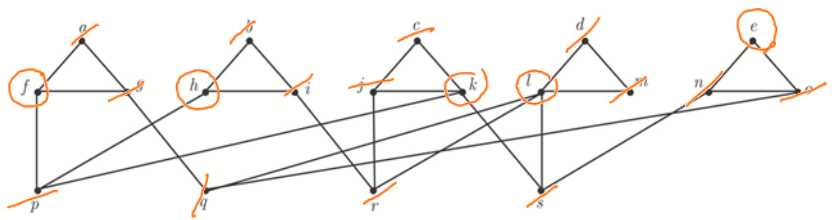
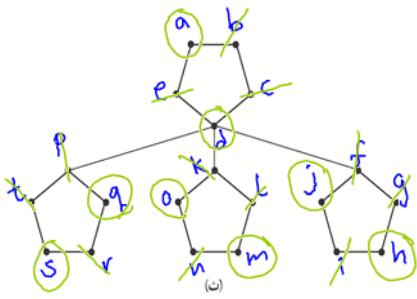
$$D = \{e, j\} \rightarrow \delta = 2$$



(الف)

$$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{11}{4+1} \rceil = 2 \rightarrow \delta \geq 2$$

$$D = \{a, g\} \rightarrow \delta = 2$$



$$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{10}{5+1} \rceil = 2 \rightarrow \gamma \geq 2$$

مقدار اینجاست تا  $C_5$  داریم که در اینجاست برای هر  $C_5$   $\gamma=2$  پس در این گراف  $\gamma=2$  است  
 $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t\}$

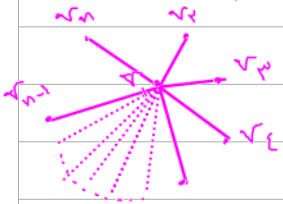
$$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{14}{5+1} \rceil = \lceil \frac{14}{6} \rceil = 3 \rightarrow \gamma \geq 3$$

اینجا  $\gamma=3$  می توانیم مجموعه  $D$  را رسم کنیم (5 مثلث در این داریم که تقریباً صابانه هستند)

$$D = \{l, e, k, h, f\} \rightarrow \gamma = 3$$

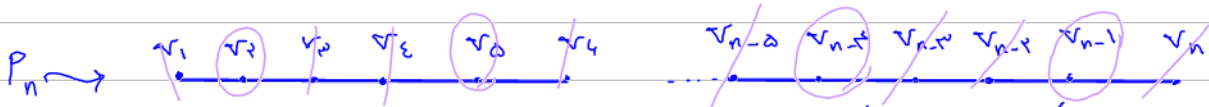
1 اگر برای گراف  $G$  داشته باشیم  $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی هایی از گراف  $G$  می توان پی برد؟  $\Delta(G)$  و حداقل و حداکثر تعداد بال هایی را که گراف  $G$  می تواند داشته باشد مشخص کنید.

اگر  $\gamma=1$  باشد یعنی یک رأس در گراف وجود دارد که به همه رئوس دیگر متصل است  
 در این رسم  $D = \{v_1\} \rightarrow \gamma = 1$   
 در این رسم  $D = \{v_1\} \rightarrow \gamma = 1$   
 در این رسم  $D = \{v_1\} \rightarrow \gamma = 1$



$$D = \{v_1\} \rightarrow \gamma = 1$$

5  $\gamma(P_n)$  و  $\gamma(C_n)$  را به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  مشخص کنید.

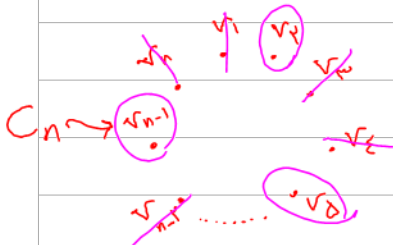


در گراف  $P_n$  هر رأس حداکثر 3 رأس را می تواند وصل کند.

$$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{n}{3+1} \rceil$$

$$\gamma = \lceil \frac{n}{4} \rceil$$

اگر  $n$  بر 3 بخش پذیر باشد در این صورت  $\gamma = \frac{n}{3}$



در گراف  $C_n$  هم مثل  $P_n$  هر رأس حداکثر 3 رأس را می تواند وصل کند.

$$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{n}{4+1} \rceil = \lceil \frac{n}{5} \rceil \text{ و } \gamma = \lceil \frac{n}{5} \rceil$$

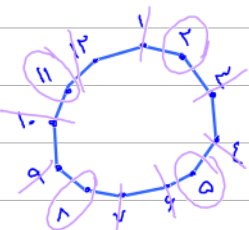
6 اگر  $G$  یک گراف  $k$ -منظم  $n$  رأسی باشد نشان دهید  $\lceil \frac{n}{k+1} \rceil \leq \gamma(G)$

در یک گراف  $k$ -منظم  $n$  رأسی  $\Delta=k$  و هر رأس  $k+1$  رأس را می تواند وصل کند

$$\gamma \geq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{n}{k+1} \rceil \rightarrow \gamma \geq \lceil \frac{n}{k+1} \rceil$$

7 یک گراف 2-منظم 12 رأسی بکشید که عدد احاطه گیری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

$$\gamma = \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{12}{3+1} \rceil = \lceil \frac{12}{4} \rceil = 3$$



$$D = \{2, 5, 8, 11\} \rightarrow \gamma = 3$$

8 الف) یک گراف 6 رأسی که  $\gamma=7$  مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

$$D = \{1\} \rightarrow \gamma = 1$$



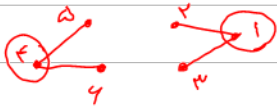
$$D = \{1, 4\} \rightarrow \gamma = 2$$

ب) یک گراف 6 رأسی که  $\gamma=7$  مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید  $n$  و  $k$  دو عدد طبیعی باشند و  $k \leq \frac{n}{2}$ . روشی برای رسم یک گراف  $n$  رأسی که عدد احاطه گیری آن  $k$  باشد، ارائه دهید.

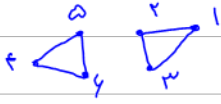
گراف را به  $k$  بخش مساوی تقسیم کنیم که هر کدام عدد احاطه گیری آن  $k$  باشد و تقسیم کنیم (تقریباً بی اندازه کوچک است!)

۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.



$$D = \{1, 4\} \rightarrow \gamma = 2$$

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.

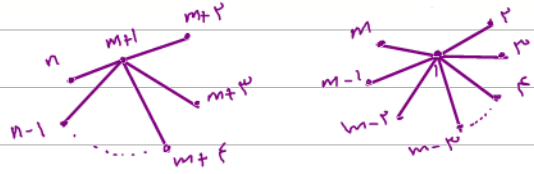


$$D = \{1, 4\} \text{ یا } D = \{1, 5\} \text{ یا } D = \{1, 6\} \text{ و } \dots \rightarrow \gamma = 2$$

۱۰ برای هر  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 4$ ) دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف  $n$  رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

گراف را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. در بخش اول  $m$  رأس را انتخاب می‌کنیم. در بخش دوم  $n-m$  رأس را انتخاب می‌کنیم. در هر دو بخش  $m-1$  و در هر دو بخش  $n-m$  رأس را انتخاب می‌کنیم. یعنی  $n-m+1$  رأس را انتخاب می‌کنیم.



در هر دو بخش  $(n-m-1)$  رأس را انتخاب می‌کنیم. در هر دو بخش  $n-m$  رأس را انتخاب می‌کنیم. یعنی در هر دو بخش  $n-m$  رأس را انتخاب می‌کنیم. و مجموع احاطه گر یکتا است.

$$D = \{1, m+1\} \text{ و } \gamma = 2$$

در این مثال:

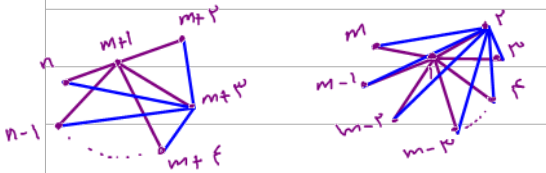
ب) چگونه می‌توانید یک گراف  $n$  رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.

چگونه می‌توانید یک گراف  $n$  رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.

یا یک رأس دیگر را هم به تمام رئوس وصل می‌کنیم

$$D = \{m+1, 1\} \text{ یا } D = \{m+3, 2\}$$

در این مثال رأس ۲ و  $m+3$  را هم در دو بخش به تمام رئوس وصل می‌کنیم.



۱۱ گراف  $P_{12}$  را رسم کنید.

الف) یک  $\gamma$  - مجموعه از آن را مشخص نمایید.



$$\gamma = \lfloor \frac{12}{2+1} \rfloor = \lfloor \frac{12}{3} \rfloor = 4 \quad D = \{2, 5, 8, 11\}$$

ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.



$$\text{مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی} = \{1, 4, 7, 10, 13\}$$

با احترام  
علیرضا پور