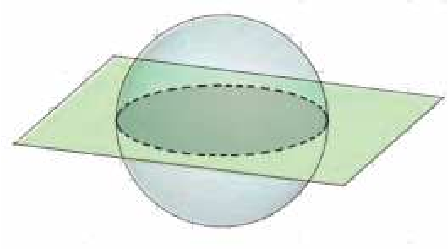
درس اوّل : آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

در این فصل ابتدا به معرفی مفهوم مقطع مخروطی پرداخته و در ادامه مکان هندسی را تعریف می کنیم. در انتها کاربردهایی برای مکان هندسی بیان می کنیم.

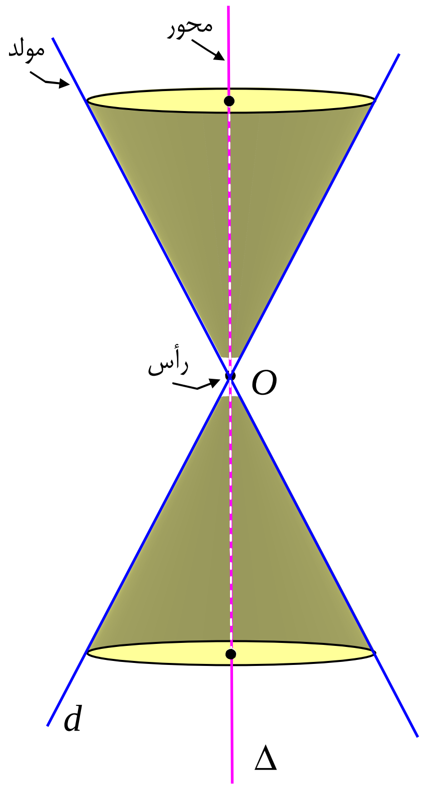
مقاطع مخروطی



در پایه های قبل با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شده اید. بیاد دارید که سطح مقطع حاصل از برش یک صفحه و یک کره، می تواند یک نقطه یا یک دایره است. منظور از فصل مشترک صفحه و کره ، مجموعه‌ی نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند.

تمرین ۱: فصل مشترک یک صفحه و یک کره چیست؟ حالتی را بیان کنید که دایره‌ی حاصل از فصل مشترک صفحه و کره، بزرگترین دایره‌ی ممکن باشد.

رویه‌ی مخروطی

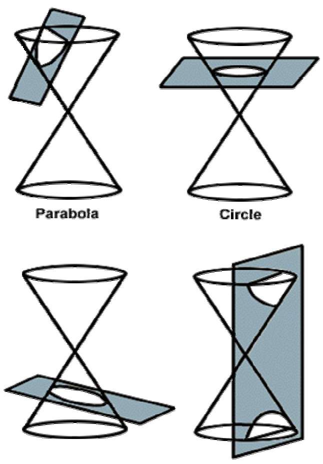


فرض کنید که دو خط d و Δ در نقطه‌ی O مانند شکل مقابل ، متقاطع و غیر متعامد باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط Δ را یک **رویه‌ی مخروطی** (سطح مخروطی) می نامند.

در این حالت خط Δ را **محور**، نقطه‌ی O را رأس و خط d را **مولد** این سطح مخروطی می گویند.

فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی با توجه به حالت های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، یک **مقطع مخروطی** گفته می شود. در ادامه تعدادی از این مقاطع مخروطی را مشاهده می کنید.

۱ : اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس نگذرد، مقطع ایجاد شده یک **دایره** است.



توجه داشته باشید که اگر صفحه، از رأس بگذرد، مقطع مخروطی تنها یک **نقطه** خواهد بود.

۲ : اگر صفحه بر محور سطح عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و صفحه در یک طرف سطح مخروطی قرار گیرد، مقطع ایجاد شده یک **بیضی** است.

۳ : اگر صفحه از رأس مخروطی نگذرد و هر دو طرف سطح مخروطی را قطع نماید، مقطع ایجاد شده یک **هذلولی** است.

۴ : اگر صفحه با یکی از مولد های سطح مخروطی موازی بوده و سطح مخروطی را در یک طرف رأس قطع کند، مقطع ایجاد شده یک **سهمی** است.

در اینجا به طور شهودی با مقاطع مخروطی ، آشنا شده اید. در دروس بعدی تعریف دقیقی برای هر یک از مقاطع مخروطی[1] ارائه خواهیم داد.

تمرین برای حل :

۲ : هرگاه صفحه ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، مقطع حاصل چه شکلی است؟

۳ : هر دو خط Δ و d موازی باشند. از دوران خط d حول Δ سطحی ایجاد می شود که آن را **سطح استوانه ای** می نامند. حال فرض کنید ، صفحه‌ی P ، یک سطح استوانه ای را قطع کند. در حالت های مختلف درباره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید. (توجه داشته باشد که مسئله چهار حالت دارد.)

***

[1] . بررسی هذلولی جزء اهداف کتاب درسی نمی باشد.

مکان هندسی

مکان هندسی به مجموعه‌ی نقاطی از صفحه یا فضا گفته می شود که همه‌ی آنها دارای یک ویژگی مشترک باشند و اگر نقطه‌ای یافت شود که دارای این ویژگی باشد، عضو این مجموعه باشد.

به عبارتی دیگر هر مجموعه از نقاط با ویژگی معین را **مکان هندسی** گویند، هرگاه :

الف: هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است.

ب: هر نقطه‌ی دیگر که این ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه است.

مثال : دایره به شعاع ۵ سانتی متر به مرکز O یک مکان هندسی است. زیرا :

الف : فاصله‌ی هر نقطه‌ی روی دایره تا مرکز دایره برابر ۵ سانتی متر است.

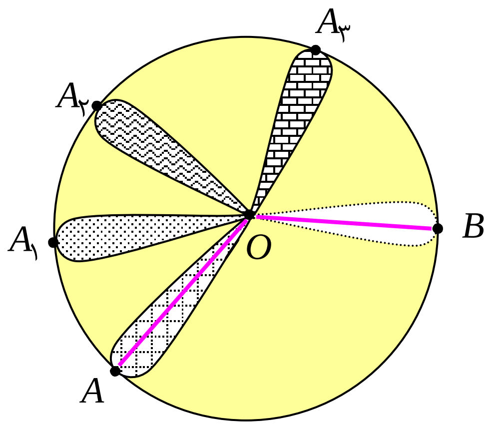
ب : اگر نقطه‌ای پیدا شود که فاصله‌ی آن تا مرکز دایره برابر ۵ سانتی متر باشد، آن نقطه روی دایره است.

در شکل مقابل واضح است که

الف: فاصله‌ی هر نقطه مانند A روی دایره تا نقطه‌ی ثابت O مقداری ثابت و برابر شعاع است.

ب: هر نقطه مانند B که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی ثابت O همان فاصله را داشته باشد، روی دایره است.

بنابراین دایره‌ی شکل مقابل یک مکان هندسی است.

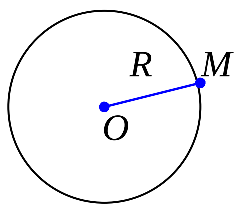


نقطه‌ی انتهای پره‌ی یک پنکه

***

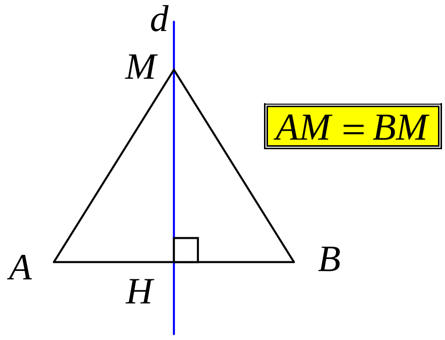
معرفی چند مکان هندسی مهم

۱ : دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت (مرکز) به یک فاصله‌ی ثابت (شعاع) باشند.

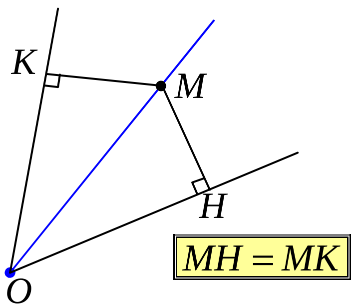


$\boxed{OM = R}$

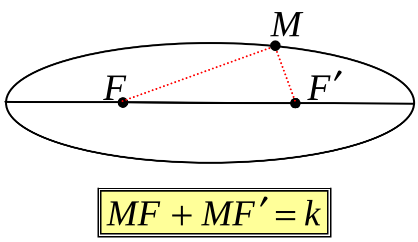
۲ : عمود منصف پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشند.



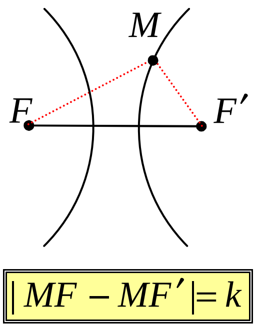
۳ : نیمساز زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشند.



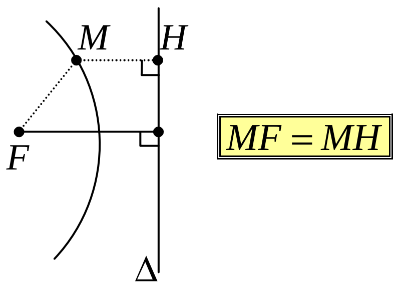
۴ : بیضی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه‌ی ثابت (کانون) به یک اندازه باشد.



۵ : هذلولی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق تفاضل فاصله های آنها از دو نقطه‌ی ثابت (کانون) به یک اندازه باشد.

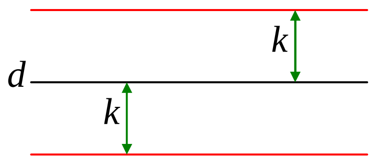


۶ : سهمی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت (کانون) و از یک خط ثابت (خط هادی) به یک فاصله باشند.



مثال : مکان هندسی نقاطی از صفحه را بنویسید که از خط d به فاصله‌ی ثابت k باشند.

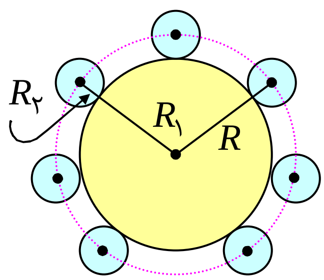
حل : مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ثابت k باشند. دو خط موازی d به فاصله‌ی k از آن و در دو طرف آن است.



مثال : در هر مورد مکان هندسی مورد نظر را حدس زده[2] و در صورت لزوم شکل مربوطه را رسم کنید.

۱ : مکان هندسی مرکز های دایره هایی به شعاع مساوی را پیدا کنید که در خارج یک دایره مماس بر آن باشند.

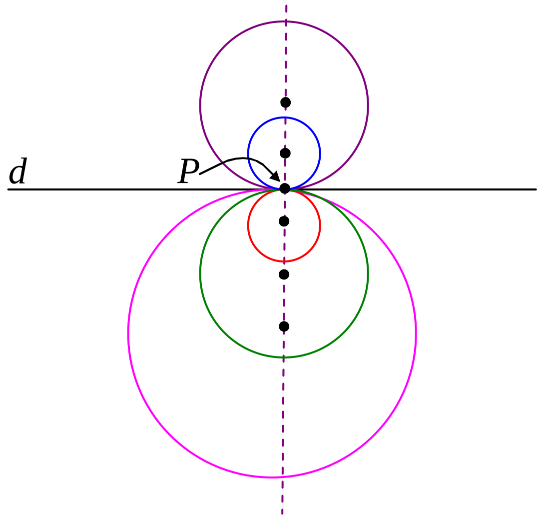
حل: مکان هندسی دایره ای هم مرکز با دایره‌ی ثابت و به شعاع مجموع شعاع های دو دایره است.



$$R = R_1 + R_2$$

۲ : مکان هندسی مرکز دایره هایی از صفحه را پیدا کنید که در یک نقطه‌ی مشخص مانند P بر یک خط داده شده مانند d مماس باشند.

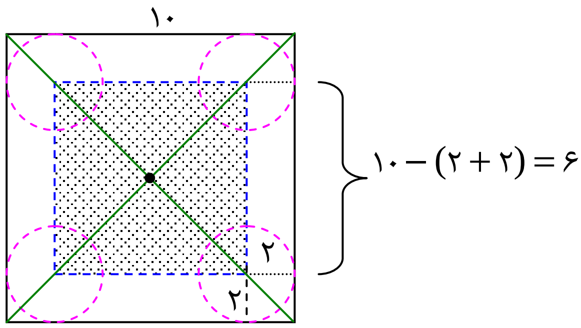
حل: مکان هندسی خطی است که بر خط داده شده در نقطه‌ی P عمود می باشد.



2 . اثبات لازم نیست.

مثال : سکه ای به شعاع ۲ سانتی متر را بر روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتی متر پرتاب می کنیم. مکان هندسی نقطه ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می شود.

حل : واضح است که کناری ترین سکه هایی که کاملاً درون مربع قرار می گیرند، بر اضلاع آن مماس می باشند، لذا مکان هندسی مربعی به ضلع $۱۰-۲(۲)=۶$ سانتی متر به شرط اینکه محل تقاطع قطرهای هر دو مربع(مرکز) منطبق باشند.



تمرین برای حل :

۴ : مکان هندسی هر یک از نقاط زیر را مشخص کنید.

الف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع b و a به یک فاصله باشد.

ب : مکان هندسی مرکز دایره هایی به شعاع ۳ سانتی متر از صفحه که فاصله‌ی مرکز هر یک آنها تا خط d برابر ۵ سانتی متر باشند.

ج : مکان هندسی نقاطی از فضا که از یک نقطه‌ی ثابت P به فاصله‌ی R باشد.

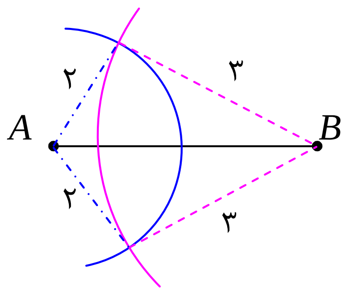
۵ : دایره ای طوری رسم شده است که هر ضلع زاویه ای را در دو نقطه قطع کرده است. تعیین کنید که چند نقطه از دایره وجود دارد که فاصله‌ی هر یک تا دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد. چرا؟

***

کاربرد مکان هندسی

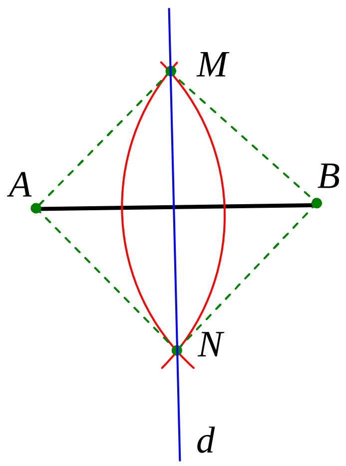
یکی از مهمترین کاربردهای مفهوم مکان هندسی، ترسیم های هندسی و یافتن نقطه یا نقاطی است که دارای ویژگی معینی باشند.

مثال : پاره خط AB به طول ۴ سانتی متر داده شده است. روی صفحه نقطه یا نقاطی را پیدا کنید که از A به فاصله‌ی ۲ و از B به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد.



حل : مرکز A کمانی به شعاع۲ و از B کمانی به شعاع ۳ سانتی متر رسم می کنیم. نقاط واقع روی کمان اوّل دارای یک ویژگی است و آن هم اینکه فاصله‌ی هر یک تا نقطه‌ی A به فاصله‌ی۲ سانتی متر می باشند. نقاط واقع روی کمان دوّم دارای یک ویژگی است و آن هم اینکه فاصله‌ی هر یک تا نقطه‌ی B به فاصله‌ی۳ سانتی متر می باشند. نقاط مشترک واقع بر هر دو کمان دارای هر دو ویژگی می باشند و لذا جواب مسئله هستند.

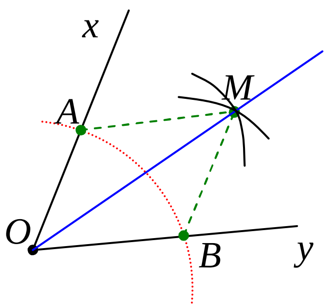
مثال : برای رسم عمود منصف یک پاره خط از این ویژگی استفاده می کنیم که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس. لذا برای رسم عمود منصف پاره خط AB به شکل زیر عمل می کنیم.



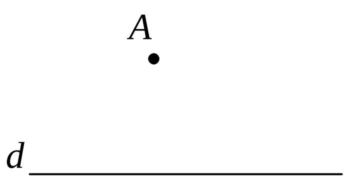
ابتدا پرگار را به اندازه ای باز می کنیم که شعاع آن از نصف طول پاره خط بیشتر باشد، سپس از دو سر پاره خط AB دو کمان با شعاع های مساوی رسم کرده تا این دو کمان همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند. چون دو نقطه‌ی M و N از دو سر پاره خط AB به یک فاصله اند. پس روی عمود منصف AB قرار دارند. وچون از هر دو نقطه‌ی متمایز فقط یک خط راست می گذرد، لذا خط گذرا از این دو نقطه یعنی d عمود منصف AB است.

مثال : برای رسم **نیمساز زاویه** از این ویژگی استفاده می کنیم که هر نقطه روی نیمساز یک پاره خط از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس. لذا برای رسم نیمساز زاویه‌ی xOy به شکل زیر عمل می کنیم.

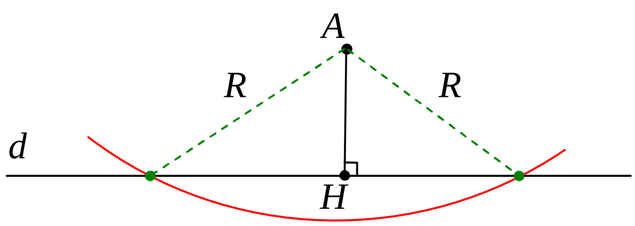
از رأس زاویه‌ی xOy یک کمان را طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند. اکنون از نقاط A و B دو کمان با شعاع مساوی رسم می کنیم که همدیگر را در نقطه ای مانند M قطع کنند.چون دو مثلث OAM و OBM به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند. لذا $\angle AOM = \angle BOM$ یعنی OM نیمساز زاویه‌ی xOy می باشد و جواب مسئله است.



مثال: خط d و نقطه‌ی A غیر واقع بر آن داده شده اند. نقطه ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به یک فاصله‌ی معلوم R باشد. با توجه به اندازه‌ی R روی تعداد جواب مسئله بحث کنید.



حل: به مرکز A کمانی به شعاع R رسم می کنیم. نقاط برخورد این کمان و خط d جواب مسئله است.



اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط d برابر AH باشد. در این صورت

الف: اگر $AH < R$ مسئله دو جواب دارد.

ب: اگر $AH = R$ مسئله یک جواب دارد.

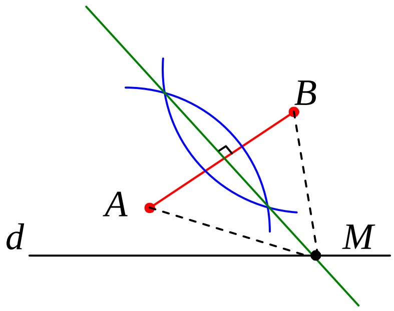
ج: اگر $AH > R$ مسئله جواب ندارد.

توجه : اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشند. در این صورت مجموعه‌ی نقاط $S_1 \cap S_2$ مجموعه‌ی نقاطی است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند. بنابراین برای

یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقطه یا نقاط بر خورد آنها را به دست آورد.

مثال : دو نقطه‌ی B و A و خط d که شامل هیچ یک نیست، در یک صفحه واقعند. نقطه ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی B و A به یک فاصله باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ بحث کنید.

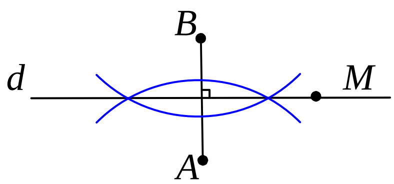
حل: عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم. نقاط برخورد این عمود منصف با خط d جواب مسئله است.



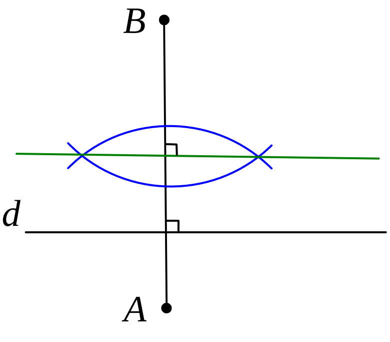
حال حالت های زیر وجود دارد.

الف: اگر $AB \perp d$ نباشد. مسئله یک جواب دارد.

ب: اگر $AB \perp d$ باشد و d از نقطه‌ی وسط AB بگذرد، مسئله بیشمارجواب دارد.

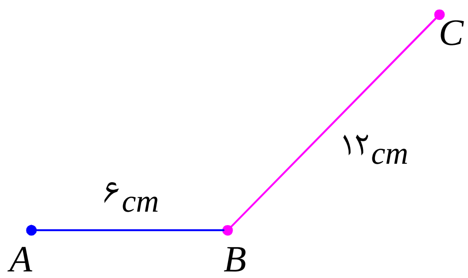


ج: اگر $AB \perp d$ باشد و d از نقطه‌ی وسط AB نگذرد، مسئله جواب ندارد.

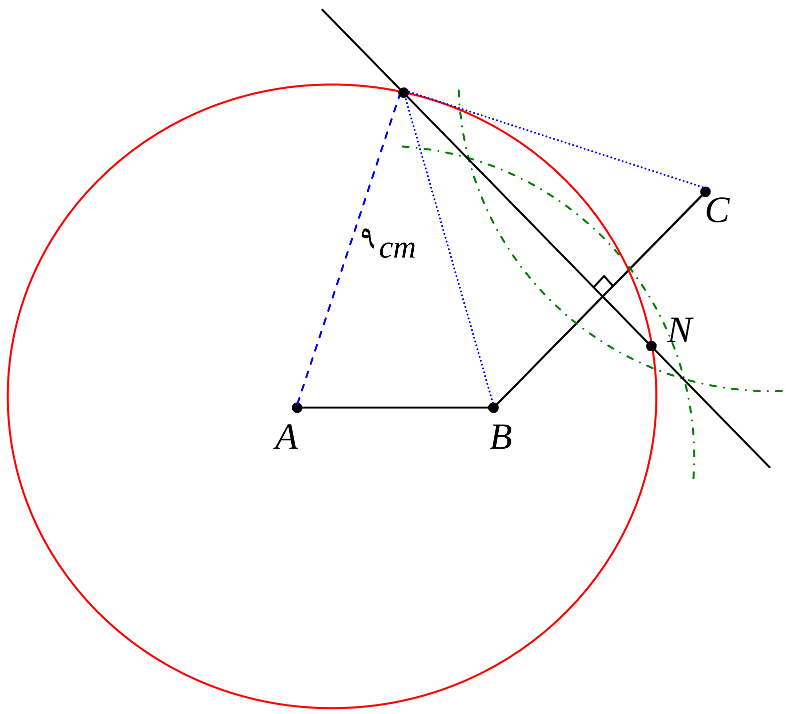


***

مثال : با توجه به شکل زیر نقطه ای در صفحه بیابید که از نقاط B و C به یک فاصله بوده و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۹ سانتی متر باشد. (در مورد تعداد جواب های مسئله بحث کنید.)



حل : ابتدا عمود منصف پاره خط BC را رسم کرده و سپس به مرکز نقطه‌ی A دایره ای به شعاع ۹ سانتی متر ترسیم می کنیم. محل برخورد عمود منصف پاره خط BC با دایره جواب مسئله است.



در صورتی که اندازه های داده شده در این مسئله متغیر باشند. یکی از حالت های زیر ممکن است پیش بیاید.

اگر دایره ، عمود منصف پاره خط BC را در دو نقطه قطع کند مسئله دو جواب دارد.

اگر دایره بر عمود منصف پاره خط BC مماس باشد، مسئله یک جواب دارد.

اگر دایره ، عمود منصف پاره خط BC را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.

***

تمرین برای حل :

۶ : دو نقطه‌ی B و A و خط d که شامل هیچ یک نیست، در صفحه داده شده اند. نقطه ای پیدا کنید که از نقاط B و A به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشند.

۷ : چهار نقطه‌ی D و C و B و A روی صفحه داده شده اند. نقطه ای پیدا کنید که از دو نقطه‌ی B و A به یک فاصله و از دو نقطه‌ی D و C نیز به یک فاصله باشند. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ روی حالت های مختلف پاره خط های AB و CD بحث کنید.

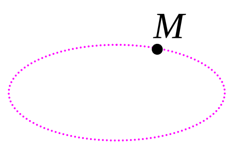
۸ : نقاط C و B و A روی صفحه داده شده اند. نقطه ای پیدا کنید که از دو نقطه‌ی B و A به یک فاصله و از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ روی حالت های مختلف آن بحث کنید.

۹ : نقطه‌ی A و خط d در صفحه داده شده اند. نقطه ای پیدا کنید که از نقطه A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر و از d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ روی حالت های مختلف آن بحث کنید.

***

بررسی تحلیلی مکان هندسی

هرگاه مختصات نقطه ای به یک پارامتر بستگی داشته باشد، با تغییر این پارامتر، جای نقطه در صفحه تغییر می کند و بدین شکل مجموعه ای از نقاط در صفحه، بدست می آید. اگر این نقاط را در صفحه‌ی مختصات، مشخص کنیم، شکل حاصل را **مکان هندسی** آن نقطه می نامند.



به طور کلی می توان مکان هندسی را به صورت زیر تعریف کرد.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که دارای خاصیت یکسانی باشند.

نتیجه: دایره، بیضی، هذلولی و سهمی نمونه هایی از مکان هندسی در صفحه هستند.

معادله‌ی مکان هندسی

منظور از معادله‌ی مکان هندسی یک نقطه، رابطه ای بین طول و عرض آن نقطه است که به پارامتر بستگی نداشته باشد.

مثال: مکان هندسی نقطه‌ی $A(m+۱,۲m-۵)$ وقتی که m تغییر می کند را بنویسید.

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} x = m + ۱ \to m = x - ۱ \\ y = ۲m - ۵ \to m = \dfrac{y + ۵}{۲} \end{cases} \to \frac{y + ۵}{۲} = x - ۱ \to y = ۲x - ۷$$

لذا مکان هندسی ، یک خط راست است.

مثال : معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی $B(۱ + \sin\alpha , ۲ + \cos\alpha)$ وقتی که α تغییر می کند را بنویسید.

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} x = ۱ + \sin\alpha \to \sin\alpha = x - ۱ \to \sin^۲\alpha = (x - ۱)^۲ \\ y = ۲ + \cos\alpha \to \cos\alpha = y - ۲ \to \cos^۲\alpha = (y - ۲)^۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = (x - ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ \to (x - ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۱$$

مثال : معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی $C(۱ + ۴\sin\theta , -۲ + ۳\cos\theta)$ وقتی که θ تغییر می کند را بنویسید.

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} x = ۱ + ۴\sin\theta \to \sin\theta = \dfrac{x - ۱}{۴} \to \sin^۲\theta = \dfrac{(x - ۱)^۲}{۱۶} \\ y = -۲ + ۳\cos\theta \to \cos\theta = \dfrac{y + ۲}{۳} \to \cos^۲\theta = \dfrac{(y + ۲)^۲}{۹} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = \frac{(x - ۱)^۲}{۱۶} + \frac{(y + ۲)^۲}{۹} \to \frac{(x - ۱)^۲}{۱۶} + \frac{(y + ۲)^۲}{۹} = ۱$$

تمرین برای حل :

۱۰ : معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی $A(m + ۱ , ۲m - ۵)$ وقتی که m تغییر می کند را بنویسید.

۱۱ : معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی $B(۲\sin t , ۳\cos t)$ وقتی که t تغییر می کند را بنویسید.

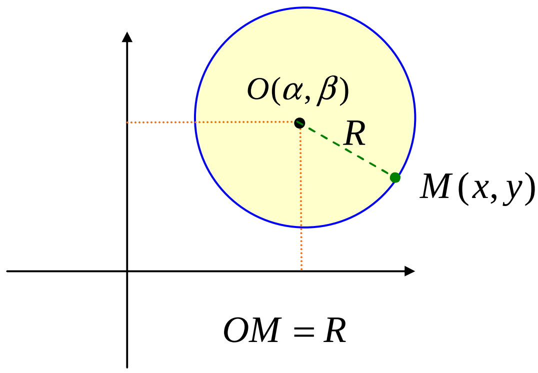
***

درس دوّم : دایره

در این درس معروف ترین مقاطع مخروطی ، یعنی دایره را تعریف می کنیم و در ادامه ویژگی های آن را به صورت تحلیلی بررسی می کنیم.

معادله‌ی دایره

دایره مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله‌ی ثابتی باشند. نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره و فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره می گویند.



$$OM = R$$

اگر $M(x,y)$ نقطه‌ی دلخواهی از دایره باشد در این صورت:

$$OM = R \to OM^{۲} = R^{۲}$$
$$\to (x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲}$$

که در آن $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز و R اندازه‌ی شعاع دایره است.

معادله‌ی استاندارد دایره	$(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲}$

نتیجه : در حالت خاص اگر مرکز دایره روی مبدأ مختصات باشد، معادله‌ی دایره به شکل زیر خواهد آمد.

$$x^{۲} + y^{۲} = R^{۲}$$

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $(۳,-۲)$ مرکز و اندازه‌ی شعاع آن ۴ باشد.

حل :

$$(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲} \to (x-۳)^{۲} + (y+۲)^{۲} = (۴)^{۲}$$

$$\to (x-۳)^{۲} + (y+۲)^{۲} = ۱۶$$

مثال : مختصات نقاط برخورد دایره‌ی مثال قبل را محور های مختصات را به دست آورید.

حل : برای تعیین نقاط برخورد دایره با محور های مختصات، کافی است، در معادله‌ی دایره، یک بار مقدار x و یک بار مقدار y را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} x=۰ \\ (x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱۶ \end{cases} \rightarrow (۰-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱۶ \rightarrow (y+۲)^۲=۷$$

$$\rightarrow y+۲=\pm\sqrt{۷} \rightarrow y=-۲\pm\sqrt{۷}$$

پس نقاط برخورد نمودار تابع با محور عرضها به شکل زیر است.

$$A(۰,-۲+\sqrt{۷}) \quad \text{و} \quad B(۰,-۲-\sqrt{۷})$$

$$\begin{cases} y=۰ \\ (x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱۶ \end{cases} \rightarrow (x-۳)^۲+(۰+۲)^۲=۱۶ \rightarrow (x-۳)^۲=۱۲$$

$$\rightarrow x-۳=\pm۲\sqrt{۳} \rightarrow x=۳\pm۲\sqrt{۳}$$

پس نقاط برخورد نمودار تابع با محور طولها به شکل زیر است.

$$C(۳+۲\sqrt{۳},۰) \quad \text{و} \quad D(۳-۲\sqrt{۳},۰)$$

توجه :

۱ : اگر معادله‌ی بدست آمده از جایگزینی صفر به جای x در معادله‌ی دایره، دارای یک ریشه باشد، دایره بر محور عرضها مماس است و اگر ریشه نداشته باشد، دایره محور عرض ها را قطع نمی کند.

۲ : اگر معادله‌ی بدست آمده از جایگزینی صفر به جای y در معادله‌ی دایره، دارای یک ریشه باشد، دایره بر محور طولها مماس است و اگر ریشه نداشته باشد، دایره محور طولها را قطع نمی کند.

تمرین برای حل :

۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $(-۱,-۲)$ مرکز و اندازه‌ی شعاع آن ۳ باشد.

۲ : در تمرین قبل مختصات نقطه‌ی برخورد نمودار دایره با محورهای مختصات را به دست آورید.

۳ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات باشد و شعاع آن برابر $\sqrt{۳}$ باشد.

۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,۰)$ و از نقطه‌ی $(-۲,۱)$ بگذرد.

۵ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-۲,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y-۳=۰$ مماس باشد.

۶ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقاط $A(-۶,۳)$ و $B(۲,۵)$ دو سر قطری از آن باشند.

***

معادله‌ی گسترده‌ی دایره

معادله‌ی دایره را می توان به شکل زیر نوشت.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

این صورت از معادله‌ی دایره را معادله‌ی گسترده یا معادله‌ی ضمنی دایره می نامند.

توجه داشته باشید که اگر معادله ای $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ به شکل معلوم باشد. این معادله به شرطی معادله‌ی دایره است که

الف) ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر یک باشند.(یا مساوی باشند.)

ب) معادله شامل جمله‌ی xy نباشد.

ج) مقدار $\Delta=a^۲+b^۲-۴c$ مثبت باشد.

با این شرایط معادله‌ی گسترده‌ی دایره به معادله‌ی استاندارد تبدیل می شود.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰\to(x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴})+(y^۲+by+\frac{b^۲}{۴})-\frac{a^۲}{۴}-\frac{b^۲}{۴}+c=۰$$

$$\to(x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

$$\to(x-(-\frac{a}{۲}))^۲+(y-(-\frac{b}{۲}))^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

با توجه به معادله‌ی بدست آمده داریم:

مختصات مرکز دایره $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$

اندازه‌ی شعاع دایره $R=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

مثال: معادله‌ی زیر داده شده است.

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x-۶y-۱۵=۰$$

الف) نشان دهید که این معادله، معادله‌ی یک دایره است.

ب) مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع آن را بدست آورید. (به دو روش حل کنید.)

ج) نمودار دایره را رسم کنید.

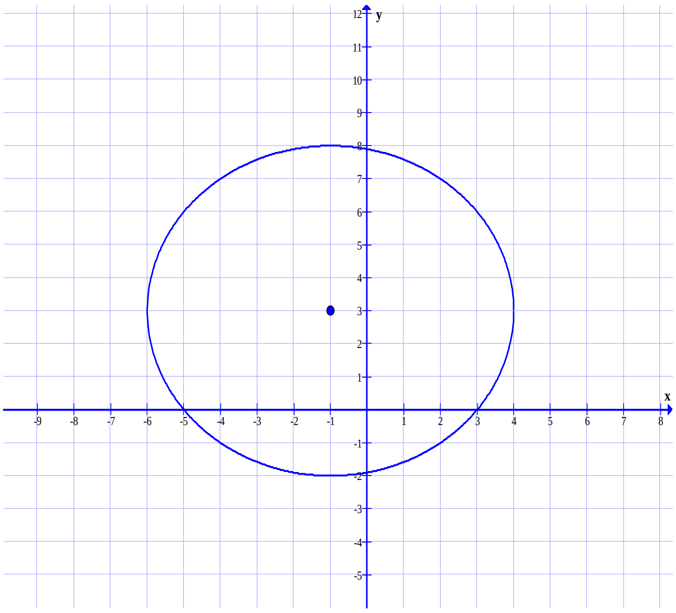
حل :

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x-۶y-۱۵=۰$$

$$\rightarrow x^{۲}+۲x+۱+y^{۲}-۶y+۹=۱۵+۱+۹\rightarrow (x+۱)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۲۵$$

و این معادله‌ی یک دایره است و $O(-۱,۳)$ مختصات مرکز و $R=\sqrt{۲۵}=۵$ اندازه‌ی شعاع آن است.

برای رسم نمودار دایره کافی است به مرکز $O(-۱,۳)$ دایره ای به شعاع $R=۵$ را رسم شود.



توجه داشته باشید که می توان مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را به کمک فرمول های زیر نیز تعیین کرد.

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})\rightarrow O(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۶}{۲})\rightarrow O(-۱,۳)$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲)^{۲}+(-۶)^{۲}-۴(-۱۵)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶+۶۰}=۵$$

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(1,0)$ و $B(3,-2)$ و $C(-1,-2)$ بگذرد.

حل : روش اوّل : فرض می کنیم که مختصات مرکز دایره به صورت (α,β) باشد.

در این صورت واضح است که $OA=OB=OC=R$. لذا می توان نوشت:

$$OA=OB \to OA^2=OB^2 \to (1-\alpha)^2+(0-\beta)^2=(3-\alpha)^2+(-2-\beta)^2$$

$$\to 1-2\alpha+\alpha^2+\beta^2=9-6\alpha+\alpha^2+4+4\beta+\beta^2 \to \alpha-\beta=3 \quad (1)$$

$$OA=OC \to OA^2=OC^2 \to (1-\alpha)^2+(0-\beta)^2=(-1-\alpha)^2+(-2-\beta)^2$$

$$\to 1-2\alpha+\alpha^2+\beta^2=1+2\alpha+\alpha^2+4+4\beta+\beta^2 \to \alpha+\beta=-1 \quad (2)$$

$$(1),(2) \to \begin{cases} \alpha-\beta=3 \\ \alpha+\beta=-1 \end{cases} \to \alpha=1 \ , \ \beta=-2$$

با این اطلاعات می توان شعاع دایره را نیز به دست آورد.

$$R=OA \to R=\sqrt{(1-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{0+4}=2$$

اکنون معادله‌ی دایره را به صورت زیر می نویسیم.

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4$$

روش دوّم : فرض کنیم که معادله‌ی دایره بصورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد. پس:

$$A(1,0)\xrightarrow{x^2+y^2+ax+by+c=0} 1+0+a+0+c=0 \to a+c=-1$$

$$B(3,-2)\xrightarrow{x^2+y^2+ax+by+c=0} 9+4+3a-2b+c=0 \to 3a-2b+c=-13$$

$$C(-1,-2)\xrightarrow{x^2+y^2+ax+by+c=0} 1+4-a-2b+c=0 \to -a-2b+c=-5$$

$$\begin{cases} 3a-2b+c=-13 \\ -a-2b+c=-5 \end{cases} \xrightarrow{a+c=-1} \begin{cases} 3a-2b+(-1-a)=-13 \\ -a-2b+(-1-a)=-5 \end{cases} \to \begin{cases} a-b=-6 \\ -a-b=-2 \end{cases}$$

$$\to a=-2 \ , \ b=4 \ , \ c=1$$

لذا :

معادله‌ی دایره $\quad x^2+y^2+ax+by+c=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y+1=0$

روش سوّم : ابتدا معادلات عمود منصف های دو پاره خط AB و BC را تعیین کرده و محل تلاقی آنها را بدست آوریم. بدین ترتیب مختصات مرکز دایره بدست می آید. با تعیین فاصله‌ی مرکز تا هر یک از نقاط داده شده، اندازه‌ی شعاع معلوم می شود. با معلوم بودن مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع به راحتی معادله‌ی دایره را می توان نوشت.

$$B(۳,-۲) \text{ و } A(۱,۰) \xrightarrow{M(۲,-۱),\ m=\frac{۰+۲}{۱-۳}=-۱} y=۱(x-۲)+(-۱) \to y=x-۳$$

$$C(-۱,-۲) \text{ و } B(۳,-۲) \xrightarrow{N(۱,-۲),\ m=\frac{-۲+۲}{-۱-۳}=۰} y=-۲$$

$$\to \begin{cases} y=x-۳ \\ y=-۲ \end{cases} \to x=۱ \to O(۱,-۲) \qquad \text{مختصات مرکز}$$

$$OA=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۰+۲)^۲}=\sqrt{۰+۴}=۲ \qquad \text{اندازه‌ی شعاع}$$

$$(x-۱)^۲+(x+۲)^۲=(۲)^۲ \to (x-۱)^۲+(x+۲)^۲=۴ \qquad \text{معادله‌ی دایره}$$

***

تمرین برای حل :

۷ : مختصات مرکز و طول شعاع دایره ای به معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$$

۸ : کدام یک از روابط زیر معادله‌ی یک دایره است؟

الف) $x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰$

ب) $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰$

ج) $۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰$

۹ : با توجه به تمرین قبل مختصات مرکز طول شعاع دایره ها را بدست آورید و سپس نمودار دایره را رسم کنید.

۱۰ : حدود m را طوری به دست آورید که معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۵y + m = ۰$ بتواند یک دایره باشد.

۱۱ : معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y = k$ در صورتی می تواند معادله‌ی یک دایره باشد که:

۱) $k > -۲$ ۲) $k = -۲$ ۳) $k < -۲$ ۴) $k \geq -۲$

۱۲ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x + y = ۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

۱۳ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x + y = ۱$ وتری به طول ۲ جدا کند.

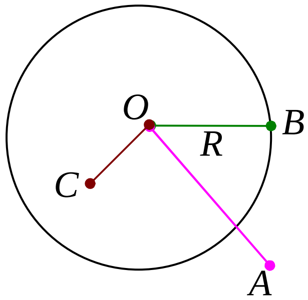
۱۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x + ۳y = ۶$ بر آن مماس باشد.

۱۵ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و خط $y = ۲x - ۱$ شامل قطری از آن باشد.

***

روش تعیین وضعیت یک نقطه و یک دایره

می دانیم که وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره می تواند یکی از حالت های زیر باشد.



الف : نقاط خارج دایره : فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع بزرگتر است و برعکس. ($OA > R$)

ب : نقاط روی دایره : فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره برابر شعاع است و برعکس. ($OB = R$)

ج : نقاط داخل دایره : فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر است و برعکس . ($OC < R$)

برای تعیین وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره، ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را تعیین نموده و به دنبال آن فاصله این نقطه تا مرکز دایره را بدست آورده و با شعاع دایره مقایسه می کنیم.

تمرین۱۶ : وضعیت هر یک از نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۵ = ۰$ تعیین کنید.

حل :

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۵ = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} O(۱,-۲) \\ R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + (۴)^۲ - ۴(-۵)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۱۶ + ۲۰} = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۱۰} = \sqrt{۱۰} \end{cases}$$

$$AO = \sqrt{(۱+۱)^۲ + (-۲+۱)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

و چون $AO < R$ پس نقطه‌ی A داخل دایره است. سایر نقاط را بررسی کنید.

توجه : اگر معادله‌ی دایره ای به شکل $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ معلوم باشد. برای تعیین وضعیت یک نقطه نسبت به این دایره، می توانید مختصات نقطه را در عبارت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c$ جایگزین کنید. با این اقدام سه حالت پیش می آید.

الف : عدد حاصل مثبت شود. این یعنی نقطه بیرون دایره است.

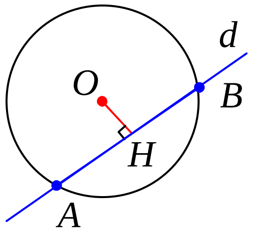
ب : عدد حاصل منفی شود. این یعنی نقطه داخل دایره است.

ج : عدد حاصل صفر شود. این یعنی نقطه روی دایره است.

***

روش تعیین وضع نسبی یک خط و یک دایره

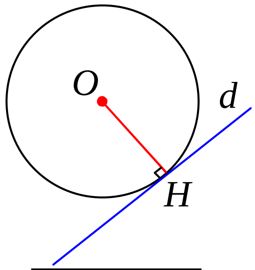
خط و دایره نسبت به هم دارای سه حالت زیر هستند.



$OH < R$

۱ . خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند. (متقاطع)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کمتر است و برعکس

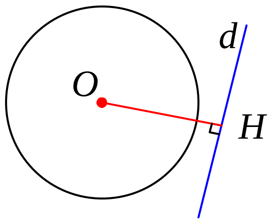


$OH = R$

۲ . خط و دایره یک نقطه‌ی مشترک دارند. (مماس)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است و برعکس

نتیجه: شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس بر آن دایره عمود است.



$OH > R$

۳ . خط و دایره هیچ نقطه‌ی مشترک ندارند.

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیشتر است و برعکس

برای تعیین وضعیت نسبی یک خط و یک دایره با معادلات معلوم ، دو روش وجود دارد.

روش اوَل : معادله‌ی خط را بر حسب یک متغیر مانند x نوشته و در معادله‌ی دایره جایگزین می کنیم. سپس معادله‌ی درجه‌ی دوَم بدست آمده را حل می کنیم. در انتها یا ریشه های بدست آمده را در معادله‌ی خط جایگزین کرده تا مختصات نقاط تقاطع خط و دایره بدست آید.

توجه کنید که تعداد ریشه های معادله‌ی درجه‌ی دوَم تشکیل شده برابر تعداد نقاط تقاطع خط و دایره است.

روش دوَم : معادله‌ی دایره را به صورت استاندارد نوشته و مختصات مرکز و طول شعاع آن را تعیین می کنیم. سپس فاصله‌ی مرکز را تا خط داده شده بدست می آوریم. با توجه به این فاصله و اندازه‌ی شعاع ، وضعیت خط و دایره مشخص می شود.

توجه : اگر $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز دایره باشد. فاصله‌ی مرکز دایره تا خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ بدین شکل بدست می آید.

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: وضعیت خط به معادله‌ی $x+y=4$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2x-3y-3=0$ را تعیین کنید.

حل :

روش اوّل :

$$x+y=4 \rightarrow y=4-x$$

$$x^2+y^2-2x-3y-3=0 \rightarrow x^2+(4-x)^2-2x-3(4-x)-3=0$$

$$\rightarrow x^2+16-8x+x^2-2x-12+3x-3=0 \rightarrow 2x^2-7x+1=0$$

$\xrightarrow{\Delta=49-4(2)(1)=41}$ خط و دایره دو نقطه‌ی برخورد دارند.

روش دوّم :

$$x^2+y^2-2x-3y-3=0 \rightarrow \begin{cases} O(1,\frac{3}{2}) \\ R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-3)^2-4(-3)}=\frac{5}{2} \end{cases}$$

اکنون فاصله‌ی مرکز دایره تا خط $x+y=4$ را تعیین می کنیم.

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1(1)+1(\frac{3}{2})-4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

و چون $R>d$ پس خط و دایره، دو نقطه‌ی تقاطع دارند.

تمرین برای حل :

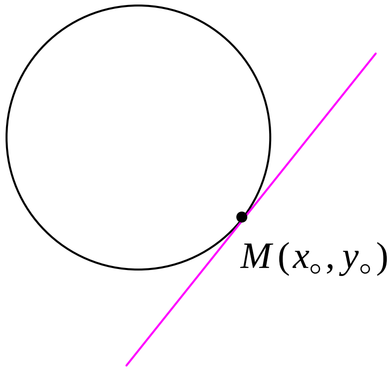
۱۷ : وضعیت هر یک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $3x+4y=0$ و $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

ب) $x+y=2$ و $x^2+y^2=2$

ج) $x+y=1$ و $x^2+y^2-2x-2y=2$

روش تعیین معادله‌ی خط مماس بر دایره از یک نقطه‌ی روی آن



برای تعیین معادله‌ی خط مماس بر دایره به معادله‌ی

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

در نقطه‌ی $M(x_\circ, y_\circ)$ واقع بر روی دایره از فرمول زیر استفاده می کنیم. بدیهی است که این فرمول از معادله‌ی استاندارد دایره و شیب شعاع گذرا از نقطه‌ی تماس بدست می آید[1].

$$(x_\circ-\alpha)(x-\alpha)+(y_\circ-\beta)(y-\beta)=R^۲$$

مثال : معادله‌ی خط مماس بر دایره به معادله‌ی زیر از نقطه‌ی $A(۶,۱)$ را بنویسید.

$$x^۲+y^۲-۶x+۸y=۹$$

حل : ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می کنیم.

$$x^۲+y^۲-۶x+۸y=۹ \rightarrow x^۲-۶x+۹+y^۲+۸y+۱۶=۹+۹+۱۶$$

$$\rightarrow (x-۳)^۲+(y+۴)^۲=۳۴$$

$\rightarrow O(۳,-۴)$ مرکز دایره $R=\sqrt{۳۴}$ اندازه‌ی شعاع دایره

از طرفی چون مختصات نقطه در دایره صدق می کند، پس نقطه روی دایره است.

$$(x-۳)^۲+(y+۴)^۲=۳۴ \xrightarrow{A(۶,۱)} (۶-۳)^۲+(۱+۴)^۲=۳۴ \rightarrow ۹+۲۵=۳۴$$

با این وضعیت، معادله‌ی خط مماس را می توان به یکی از روش های زیر به دست آورد.

روش اول : شیب خط گذرا (قطر) از نقاط A و O (مرکز دایره) را تعیین و عکس و قرینه می کنیم تا شیب خط مماس بدست آید (چرا؟). سپس معادله‌ی خط مماس را می نویسیم.

$$m_{AO}=\frac{-۴-۱}{۳-۶}=\frac{-۵}{-۳}=\frac{۵}{۳}$$

معادله‌ی خط مماس

$$y=m(x-x_\circ)+y_\circ$$

[1] . شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. پس شیب های آنها عکس و قرینه ی یکدیگرند.

$$y=(\frac{-۳}{۵})(x-۶)+۱ \rightarrow y=\frac{-۳}{۵}x+\frac{۱۸}{۵}+۱ \rightarrow y=\frac{-۳}{۵}x+\frac{۲۳}{۵} \rightarrow ۳x+۵y=۲۳$$

روش دوّم : می توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد. این فرمول به همان روش قبل قابل اثبات است.

$$(x_{\circ}-\alpha)(x-\alpha)+(y_{\circ}-\beta)(y-\beta)=R^{۲}$$

$$\rightarrow (۶-۳)(x-۳)+(۱+۴)(y+۴)=۳۴$$

$$\rightarrow ۳x-۹+۵y+۲۰=۳۴ \rightarrow ۳x+۵y=۲۳$$

تمرین برای حل :

۱۸ : نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۱,۳)$ رئوس مثلث ABC هستند.

الف: معادله‌ی دایره‌ی محیطی مثلث را بنویسید.

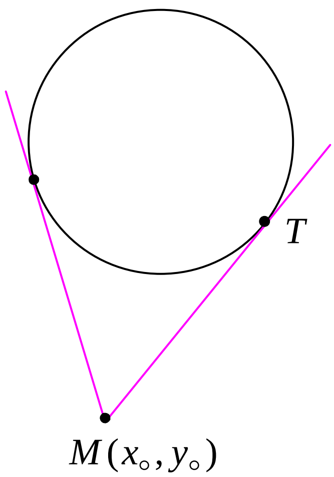
ب : معادله‌ی خط مماس بر این دایره را در رأس به دست آورید.

۱۹ : از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

***

روش تعیین اندازه‌ی پاره خط محصور بین یک نقطه‌ی بیرون دایره و نقطه‌ی تماس

از یک نقطه‌ی بیرون دایره دو خط مماس بر دایره رسم می شود. اندازه‌ی پاره خط هایی از این دو خط مماس محصور بین این نقطه و نقطه‌ی تماس با یکدیگر برابر است. این اندازه به شکل زیر بدست می آید.



$$\boxed{MT=\sqrt{(x_{\circ}-\alpha)^{۲}+(y_{\circ}-\beta)^{۲}-R^{۲}}}$$

تمرین۲۰: اندازه‌ی خط مماسی که از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ بر دایره به معادله‌ی زیر رسم می شود را بیابید.

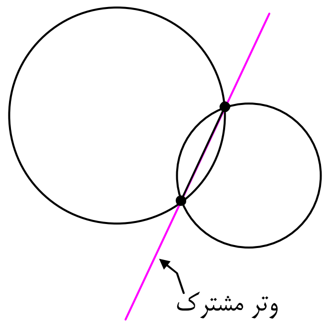
$$(x+۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۲$$

روش تعیین وتر مشترک دو دایره ی متقاطع

وتر مشترک دو دایره خطی است که از محل تقاطع دو دایره بگذرد. برای تعیین معادله‌ی این خط، معادلات دو دایره در حالت گسترده را نظیر به نظیر از هم کم می کنیم[2]. در این صورت داریم:

معادله‌ی دایره‌ی اوّل $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$

معادله‌ی دایره‌ی دوّم $x^۲+y^۲+a'x+b'y+c'=۰$



$$\rightarrow (x^۲+y^۲+ax+by+c)-(x^۲+y^۲+a'x+b'y+c')=۰$$

$$\Rightarrow (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=۰$$

لذا معادله‌ی وتر مشترک به شکل زیر در خواهد آمد.

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=۰$$

مثال : معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به معادلات زیر را بدست آورید.

$$x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰ \quad \text{و} \quad x^۲+y^۲-۴x-۶y=۱۴$$

حل :

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰ \\ x^۲+y^۲-۴x-۶y=۱۴ \end{cases} \rightarrow (۶+۴)x+(۸+۶)y=(۰-۱۴) \rightarrow ۱۰x+۱۴y=-۱۴$$

$$\xrightarrow{\div ۲} ۵x+۷y=-۷$$ معادله‌ی وتر مشترک

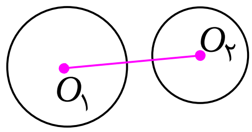
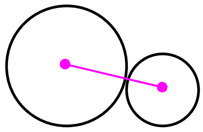
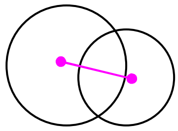
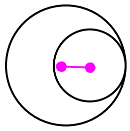
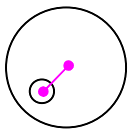
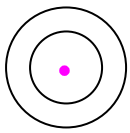
***

[2] . دلیل این کار این است که پس از تشکیل دستگاه و تعیین نقاط تقاطع دو دایره، معادله‌ی خط گذرا از نقاط تقاطع را می نویسیم.

روش تعیین وضع دو دایره نسبت به هم

دو دایره نسبت به هم حالت های متفاوتی دارند. برای تعیین وضع نسبی دو دایره، اندازه‌ی شعاع های آنها را با اندازه‌ی خط المرکزین مقایسه کنید. خط المرکزین پاره خطی است که مرکز های دو دایره را به هم وصل می کند.

اگر دایره‌ی C_1 به مرکز O_1 و شعاع R_1 و دایره‌ی C_2 به مرکز O_2 و شعاع R_2 و طول خط المرکزین دو دایره $d = O_1O_2$ باشد. با فرض اینکه $R_1 > R_2$ به کمک جدول زیر می توان حالت های مختلف دو دایره را تعیین کرد.

ردیف	حالت	رابطه	شکل نمونه
۱	دو دایره بیرون یکدیگرند.(متخارج)	$d > R_1 + R_2$	
۲	دو دایره مماس بیرونی اند.	$d = R_1 + R_2$	
۳	دو دایره متقاطع اند.	$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	
۴	دو دایره مماس درونی اند.	$d = R_1 - R_2$	
۵	دو دایره درون یکدیگرند.(متداخل)	$d < R_1 - R_2$	
۶	دو دایره هم مرکزند.	$d = 0$	

مجدداً تأکید می شود که برای تشخیص وضعیت دو دایره، ابتدا مختصات مرکز و شعاع های دو دایره‌ی داده شده را بدست می آوریم. در ادامه طول خط المرکزین را تعیین و با مجموع اندازه های دو شعاع مقایسه می کنیم.

مثال : وضع نسبی دو دایره به معادلات زیر را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۵ = ۰ \\ (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴ \end{cases}$$

حل : ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع های دو دایره را تعیین می کنیم.

$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۵ = ۰ \rightarrow O_۱(-۳,۱) \quad , \quad R_۱ = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۲۰} = \sqrt{۵}$$

$$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴ \quad \rightarrow O_۲(۱,-۲) \quad , \quad R_۲ = ۲$$

اکنون اندازه‌ی خط المرکزین را بدست آورده و با اندازه‌ی شعاع ها (مجموع یا تفاضل) مقایسه می کنیم.

$$d = O_۱O_۲ = \sqrt{(۱+۳)^۲ + (-۲-۱)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

و چون $R_۱ + R_۲ < d$ پس دو دایره متخارج هستند.

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰$$

مماس بیرونی باشد.

حل : ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را تعیین و سپس اندازه‌ی خط المرکزین را محاسبه می کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰ \rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۲y + ۱ = ۲$$

$$\rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲ \rightarrow \begin{cases} O_۲(۱,-۱) \\ R_۲ = \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$d = O_۱O_۲ = \sqrt{(۱+۱)^۲ + (-۱-۱)^۲} = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$$ اندازه‌ی خط المرکزین

اکنون چون دو دایره مماس بیرونی هستند، پس طول خط المرکزین برابر مجموع دو شعاع است. یعنی

$$d = R_۱ + R_۲ \rightarrow ۲\sqrt{۲} = R_۱ + \sqrt{۲} \rightarrow R_۲ = \sqrt{۲}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله‌ی دایره‌ی مورد نظر به دست می آید.

$$(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$$

تمرین برای حل :

۲۱ : در هر مورد وضع نسبی دو دایره به معادلات داده شده را تعیین کنید.

الف) $\begin{cases}(x-۵)^{۲}+(y-۷)^{۲}=۱\\(x-۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱۶\end{cases}$

ب) $\begin{cases}x^{۲}+y^{۲}-۴x-۶y-۳=۰\\x^{۲}+y^{۲}-۱۰x-۱۴y+۷۳=۰\end{cases}$

پ) $\begin{cases}x^{۲}+y^{۲}-۲x=۱\\x^{۲}+y^{۲}=۱\end{cases}$

ت) $\begin{cases}x^{۲}+y^{۲}=۹\\x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y+۱=۰\end{cases}$

ث) $\begin{cases}x^{۲}+y^{۲}=۴\\x^{۲}+y^{۲}-۸x-۴y+۱۹=۰\end{cases}$

۲۲ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(۰,۱)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی

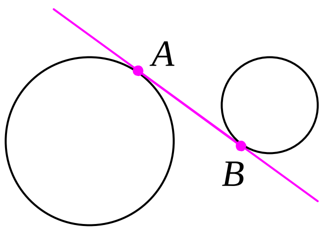
$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۶y=۳$$

مماس داخلی باشد.

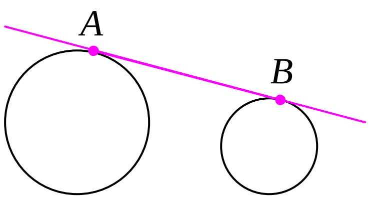
***

روش تعیین اندازه‌ی مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس است. با توجه به اینکه دایره ها در یک طرف یا هر دو طرف خط قرار دارند. خط مماس مشترک به دو نوع خارجی و داخلی تقسیم می شوند.



مماس مشترک داخلی



مماس مشترک خارجی

تعداد مماس های مشترک دو دایره با توجه به وضعیت نسبی آنها مطابق جدول زیر است.

وضع نسبی دو دایره	تعداد مماس مشترک خارجی	تعداد مماس مشترک داخلی
متخارج	۲	۲
مماس خارجی	۲	۱
متقاطع	۲	۰
مماس داخلی	۱	۰
متداخل	۰	۰

طول پاره خط محصور بین دو نقطه‌ی تماس به صورت زیر بدست می آید.

مماس مشترک خارجی $AB=\sqrt{d^{2}-(R_{1}-R_{2})^{2}}$

مماس مشترک داخلی $A'B'=\sqrt{d^{2}-(R_{1}+R_{2})^{2}}$

مثال : اندازه مماس مشترک داخلی و اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایـره‌ی زیـر را در صـورت وجـود تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^{2}+y^{2}+6x-2y+5=0 \\ (x-1)^{2}+(y+2)^{2}=4 \end{cases}$$

حل : ابتدا وضعیت دو دایره را با تعیین مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع ها به دست می آوریم.

$$x^{2}+y^{2}+6x-2y+5=0 \to O_{1}(-3,1)\ \ ,\ R_{1}=\frac{\sqrt{36+4-20}}{2}=\sqrt{5}$$

$$(x-1)^{2}+(y+2)^{2}=4 \to O_{2}(1,-2)\ \ ,\ R_{2}=2$$

اکنون اندازه‌ی خط المرکزین را تعیین کرده و با مجموع اندازه های دو شعاع مقایسه می کنیم.

$$d=O_{1}O_{2}=\sqrt{(1+3)^{2}+(-2-1)^{2}}=\sqrt{16+9}=5$$

$$\to d>R_{1}+R_{2}$$

لذا دو دایره متخارج هستند و دو خط مماس مشترک درونی و دو خط مماس مشترک بیرونی دارند و اندازه‌ی پاره خط های مماس مشترک به صورت زیر است.

مماس مشترک خارجی $AB=\sqrt{d^{2}-(R_{1}-R_{2})^{2}}=\sqrt{(5)^{2}-(\sqrt{5}-2)^{2}}$

$$=\sqrt{۲۵-۵+۴\sqrt{۵}-۴}=\sqrt{۱۶+۴\sqrt{۵}}=\sqrt{۴(۴+\sqrt{۵})}=۲\sqrt{۴+\sqrt{۵}}$$

مماس مشترک داخلی $A'B'=\sqrt{d^{۲}-(R_{۱}+R_{۲})^{۲}}=\sqrt{(۵)^{۲}-(\sqrt{۵}+۲)^{۲}}$

$$=\sqrt{۲۵-۵-۴\sqrt{۵}-۴}=\sqrt{۱۶-۴\sqrt{۵}}=\sqrt{۴(۴-\sqrt{۵})}=۲\sqrt{۴-\sqrt{۵}}$$

***

تمرین برای حل :

۲۳ : اندازه مماس مشترک داخلی و اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\begin{cases}(x-۵)^{۲}+(y-۷)^{۲}=۱\\(x-۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱۶\end{cases}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

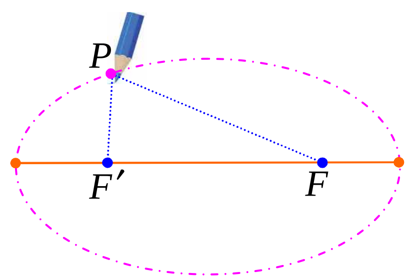
کانال تلگرامی: **@amerimath**

سایت : **www.mathtower.ir**

درس سوّم : بیضی

در این درس بیضی را به عنوان یکی از مهمترین مقاطع مخروطی، تعریف می کنیم و در ادامه ویژگی های آن را به صورت هندسی بررسی می کنیم.

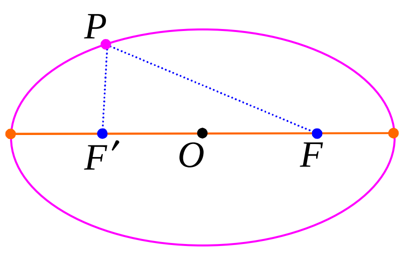
یک تکه نخ به طول l را در نظر بگیرید. اگر دو سر این تکه نخ را مطابق شکل در دو نقطه‌ی متمایز F و F' ثابت کنید و $l > FF'$ باشد. در این صورت یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی ای به گونه ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته ای خواهد بود که **بیضی** نام دارد.



واضح است که اگر یک نقطه‌ی دلخواه روی بیضی رسم شده را در نظر بگیریم، مجموع فاصله های این نقطه از دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر همان طول نخ است. یعنی $PF + PF' = l$

تعریف بیضی

مکان هندسی نقاطی از صفحه ، که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه‌ی ثابت مقدار ثابتی باشد، را **بیضی** می نامند.



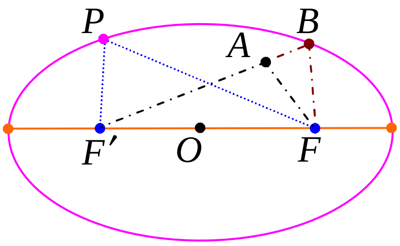
دو نقطه‌ی ثابت را کانون های بیضی می نامند و آنها را با F و F' نمایش می دهیم. همچنین نقطه‌ی وسط پاره خط FF' را مرکز بیضی می گویند که در شکل مقابل با O نمایش داده شده است.

با توجه به این تعریف واضح است که اگر P یک نقطه روی بیضی باشد. در این صورت $PF + PF' = l$

با توجه به تمرین های زیر، ثابت می کنیم که این ویژگی برای هر نقطه‌ی دیگر روی بیضی برقرار است.

تمرین ۱ : ثابت کنید که مجموع فاصله های هر نقطه درون بیضی تا کانون ها از l کمتر است.

اثبات : فرض کنید که نقطه‌ی A درون بیضی باشد. در این صورت امتداد AF (یا AF') بیضی را در نقطه ای مانند B قطع می کند. اکنون با توجه با نامساوی مثلث در مثلث ABF می توان نوشت:



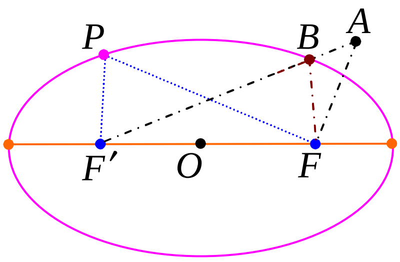
$$AF < AB + BF \xrightarrow{+AF'} AF + AF' < AF' + AB + BF$$

$$\to AF + AF' < \underbrace{AF' + AB}_{BF'} + BF \to AF + AF' < BF + BF'$$

$$\xrightarrow{BF+BF'=l} AF + AF' < l$$

تمرین۲ : ثابت کنید که مجموع فاصله های هر نقطه بیرون بیضی تا کانون ها از l بیشتر است.

اثبات : فرض کنید که نقطه‌ی A بیرون بیضی باشد. در این صورت نقطه‌ی تقاطع AF (یا AF') با بیضی را B نامگذاری می کنیم.اکنون با توجه با نامساوی مثلث در مثلث ABF می توان نوشت:



$$BF < AB + AF \xrightarrow{+BF'} BF + BF' < BF' + AB + AF$$

$$\to BF + BF' < \underbrace{BF' + AB}_{AF'} + AF \to BF + BF' < AF + AF'$$

$$\xrightarrow{BF+BF'=l} AF + AF' > l$$

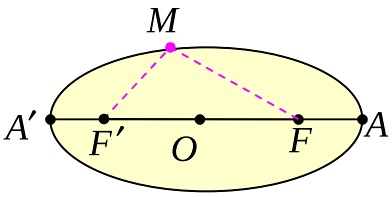
نتیجه : اگر l طول تکه نخ اشاره شده در فوق باشد و چون طول یک پاره خط مانند l یک عدد حقیقی مثبت است. لذا شایسته است تعریف بیضی را به شکل زیر بیان کنیم.

بیضی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه‌ی ثابت یک عدد حقیقی مثبت باشد. اگر این عدد حقیقی مثبت را به دلایلی که بعد با آنها آشنا می شویم با ۲a نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$PF + PF' = 2a$$

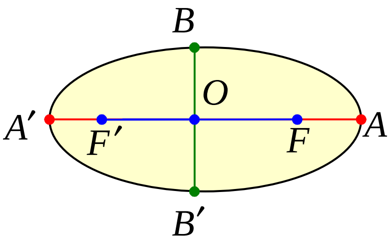
پس همواره $l = 2a$ می باشد به همین دلیل است که عدد ۲a را **ثابت بیضی** می نامند.

اجزای بیضی



بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اگر نقاط F و F' کانون های بیضی و نقطه‌ی M روی بیضی باشد. در این صورت پاره خط هـای MF و MF' را **شعاع های حامل** نقطه‌ی M می نامند.

اگر کانونهای بیضی را به هم وصل کرده و امتداد دهیم، خط بدست آمده بیضی را در نقاط A و A' قطع می کند. پاره خط AA' را **قطر بزرگ** (قطر کانونی) بیضی می نامند و نقـاط A و A' را **رأس های قطـر بزرگ** می گویند.

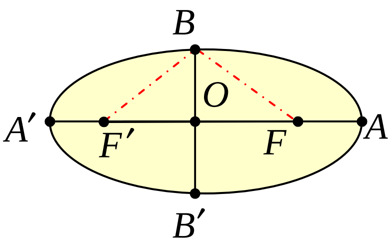


$FF'=۲c$ فاصله‌ی کانونی

اگر وسط پاره خـط واصـل دو کـانون بیـضی یعنـی FF' را O بنامیم. نقطه‌ی O را **مرکز بیضی** می گویند.

اندازه‌ی پاره خط واصل کانونهای بیضی را **فاصله‌ی کانونی** بیضی می گویند.

اگر از مرکز بیضی بر قطر بزرگ خط عمودی رسم کنیم. این خط عمود بیضی را در دو نقطه‌ی B و B' قطع می کند. پاره خط BB' را **قطر کوچک** (قطر ناکانونی) بیضی می نامند و نقاط B و B' را **رأس های قطـر کوچـک** مـی گویند. طبق تعریف بیضی واضح است که مجموع فاصله‌ی های هر رأس قطـر کوچـک بیـضی تـا کانونهـا برابـر ثابـت بیـضی یعنی $۲a$ می باشد. یعنی



$$BF+BF'=۲a \quad \text{و} \quad B'F+B'F'=۲a$$

برای سادگی در ادامه‌ی کار، اندازه‌ی پاره خط های OA و OB و OF را به ترتیب با a و b و c نمـایش می دهیم، لذا فاصله‌ی کانونی بیضی برابر $۲c$ است و

$$FF'=۲c \quad \text{و} \quad OF=c \quad \text{و} \quad OF'=c$$

تمرین ۳ : ثابت کنید که در هر بیضی فاصله‌ی رأس قطر بزرگ بیضی تا کانون مجاور به آن، برابر فاصله‌ی رأس دیگر تا کانون مجاور به آن است. یعنی $AF=A'F'$

اثبات : با توجه به تعریف بیضی واضح است که $AF + AF' = l$ و $A'F + A'F' = l$ لذا

$$AF + AF' = A'F + A'F'$$

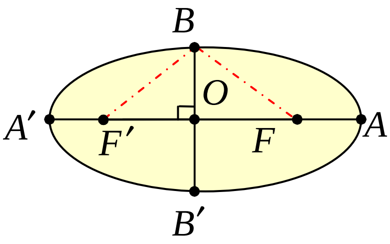
$$\xrightarrow{AF' = AF + FF',\ A'F = A'F' + FF'} AF + AF + FF' = A'F' + FF' + A'F'$$

$$\to ۲AF = ۲A'F' \to AF = A'F'$$

نتیجه : با توجه به تمرین فوق نتیجه می شود که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر بزرگ آن است. یعنی $OA = OA'$ می باشد و چون $OA = a$ پس:

$$OA' = a \text{ و } OA = a \text{ و } AA' = ۲a$$

تمرین۴ : ثابت کنید که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر کوچک است.



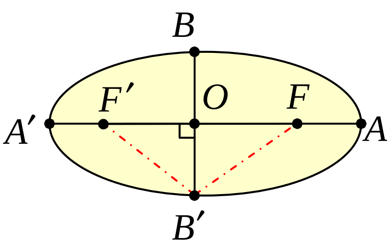
اثبات : با توجه به تعریف قطر کوچک بیضی و چون $OF = OF' = c$. پس در مثلث BFF' پاره خط OB عمود منصف FF' می باشد. لذا $BF = BF'$ و از آنجا که $BF = BF' = a$ پس $BF = BF'$

از طرف در مثلث قائم الزاویه‌ی BOF (یا BOF') می توان نوشت:

$$BF^۲ = OB^۲ + OF^۲$$

و چون $BF = a$ و $OB = b$ و $OF = c$ پس :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \qquad (*)$$



اکنون بطور مشابه در مثلث $B'FF'$ نیز خواهیم داشت.

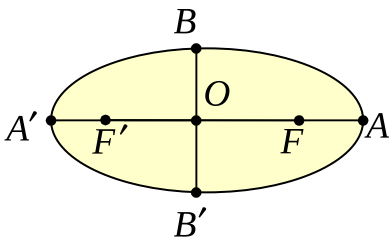
$BF = BF'$ و لذا $a^۲ = OB' + c^۲$ و با مقایسه با تساوی $(*)$ نتیجه می شود که $OB' = b$

و لذا نتیجه می شود که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر کوچک آن است. یعنی $OB = OB'$ می باشد و همچنین:

$$OB' = b \text{ و } OB = b \text{ و } BB' = ۲b$$

∎

***



$AA' = ۲a$ قطر بزرگ

$BB' = ۲b$ قطر کوچک

$FF' = ۲c$ فاصله‌ی کانونی

تذکر۱ : هر بیضی دارای دو قطر می باشد که یکی از دو کانون گذشته و دیگری عمود بر آن در مرکز بیضی است. قطری که از دو کانون می گذرد را قطر بزرگ (اطول) یا قطر کانونی می نامند و آنرا با $۲a$ نمایش می دهند و قطر دیگر را قطر کوچک (اقصر) یا ناکانونی می گویند و آنرا با $۲b$ نمایش می دهند.

اگر فاصله‌ی بین دو کانون را با $۲c$ نمایش دهیم. نتیجه می شود که در هر بیضی رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$b^۲ + c^۲ = a^۲$$

تذکر۲ : واضح است که در هر بیضی فاصله‌ی کانونی از قطر بزرگ کوچکتر است پس:

$$FF' < AA' \to ۲c < ۲a \to c < a \to \frac{c}{a} < ۱$$

نسبت $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می نامند و آنرا با e نمایش می دهند.

$$e = \frac{c}{a} < ۱$$

در واقع خروج از مرکز بیضی نشان دهنده‌ی کشیدگی بیضی است.اگر e به صفر نزدیکتر باشد، بیضی به دایره شبیه تر است و اگر e به یک نزدیک شود، بیضی کشیده تر است.

تذکر۳ : قطر های بیضی **محور های تقارن** و مرکز بیضی **مرکز تقارن** آن است.

***

تمرین۵ : اندازه‌ی قطرهای یکی بیضی۱۰ و ۶ سانتی متر می باشد. اندازه‌ی فاصله‌ی کانونی و مقدار خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

حل : واضح است که اندازه‌ی قطر بزرگ ۱۰ و اندازه‌ی قطر کوچک برابر ۶ سانتی متر می باشد.

$$AA' = ۱۰ \to ۲a = ۱۰ \to a = ۵$$

$$BB' = ۶ \to ۲b = ۶ \to b = ۳$$

$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow ۲۵=c^{۲}+۹\rightarrow c^{۲}=۱۶\rightarrow c=۴$

فاصله‌ی کانونی $FF'=۲c=۲(۴)=۸$

خروج از مرکز بیضی $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$

تمرین۶ : در یک بیضی طول قطر ها ۸ و۶ واحد بوده و مرکز بیضی روی مبدأ مختصات می باشد.

الف : خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

ب : معادلات دایره های محاطی و محیطی بیضی را بنویسید.

حل : الف :

طول قطر بزرگ $AA'=۲a\rightarrow a=۴$

طول قطر کوچک $BB'=۲b=۶\rightarrow b=۳$

$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow ۱۶=۹+c^{۲}\rightarrow c=\sqrt{۷}$

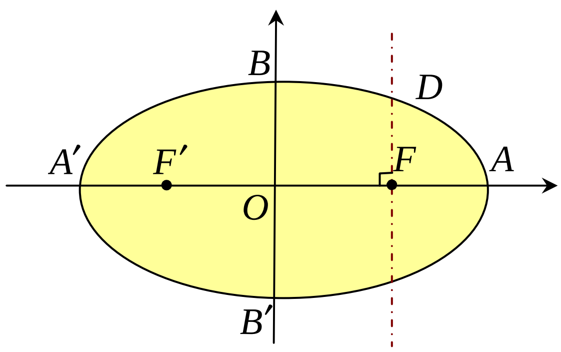
خروج از مرکز بیضی $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

ب : دایره‌ی محیطی بیضی دایره ای است همرکز بیضی و به شعاع a است. دایره‌ی محاطی بیضی دایره ای است همرکز بیضی و به شعاع b است. با این تعریف داریم :

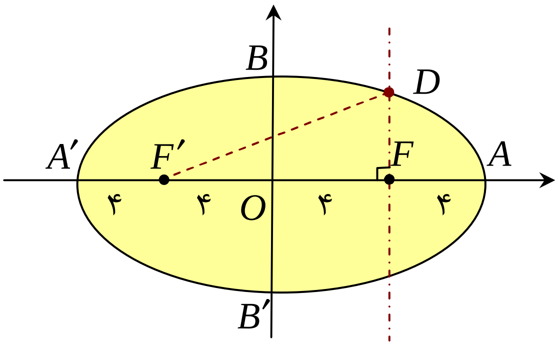
معادله‌ی دایره‌ی محیطی $(x-۰)^{۲}+(y-۰)^{۲}=۱۶$

معادله‌ی دایره‌ی محاطی $(x-۰)^{۲}+(y-۰)^{۲}=۹$

تمرین۷ : مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای مختصات منطبق هستند. و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در نقطه‌ی D قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید.



حل : اگر قرار دهیم، $D(\alpha,\beta)$ با توجه به داده های مسئله واضح است که $\alpha=۴$ و $\beta>۰$ می باشد. پس $D(۴,\beta)$



از طرفی طبق مسئله داریم، $F(۴,۰)$ و $F'(-۴,۰)$

و $AA'=۲a=۴(۴)=۱۶$ یعنی $a=۸$ و چون

$DF+DF'=۲a$ لذا

$$\sqrt{(۴-۴)^۲+(\beta-۰)^۲}+\sqrt{(۴+۴)^۲+(\beta-۰)^۲}=۱۶$$

$$\rightarrow\sqrt{\beta^۲}+\sqrt{۶۴+\beta^۲}=۱۶\rightarrow|\beta|+\sqrt{۶۴+\beta^۲}=۱۶$$

$$\xrightarrow{|\beta|=\beta}\beta+\sqrt{۶۴+\beta^۲}=۱۶\rightarrow\sqrt{۶۴+\beta^۲}=۱۶-\beta$$

$$\rightarrow(\sqrt{۶۴+\beta^۲})^۲=(۱۶-\beta)^۲\rightarrow۶۴+\beta^۲=۲۵۶-۳۲\beta+\beta^۲\rightarrow\beta=۶$$

در نتیجه مختصات نقطه‌ی D به صورت $D(۴,۶)$ می باشد.

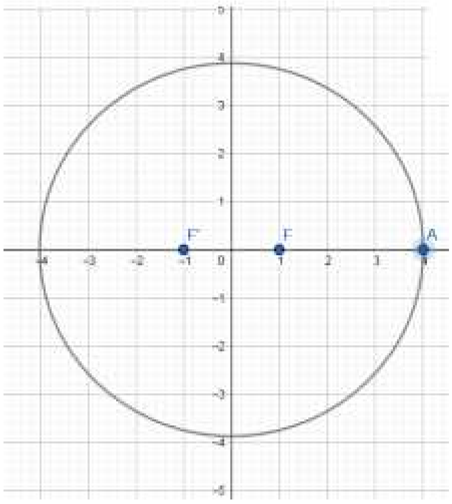
تمرین ۸ : با توجه به اطلاعات داده شده، در هر مورد نمودار بیضی را طوری رسم کنید که مرکز بیضی بر مبدأ مختصات منطبق بوده و قطر بزرگ آن روی محور طول ها باشد. با توجه به اندازه‌ی خروج از مرکز بیضی چه نتیجه ای می گیرید.

الف : $c=۱$ و $a=۴$ و $e=\frac{۱}{۴}$

ب : $c=۳$ و $a=۴$ و $e=\frac{۳}{۴}$

حل : الف:

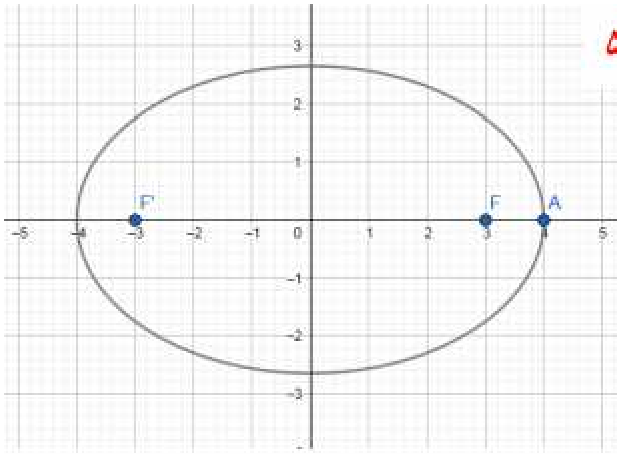
$$e=\frac{۱}{۴}\rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{a=۴}\frac{c}{۴}=\frac{۱}{۴}\rightarrow c=۱\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲}b^۲=۱۵\rightarrow b=\sqrt{۱۵}$$



بیضی به دایره شبیه است.

ب :

$$e=\frac{۳}{۴}\rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{a=۴}\frac{c}{۴}=\frac{۳}{۴}\rightarrow c=۳\xrightarrow{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}}b^{۲}=۷\rightarrow b=\sqrt{۷}$$



بیضی کشیده تر است.

تمرین برای حل :

تمرین ۹ : در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک برابر ۴ واحد و مختصات مرکز بیضی (۴,۵) باشد. در این صورت:

الف : با فرض اینکه قطر بزرگ بیضی موازی محور طول ها باشد، نمودار بیضی را رسم کنید.

ب : فاصله‌ی کانونی و مقدار خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

ج : مختصات رئوس بیضی قطر بزرگ و رئوس قطر کوچک و کانون های بیضی را بنویسید.

تمرین ۱۰ : در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک برابر ۴ واحد و مختصات مرکز بیضی (۴,۵) باشد. در این صورت:

الف : با فرض اینکه قطر بزرگ بیضی موازی محور عرض ها باشد، نمودار بیضی را رسم کنید.

ب : فاصله‌ی کانونی و مقدار خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

ج : مختصات رئوس بیضی قطر بزرگ و رئوس قطر کوچک و کانون های بیضی را بنویسید.

تمرین ۱۱: نقاط $F(۲,۷)$ و $F'(۲,-۱)$ کانون های بیضی هستند که طول قطر بزرگ آن ۱۰ می باشد.

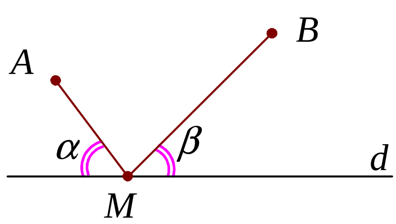
الف : مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب : طول قطر کوچک بیضی را به دست آورید.

ج : نمودار بیضی را رسم کنید.

***

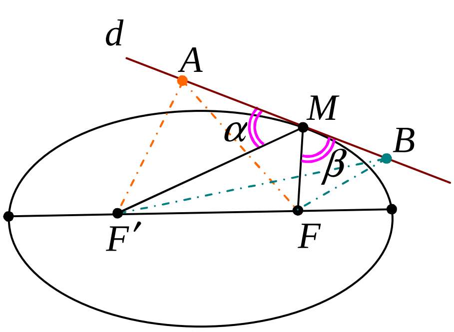
ویژگی خط مماس بر بیضی



سال گذشته دیدیم که کوتاه ترین مسیر از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و با عبور از نقطه ای مانند M از خط d، به گونه ای است که دو زاویه‌ی ایجاد شده α و β با هم برابر هستند.

اکنون با توجه به این موضوع، به تمرین زیر پاسخ می دهیم.

تمرین ۱۲ : اگر خطی چنان رسم شود که بر بیضی مماس شود. در این صورت ثابت کنید که دو زاویه‌ای که این خط و شعاعهای حامل نقطه‌ی تماس بوجود می آید، مساوی اند.



اثبات : اگر نقطه‌ی M ، نقطه تماس خط و بیضی باشد، چون این نقطه روی بیضی قرار دارد، پس فاصله‌ی این نقطه تا کانون ها از فاصله‌ی نقاط A و B که بیرون بیضی هستند، تا کانون ها کمتر است. لذا نقطه‌ی M تنها نقطه ای است که کمترین فاصله تا کانونها را دارد. پس $\angle\alpha = \angle\beta$

نتیجه :

۱ : اگر بدنه‌ی بیضی آینه ای باشد و از یکی از کانون های بیضی اشعه‌ی نوری بر بدنه‌ی داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کانون دیگر بیضی می گذرد. چرا؟

چون اشعه‌ی نور از یکی از کانونها تابیده می شود و نور حرکت مستقیم الخط را دارد، لذا اگر پرتو نور بتواند از بدنه‌ی بیضی رد شود از نقطه‌ی قرینه‌ی کانون دیگر نسبت به خط مماس می گذرد.

۲ : اگر از یک نقطه‌ی روی کانون های بیضی، توپی چنان زده شود که به بدنه‌ی بیضی برخورد کند، در برگشت از کانون دیگر می گذرد.

***

حل چند تمرین در مورد بیضی و ویژگی های آن

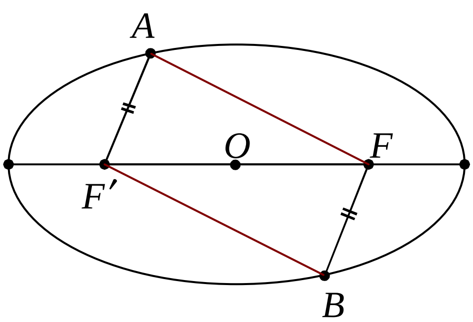
۱۳ : دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. اگر نقطه‌ی A به کانون F' و نقطه‌ی B به کانون F نزدیکتر و $AF' = BF$ باشد. هر یک از حالت های زیر را ثابت کنید.

الف : در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازیند.

ب : در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

حل :

الف :

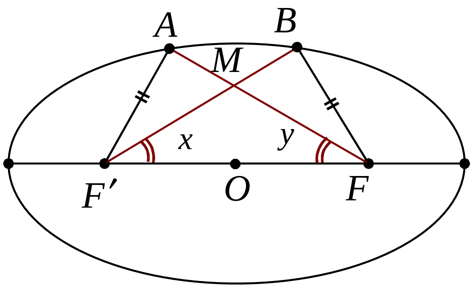


$$\left.\begin{array}{r} AF + AF' = ۲a \\ BF + BF' = ۲a \\ BF = AF' \end{array}\right\} \to AF = BF'$$

پس در چهارضلعی $AFBF'$ بدست آمده، اضلاع مقابل دو بدو موازیند. لذا این چهارضلعی، متوازی الاضلاع است و $AF \parallel BF'$

ب :

$$\left.\begin{array}{l} AF + AF' = ۲a \\ BF + BF' = ۲a \\ BF = AF' \end{array}\right\} \to AF = BF'$$

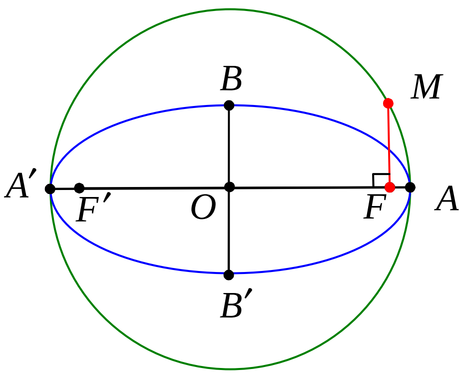


$$\left.\begin{array}{l} AF = BF' \\ AF' = BF \\ FF' = FF' \end{array}\right\} \xrightarrow{\hspace{3em}} \Delta(AFF') \cong \Delta(BFF') \to \angle x = \angle y$$

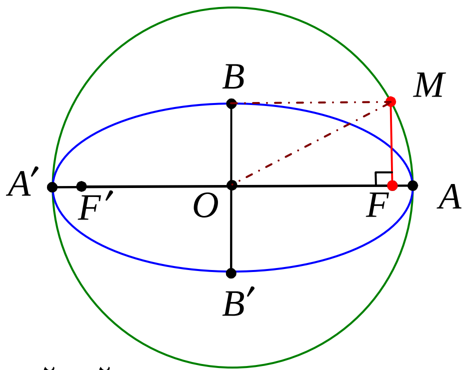
(ض ض ض)

پس مثلث FMF' دو زاویه‌ی مساوی دارد، لذا متساوی الساقین است. حال چون نقطه‌ی M از دو سر پاره خط FF' به یک فاصله است، پس روی عمود منصف FF' قرار دارد. از طرفی طبق تعریف می دانیم که قطر کوچک بیضی عمود منصف FF' می باشد. لذا نقطه‌ی M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.

۱۴ : قطر دایره ای مانند شکل مقابل، قطر بزرگ بیضی است. و از کانون F عمودی بر قطر بزرگ رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید که اندازه‌ی MF برابر نصف اندازه‌ی قطر کوچک بیضی است.



حل : طبق مسئله $OM = OA = a$ می باشد. لذا در مثلث قائم الزاویه‌ی OMF می توان نوشت:

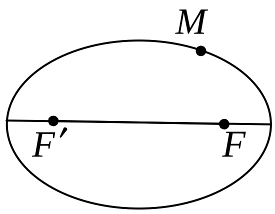


$OM = OA = a$

$OF = c$

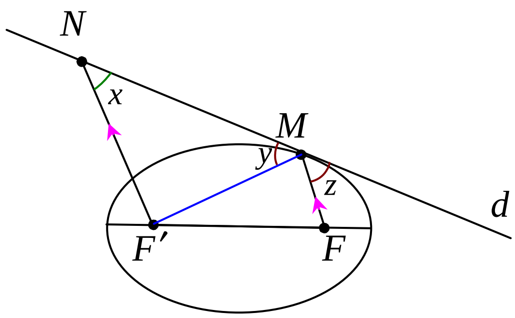
$OM^۲ = OF^۲ + MF^۲$

$$\to a^۲ = c^۲ + MF^۲ \to MF^۲ = a^۲ - c^۲ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} MF^۲ = b^۲ \to MF = b$$



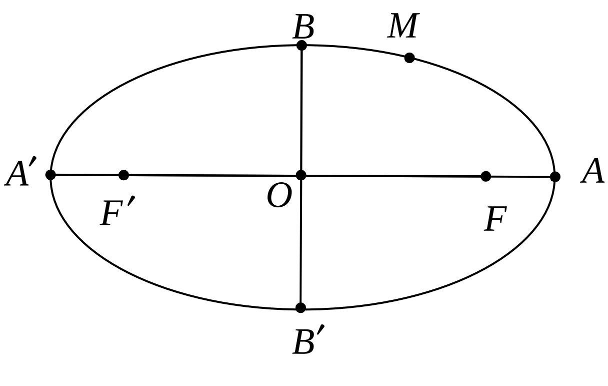
۱۵ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$

حل : ابتدا مطابق مسئله ، شکل را تکمیل می کنیم.



طبق ویژگی خط مماس بر بیضی داریم، $\angle y = \angle z$ و چون $MF \parallel NF'$ پس $\angle x = \angle z$. لذا $\angle x = \angle y$ یعنی مثلث $NF'M$ دو زاویه‌ی مساوی دارد، در نتیجه متساوی الساقین بوده و $NF' = MF'$

۱۶ : نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

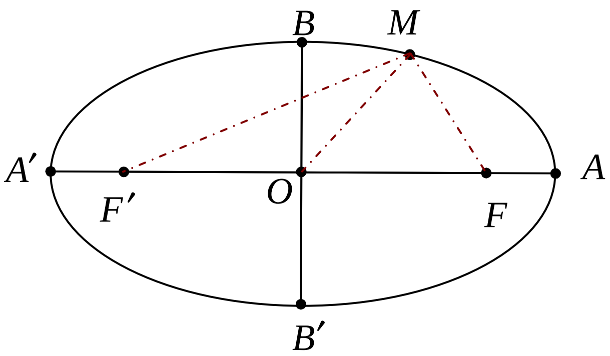


الف : نشان دهید که $OM = OF = OF'$

ب : نشان دهید که مثلث MFF' قائم الزاویه است.

ج : طول های MF و MF' را به دست آورید.

حل : ابتدا نقطه‌ی M روی را به مرکز و کانون های بیضی وصل می کنیم.



الف :

$$AA' = ۲a \xrightarrow{AA'=۱۰} a = ۵$$

$$BB' = ۲b \xrightarrow{BB'=۶} b = ۳$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{a=۵\ ,\ b=۳} ۲۵ = ۹ + c^۲ \rightarrow c^۲ = ۱۶ \rightarrow c = ۴$$

$$\rightarrow OF = OF' = ۴ \xrightarrow{OM=۴} OM = OF = OF'$$

ب : با توجه به اینکه مرکز بیضی یعنی نقطه‌ی O وسط FF' است. پس OM میانه‌ی وارد بر ضلع FF' می باشد. از طرفی چون $OM = OF = OF'$ پس مثلث MFF' قائم الزاویه بوده و زاویه‌ی FMF' قائمه است.

ج :

$$MF + MF' = ۲a \xrightarrow{۲a=۱۰} MF + MF' = ۱۰ \rightarrow MF' = ۱۰ - MF$$

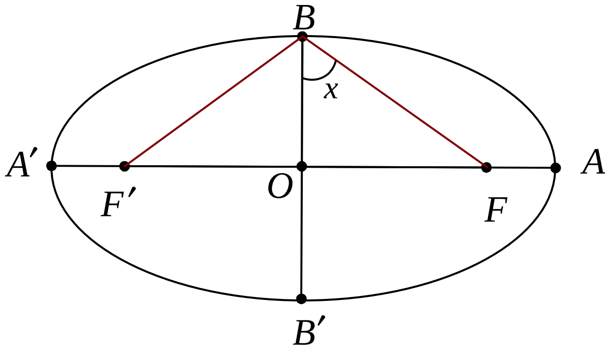
$$\Delta(MFF') : \xrightarrow{\angle FMF'=۹۰^\circ} MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲$$

$$\xrightarrow{MF'=۱۰-MF\ ,\ FF'=۸} MF^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = (۸)^۲$$

$$\xrightarrow{MF=x} x^۲ + (۱۰ - x)^۲ = ۶۴ \rightarrow x^۲ + ۱۰۰ - ۲۰x + x^۲ = ۶۴$$

$$\rightarrow ۲x^۲ - ۲۰x + ۳۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ - ۱۰x + ۱۸ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۱۰۰-۷۲=۲۸}$$

$$\begin{cases} x_۱ = \dfrac{۱۰ + ۲\sqrt{۷}}{۲} = ۵ + \sqrt{۷} \rightarrow MF = ۵ + \sqrt{۷}\ ,\ MF' = ۱۰ - (۵ + \sqrt{۷}) = ۵ - \sqrt{۷} \\ x_۲ = \dfrac{۱۰ - ۲\sqrt{۷}}{۲} = ۵ - \sqrt{۷} \rightarrow MF = ۵ - \sqrt{۷}\ ,\ MF' = ۱۰ - (۵ - \sqrt{۷}) = ۵ + \sqrt{۷} \end{cases}$$



۱۷ : در بیضی مقابل، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید.

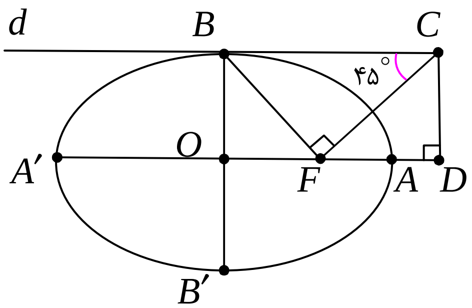
حل :

$$AA' = ۲BB' \to ۲a = ۲(۲b) \to a = ۲b$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{a=۲b} ۴b^۲ = b^۲ + c^۲ \to ۳b^۲ = c^۲ \to c = \sqrt{۳}b$$

$$\Delta(OBF): \tan x = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \to \angle x = ۶۰^\circ$$

از طرفی چون مثلث FBF' متساوی الساقین بوده و BB' بر قاعده‌ی FF' عمود است، پس نیمساز زاویه‌ی رأس یعنی FBF' می باشد و لذا اندازه‌ی این زاویه برابر ۱۲۰ درجه است.



۱۸ : در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه‌ی B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می کنیم و در نقطه‌ی F عمودی بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه‌ی D قطع کند. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی BCF برابر ۴۵ درجه باشد، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.

حل : واضح است که چهارضلعی $OBCD$ مستطیل است. مثلث CFB متساوی الساقین و زاویه‌ی OFB برابر ۴۵ درجه است. پس مثلث OBF متساوی الساقین بوده و در آن $OB = OF$ می باشد. لذا $b = c$

و چون در هر بیضی رابطه‌ی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است پس:

$$a^۲ = c^۲ + c^۲$$

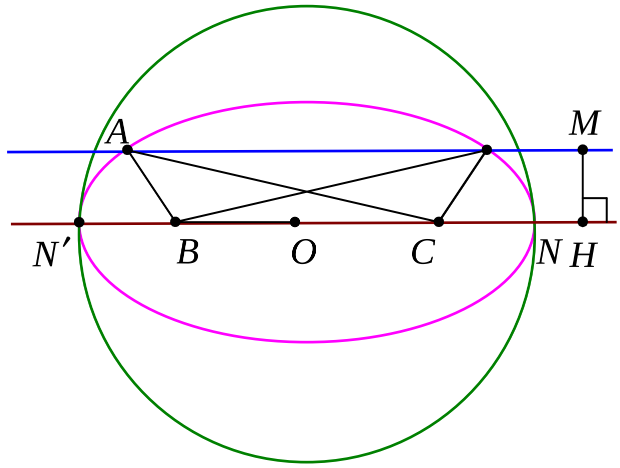
$$\to a^۲ = ۲c^۲ \to a = \sqrt{۲}c$$

$$AF = OA - OF = a - c = \sqrt{۲}c - c$$

$$AD = DF - AF \xrightarrow{DF = DC \to b = c} AD = DF - AF = b - (a - c) = ۲c - \sqrt{۲}c$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{۲c - \sqrt{۲}c}{\sqrt{۲}c - c} = \frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۲}c - c)}{\sqrt{۲}c - c} = \sqrt{۲}$$

۱۹ : فرض کنید از مثلث ABC، اندازه‌ی ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد. با استفاده از خواص بیضی شیوه‌ی رسم این مثلث را توضیح دهید.



حل : فرض کنیم $BC = a$ و $AH = h_a$ و محیط مثلث ABC برابر $۲p$ باشد. پاره خط $BC = a$ را رسم نموده و وسط آن را O می نامیم. دایره ای به مرکز O و قطر $۲p - a$ رسم می کنیم و BC را امتداد می دهیم تا دایره را در نقاط N و N' قطع کند. سپس یک بیضی به کانون های C و B که از N و N' بگذرد را رسم می کنیم. با توجه به بحث های گذشته بدیهی است که NN' قطر بزرگ بیضی است و $NN' = ۲p - a$

اگر A نقطه‌ی دلخواهی از بیضی باشد. پس :

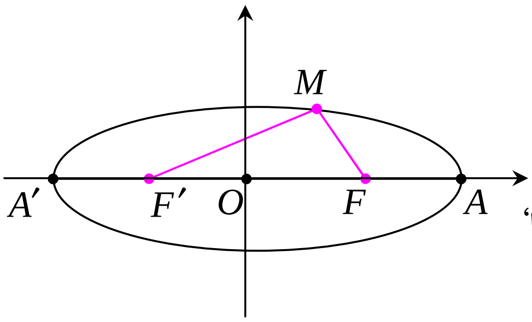
$$AB + AC = NN'$$

$$\to AB + AC = ۲p - a \to AB + AC + BC = ۲p - a + a = ۲p$$

حال از نقطه‌ی H روی امتداد NN' عمود $MH = h_a$ را رسم نموده و از M خطی موازی NN' رسم می کنیم. محل تقاطع خط و بیضی را A می نامیم و مثلث ABC را رسم می کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

اثبات معادله‌ی بیضی در حالت های مختلف

در این قسمت در پی آن هستیم که برای بیضی با توجه به حالت های مختلف آن معادله ای ارائه کنیم. امّا برای سادگی فقط حالت های خاص (مرکز بیضی روی مبدأ مختصات) را بیان می کنیم. بدیهی است که با اعمال انتقال می توان حالت های کلی معادله‌ی بیضی را بدست آورد.



حالت اوّل : بیضی افقی

نقطه‌ی $M(x,y)$ روی بیضی

با کانون های $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ را در نظر می گیریم،

بنابر تعریف بیضی خواهیم داشت:

$$MF + MF' = 2a$$

لذا :

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\rightarrow (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$\rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$\rightarrow (x-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2$$

$$\rightarrow -2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx$$

$$\rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \xrightarrow{\div 4} a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$\rightarrow (a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (a^2 + cx)^2$$

$$\rightarrow a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2$$

$$\rightarrow a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\rightarrow a^{۲}x^{۲}+۲a^{۲}cx+a^{۲}c^{۲}+a^{۲}y^{۲}=a^{۴}+۲a^{۲}cx+c^{۲}x^{۲}$$

$$\rightarrow a^{۲}x^{۲}+a^{۲}c^{۲}+a^{۲}y^{۲}=a^{۴}+c^{۲}x^{۲}$$

$$\rightarrow a^{۲}x^{۲}-c^{۲}x^{۲}+a^{۲}y^{۲}=a^{۴}-a^{۲}c^{۲}$$

$$\rightarrow (a^{۲}-c^{۲})x^{۲}+a^{۲}y^{۲}=a^{۲}(a^{۲}-c^{۲})$$

$$\xrightarrow{a^{۲}-c^{۲}=b^{۲}} b^{۲}x^{۲}+a^{۲}y^{۲}=a^{۲}b^{۲}$$

$$\xrightarrow{\div a^{۲}b^{۲}} \frac{b^{۲}x^{۲}}{a^{۲}b^{۲}}+\frac{a^{۲}y^{۲}}{a^{۲}b^{۲}}=\frac{a^{۲}b^{۲}}{a^{۲}b^{۲}} \rightarrow \frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$$

حالت دوّم : بیضی قائم

اثبات این حالت مشابه اثبات حالت اول انجام می شود. نتیجه اینکه معادله‌ی بیضی در حالت می شود :

$$\frac{x^{۲}}{b^{۲}}+\frac{y^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

از فراگیران محترم انتظار می رود که اثبات این حالت را پیگیر باشند.

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: @amerimath

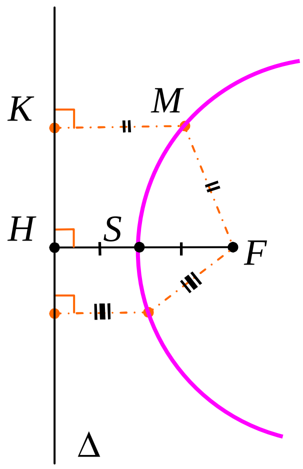
سایت : www.mathtower.ir

درس چهارم : سهمی

سهمی را در سال های گذشته به عنوان یک تابع شناخته اید. امّا همانطور که در معرفی مقاطع مخروطی آشنا شده اید، سهمی به عنوان یکی از این مقاطع ، یک مکان هندسی معرفی شده است. در این درس سهمی را به شکلی دقیقتر تعریف می کنیم و در ادامه ویژگی های آن را به صورت هندسی و تحلیلی بررسی می کنیم.

تعریف سهمی

سهمی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه، به یک فاصله باشند.



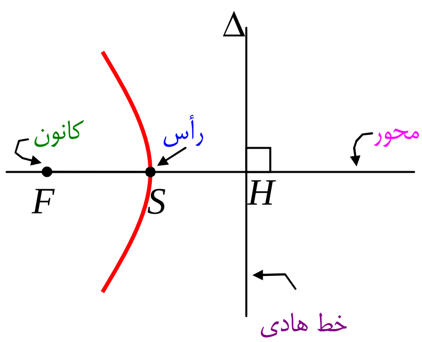
$$MF = MK$$

نقطه‌ی ثابت را **کانون** سهمی می نامند و آن را با F نمایش می دهند و خط ثابت را **خط هادی** سهمی می گویند و آن را با Δ نشان می دهند.

فاصله‌ی کانون تا خط هادی را یک **پارامتر سهمی** می نامند و آن را با $۲p$ نشان می دهند.

$$FH = ۲p$$

نقطه‌ی وسط پاره خطی که از کانون بر خط هادی عمود می شود، یک نقطه از سهمی است که آن را **رأس سهمی** می گویند. خطی که از کانون می گذرد و بر خط هادی عمود است را **محور تقارن** (محورکانونی) سهمی می نامند و آنرا به اختصار محور سهمی نیز می گویند.



قرار داد : در این درس فقط سهمی هایی را بررسی می کنیم که محور کانونی آنها موازی با یکی از محور های مختصات باشد.

بررسی سهمی

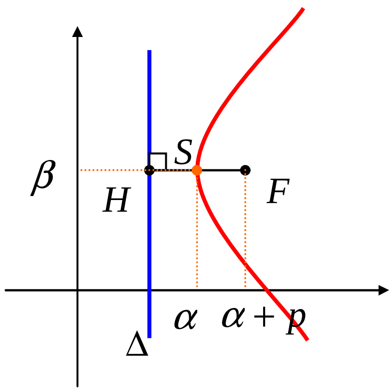
در اینجا سهمی را در چهار حالت خاص یعنی وقتی که محور کانونی آن موازی با یکی از محور های مختصات باشد، بررسی می کنیم.

۱) بررسی سهمی وقتی که محور کانونی آن موازی محورطول ها باشد.(سهمی افقی)

الف) سهمی افقی (رو به راست)

اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد.در این صورت داریم:

معادله‌ی استاندارد سهمی: $(y-\beta)^۲=۴p(x-\alpha)$



معادله‌ی سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی روی مبدأ مختصات باشد. $y^۲=۴px$

مختصات کانون: $F(\alpha+p,\beta)$

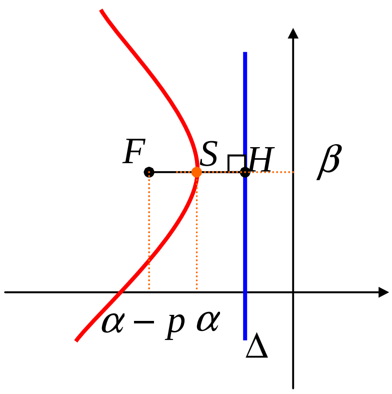
معادله‌ی خط هادی: $x=\alpha-p$

معادله‌ی محور تقارن: $y=\beta$

ب) سهمی افقی (رو به چپ)

اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد.در این صورت داریم:

معادله‌ی استاندارد سهمی: $(y-\beta)^۲=-۴p(x-\alpha)$



معادله‌ی سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی روی مبدأ مختصات باشد. $y^۲=-۴px$

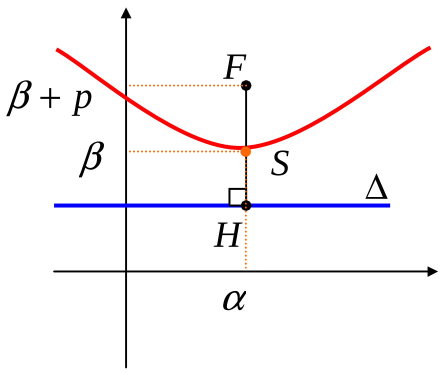
مختصات کانون : $F(\alpha-p,\beta)$

معادله‌ی خط هادی: $x=\alpha+p$

معادله‌ی محور تقارن: $y=\beta$

۲) بررسی سهمی وقتی که محور کانونی آن موازی محورعرض ها باشد.(سهمی قائم)

الف) سهمی قائم (رو به بالا)



اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد.در این صورت داریم:

معادله‌ی استاندارد سهمی: $(x-\alpha)^۲ = ۴p(y-\beta)$

معادله‌ی سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سـهمی روی مبدأ مختصات باشد. $x^۲ = ۴py$

مختصات کانون: $F(\alpha, \beta + p)$

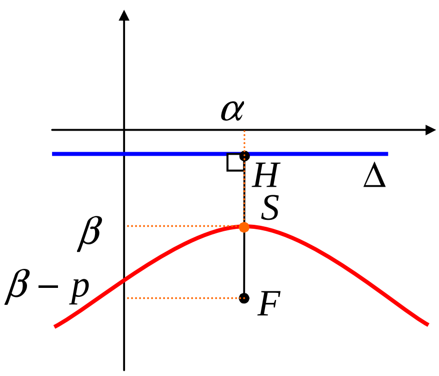
معادله‌ی خط هادی: $y = \beta - p$

معادله‌ی محور تقارن: $x = \alpha$

ب) سهمی قائم (رو به پایین)

اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد.در این صورت داریم:

معادله‌ی استاندارد سهمی: $(x-\alpha)^۲ = -۴p(y-\beta)$



معادله‌ی سهمی در حالت خاص وقتـی کـه رأس سـهمی روی مبدأ مختصات باشد. $x^۲ = -۴py$

مختصات کانون: $F(\alpha, \beta - p)$

معادله‌ی خط هادی: $y = \beta + p$

معادله‌ی محور تقارن: $x = \alpha$

....

مثال: معادله‌ی سهمی را بنویسید که $S(۱,۳)$ رأس آن بوده و معادله‌ی خط هادی آن $x = ۳$ باشد.

حل : با توجه به معادله‌ی خط هادی و مقایسـه‌ی طـول رأس سـهمی بـا موقعیـت خـط هـادی در دسـتگاه مختصات، معلوم می شود که سهمی افقی رو به چپ است.

چون $S(۱,۳)$ مختصات رأس سهمی می باشد، پس $\alpha = ۱$ و $\beta = ۳$ از طرفی در این سهمی ها معادلـه‌ی خط هادی $x = \alpha - p$ می باشد.

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha + p \\ x = ۳ \end{array}\right\} \to \alpha + p = ۳ \xrightarrow{\alpha = ۱} ۱ + p = ۳ \to p = ۲$$

در نهایت معادله‌ی سهمی به شکل زیر به دست می آید.

$$(y-\beta)^۲ = -۴p(x-\alpha) \to (y-۳)^۲ = -۴(۲)(x-۱)$$
$$\to (y-۳)^۲ = -۸(x-۱)$$

تمرین ۱ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $y = ۵$ خط هادی و $F(۳,۷)$ کانون آن باشد.

تمرین ۲ : معادله ی سهمی را بنویسید که در آن $S(۱,-۱)$ رأس و $F(۳,-۱)$ مختصات کانون آن باشد.

تمرین ۳ : معادله‌ی سهمی به صورت $y^۲ = ۶x$ داده شده است.

الف : نوع سهمی را تعیین کنید.

ب : مختصات رأس و مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی را بنویسید.

ج : نمودار سهمی را رسم کنید.

توجه : به روش مربع کامل کردن می توان معادله‌ی سهمی را به صورت متعارف نوشت. به مثال زیر توجـه کنید.

مثال: سهمی به معادله‌ی $x^۲ - ۲x + ۸y + ۹ = ۰$ داده شده است.

الف) نوع سهمی را بنویسید.

ب) مختصات رأس و اندازه‌ی پارامتر سهمی را بدست آورید.

حل :

$$x^۲ - ۲x + ۸y + ۹ = ۰ \to x^۲ - ۲x + ۱ = -۸y - ۸$$

$\to (x-۱)^۲ = -۸(y-۱)$ سهمی قائم رو به پایین است.

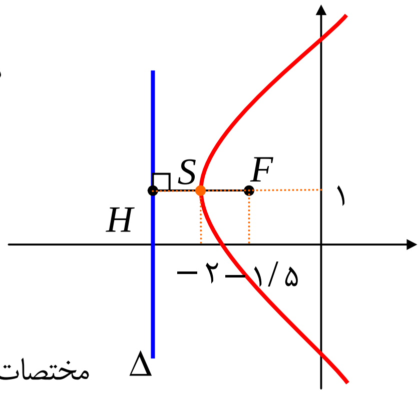
مختصات رأس $S(۱,-۱)$

پارامتر سهمی $-۴p = -۸ \to p = ۲$

تمرین۴ : سهمی به معادله‌ی $y^2-2y-2x-3=0$ داده شده است. مختصات رأس، کانون و معادله-ی خط هادی را نوشته و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

حل :

$y^2-2y-2x-3=0 \to y^2-2y+1=2x+4$



$\to (y-1)^2=2(x+2)$ سهمی افقی رو به راست است.

$S(-2,1)$ مختصات رأس

$4p=2 \to p=\frac{1}{2}$ پارامتر سهمی

$F(\alpha+p,\beta) \to F(-2+\frac{1}{2},1) \to F(-\frac{3}{2},1)$ مختصات کانون

$x=\alpha-p \to x=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$ معادله‌ی خط هادی

تمرین۵ : سهمی به معادله‌ی $y^2-2ay-2x+b=0$ داده شده است. مقادیر b و a را چنان بیابید که $S(2,1)$ رأس آن باشد.

حل : کافی است که معادله را به صورت استاندارد بنویسیم.

$$y^2-2ay-2x+b=0 \xrightarrow{+a^2} y^2-2ay+a^2=2x-b+a^2$$

$$\to (y-a)^2=2(x-\frac{b-a^2}{2})$$

سهمی افقی روبه راست است. لذا رأس سهمی به صورت $S(\frac{b-a^2}{2},a)$ می باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a=1 \\ \frac{b-a^2}{2}=2 \end{cases} \to \frac{b-1}{2}=2 \to b=5$$

***

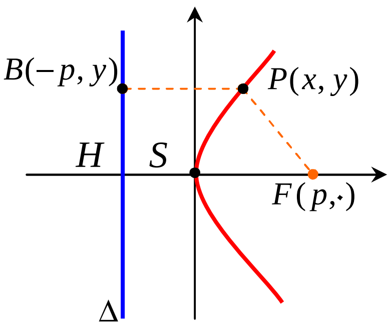
اثبات معادله‌ی سهمی در حالت های مختلف

در این قسمت در پی آن هستیم که برای سهمی با توجه به حالت های مختلف آن معادله ای ارائه کنیم. امّا برای سادگی فقط حالت های خاص را بیان می کنیم. بدیهی است که با اعمال انتقال می توان حالت های کلی معادله‌ی سهمی را بدست آورد.

۱ : معادله‌ی سهمی و معادله‌ی خط هادی یک سهمی افقی که رأس آن منطبق بر مبدأ مختصات باشد را بدست آورید.

حل :

حالت اوّل : سهمی افقی (رو به راست)



فرض کنید که p یک عدد مثبت باشد. در این صورت با این شرایط مختصات کانون سهمی $F(p,\cdot)$ می باشد. از طرفی خط هادی سهمی موازی محور عرض ها است و معادله‌ی آن به شکل $x=-p$ خواهد بود. حال اگر $P(x,y)$ نقطه‌ی دلخواهی از سهمی باشد، طبق تعریف سهمی خواهیم داشت :

$$PF = PB$$

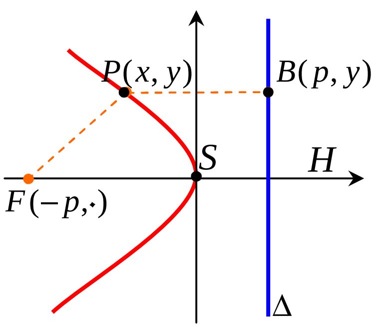
$$\rightarrow \sqrt{(x-p)^{۲}+(y-\cdot)^{۲}} = \sqrt{(x+p)^{۲}+(y-y)^{۲}}$$

$$\rightarrow (x-p)^{۲}+(y-\cdot)^{۲} = (x+p)^{۲}+(y-y)^{۲}$$

$$\rightarrow x^{۲}-۲px+p^{۲}+y^{۲} = x^{۲}+۲px+p^{۲}$$

$$\rightarrow -۲px+y^{۲} = ۲px \rightarrow y^{۲} = ۴px$$

حالت دوّم : سهمی افقی (رو به چپ)



فرض کنید که a یک عدد مثبت باشد. در این صورت با این شرایط مختصات کانون سهمی $F(-p,\cdot)$ می باشد. از طرفی خط هادی سهمی موازی محور عرض ها است و معادله‌ی آن به شکل $x=p$

خواهد بود. حال اگر $P(x,y)$ نقطه‌ی دلخواهی از سهمی باشد، طبق تعریف سهمی خواهیم داشت :

$$PF = PB$$

$$\rightarrow \sqrt{(x+p)^{۲}+(y-۰)^{۲}} = \sqrt{(x-p)^{۲}+(y-y)^{۲}}$$

$$\rightarrow (x+p)^{۲}+(y-۰)^{۲} = (x+p)^{۲}+(y-y)^{۲}$$

$$\rightarrow x^{۲}+۲px+p^{۲}+y^{۲} = x^{۲}-۲px+p^{۲}$$

$$\rightarrow ۲px+y^{۲} = -۲px \rightarrow y^{۲} = -۴px$$

۲ : معادله‌ی سهمی و معادله‌ی خط هادی یک سهمی قائم که رأس آن منطبق بر مبدأ مختصات باشد را بدست آورید.

حل این تمرین به دانش آموزان محترم واگذار می شود.

***

تمرین برای حل :

۶ : در یک سهمی $S(۲,۱)$ مختصات رأس و $F(۲,۵)$ مختصات کانون می باشد.

الف : نوع سهمی را تعیین کنید.

ب : معادله‌ی سهمی را بنویسید.

ج : معادله‌ی خط هادی را بنویسید.

۷ : در یک سهمی $S(۴,۶)$ مختصات رأس و معادله‌ی خط هادی آن $y=۹$ می باشد.

الف : نوع سهمی را تعیین کنید.

ب : مختصات کانون سهمی را بنویسید.

ج : معادله‌ی سهمی را بنویسید.

۸ : سهمی به معادله‌ی $x^{۲}-۲x-۲y-۵=۰$ داده شده است. مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی آن را تعیین نموده و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

۹ : سهمی به معادله‌ی $x^{۲} - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ داده شده است. مختصات کانون و معادله‌ی خـط هـادی آن را تعیین نموده و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

۱۰ : سهمی به معادله‌ی $y^{۲} = ۲x - ۴y$ داده شده است.

الف : مختصات رأس و کانون بیضی را بدست آورید.

ب : مختصات نقاط برخورد نمودار سهمی با محور های مختصات را تعیین کنید.

ج : نمودار سهمی را رسم کنید.

۱۱ : مختصات رأس و کانون سهمی به معادله‌ی $y = ax^{۲} + bx + c$ (کـه در آن $a \neq ۰$) را بـه دسـت آورید.

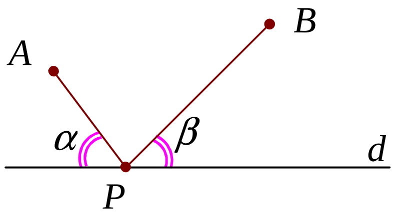
۱۲ : سهمی به معادله‌ی $y^{۲} = ۴x - ۴$ داده شده است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

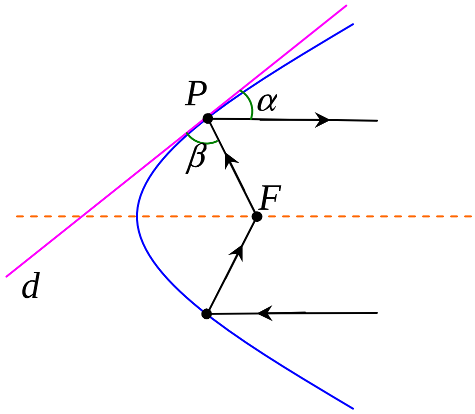
***

ویژگی بازتابندگی سهمی ها و کاربردهای آن

یکی از ویژگی های سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه‌ی سـهمی بتابـد بازتـاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و بر عکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

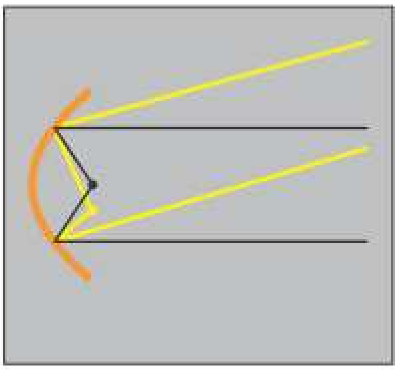
دلیل این امر را در ویژگی معادله‌ی خط مماس بر منحنـی را قبلاً مشاهده کردید. یعنی اگر خط d بر سهمی در نقطه‌ی P مماس شود، زاویه های α و β برابر خواهند شد.

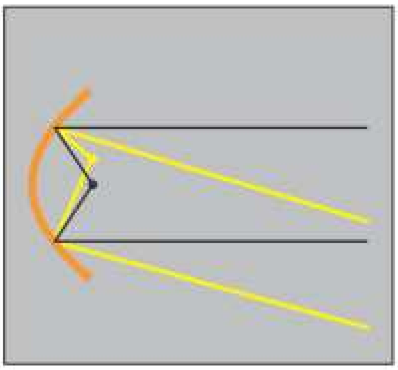




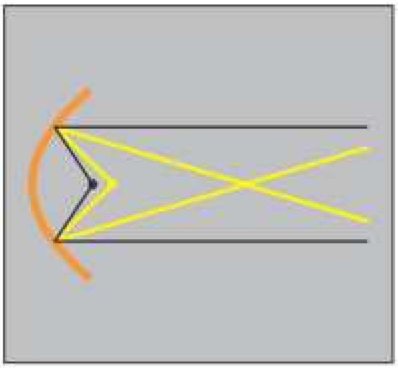
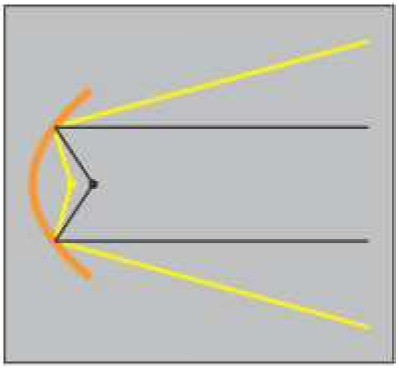
از این ویژگی برای ساخت بسیاری از وسایل از جمله چراغ جلوی اتومبیل ها استفاده می شود.

با قرار گرفتن لامپ چراغ اتومبیل در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی ، امّا کمی بالاتر یـا پـایین تـر، شعاع های نور کماکان موازی با هم(نه موازی با محور) امّا رو به بالا یا پایین خارج می شوند کـه اصـطلاحاً نور بالا یا پایین ایجاد می کنند.





اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب تر قرار گیرد، شعاع های نور بـا هـم موازی خارج نمی شوند و یا از هم فاصله می گیرند یا در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند.

فن آوری ساخت گیرنده‌ی امواج ماهواره ای (دیش ماهواره) نیز مشابه چراغ اتومبیل می باشد. ساخت آینه های محدب یا مقعر نیز به کمک این فن آوری انجام می شود.

***

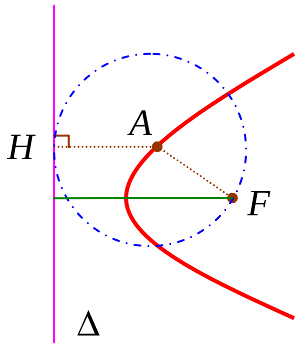
حل چند مسئله‌ی دیگر پیرامون سهمی

۱۳ : سهمی با کانون F و خط هادی Δ داده شده اند.

الف : ثابت کنید هر نقطه روی سهمی مرکز دایره است که از کانون گذشته و بر خط هادی مماس می باشد.

ب : ثابت کنید مرکز هر دایره که از کانون بگذرد و بر خط هادی مماس باشد، روی سهمی است.

حل :

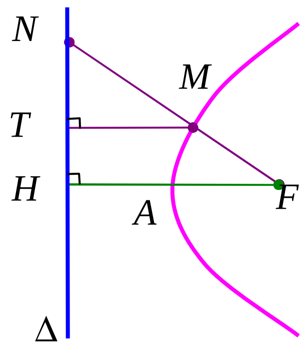


فرض کنیم A نقطه‌ی دلخواهی روی سهمی باشد. حال اگر به مرکز A و شعاع AF دایره ای رسم می کنیم. بنابه تعریف سهمی، این نقطه از کانون و خط هادی آن به یک فاصله است. پس دایره‌ی رسم شده بر خط Δ مماس است.

همچنین فرض کنید که به مرکز B دایره ای به شعاع r طوری شده است که $BH = BF = r$. پس نقطه‌ی B از کانون و خط هادی سهمی به یک فاصله است. لذا نقطه‌ی B روی سهمی است.

توجه : با توجه به تمرین فوق می توان تعریف زیر را نیز برای سهمی بیان کرد.

سهمی مکان هندسی مرکز دایره هایی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت روی آن صفحه گذشته و بر یک خط ثابت از آن صفحه مماس باشند.



۱۴ : در شکل مقابل سهمی با رأس A و کانون F و خط هـادی Δ رسم شده است. از F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کـرده و امتداد داده ایم تا Δ را در N قطع کند و از نقطه‌ی M، خـط MT را بر Δ عمود کرده ایم. ثابت کنید:

$$\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

حل : نقاط A و M روی سهمی هستند. پس فاصله‌ی آنها از کانون و خط هادی سهمی برابر است. یعنی :

$$MT = MF \quad و \quad AH = AF$$

از طرفی می توان نوشت با توجه به قضیه‌ی تالس می توان نوشت:

$$\Delta FNH : TM \parallel FH \rightarrow \frac{MT}{FH}=\frac{NM}{FN} \xrightarrow{MT=MF\ ,\ FH=۲FA} \frac{MF}{۲FA}=\frac{NM}{FN}$$

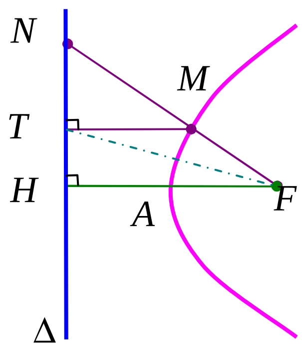
$$\rightarrow \frac{FN}{۲FA}=\frac{NM}{MF} \qquad (۱)$$

$$\Delta FNH : TM \parallel FH \rightarrow \frac{TN}{TH}=\frac{NM}{MF} \qquad (۲)$$

حال از روابط (۱) و (۲) می توان نتیجه گرفت که :

$$\frac{FN}{۲FA}=\frac{TN}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{FN}{FA}=\frac{۲TN}{TH}$$

روش دیگر اثبات: کانون سهمی را به نقطه‌ی T وصل می کنیم.



بنابر تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است. از اینجا نتیجه می شود که :

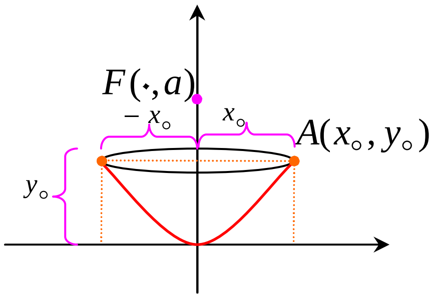
$$\angle MTF = \angle MFT$$

از طرفی $MT \parallel FH$ و FT خط مورب می باشد. پس بنا به قضیه‌ی خطوط موازی

$$\angle MTF = \angle TFH$$

از این دو نتیجه معلوم می شود که TF نیمساز زاویه‌ی NFH می باشد. اکنون بنابر قضیه‌ی نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{NT}=\frac{FH}{TH} \rightarrow \frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{\div ۲} \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$



۱۵ : یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده‌ی فاصله‌ی کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش، فاصله‌ی کانونی آن را به دست آورد. او به کمک دوستش تلاش کردند،فرمولی برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کانونی یک دیش پیدا کنند. بعد از مدتی به این نتیجه رسیدند که : ابتدا قطر دهانه-ی دیش را در خودش ضرب می کنیم و سپس حاصل ضرب را بر اندازه‌ی گودی(عمق) دیش تقسیم می کنیم و در آخر عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم می نماییم. حاصل فاصله‌ی کانونی دیش است. شما دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید. (فاصله‌ی رأس سهمی تا کانون آن را فاصله‌ی کانونی می نامند که قبلا اندازه‌ی آن را با p نمایش داده ایم.)

حل : با توجه به شکل، معلوم است که سهمی داده شده، یک سهمی قائم است و رأس آن روی مبدأ مختصات قرار دارد. پس معادله‌ی سهمی به صورت $x^۲=۴py$ می باشد. حال اگر $(x_\circ,y_\circ)$ نقطه ای روی سهمی باشد به راحتی می توان فاصله‌ی کانونی را به شکل زیر به دست آورد.

$$x_\circ{}^۲=۴py_\circ$$

$$\to p=\frac{x_\circ{}^۲}{۴y_\circ}$$

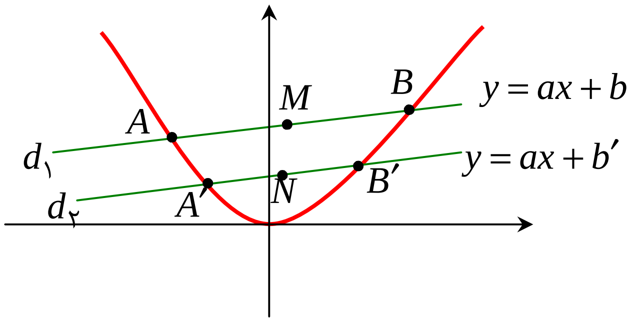
با توجه به روش ارائه شده، اگر دهانه‌ی دیش $۲x_\circ$ و عمق دیش $y_\circ$ باشد. بنا به روش مسئله داریم.

$$\frac{\frac{۲x_\circ\times ۲x_\circ}{y_\circ}}{۱۶}=\frac{۴x_\circ{}^۲}{۱۶y_\circ}=\frac{x_\circ{}^۲}{۴y_\circ}=p$$

که این نتیجه با اثبات فوق مطابقت دارد.

اکنون بر این اساس اگر قطر یک دیش گیرنده‌ی امواج تلویزیونی ۹۶ و عمق آن ۸ سانتی متر باشد. فاصله‌ی کانونی آن را حساب کنید.

۱۶ : سهمی $y=x^2$ و دو خط موازی $d_1: y=ax+b$ و $d_2: y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع اند در نظر بگیرید.



الف : معادله‌ی درجه‌ی دوّمی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و d_2 سهمی $y=x^2$ باشد.

ب : فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه‌ی M وسط پاره خط باشد. مختصات نقطه‌ی M را به دست آورید.

پ : مراحل(الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه‌ی N (نقطه‌ی وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

ت : خط MN نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

ث : با استفاده از نتایج قسمت های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

حل :

الف :

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2 \\ y&=ax+b \end{aligned}\right\} \rightarrow x^2=ax+b \rightarrow x^2-ax-b=0$$

$$\xrightarrow{x_A=\alpha,\, x_B=\beta} A\left|\begin{matrix}\alpha \\ \alpha^2\end{matrix}\right. ,\ B\left|\begin{matrix}\beta \\ \beta^2\end{matrix}\right.$$

ب :

$$x^2-ax-b=0 \Rightarrow S=\alpha+\beta=a \quad , \quad P=\alpha\beta=-b$$

$$M\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{\alpha+\beta}{۲}=\dfrac{a}{۲}\\[2mm] \dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{\alpha^۲+\beta^۲}{۲}=\dfrac{S^۲-۲P}{۲}=\dfrac{a^۲+۲b}{۲}\end{array}\right.\rightarrow M\left|\begin{array}{l}\dfrac{a}{۲}\\[2mm] \dfrac{a^۲+۲b}{۲}\end{array}\right.$$

پ :

$$\left.\begin{array}{l}y=x^۲\\ y=ax+b'\end{array}\right\}\rightarrow x^۲=ax+b'\rightarrow x^۲-ax-b'=۰$$

$$\xrightarrow{x_{A'}=\alpha',x_{B'}=\beta'} A'\left|\begin{array}{l}\alpha'\\ \alpha'^۲\end{array}\right. ,\ B'\left|\begin{array}{l}\beta'\\ \beta'^۲\end{array}\right.$$

$$x^۲-ax-b'=۰\Rightarrow S=\alpha'+\beta'=a \quad , \quad P'=\alpha'\beta'=-b'$$

$$N\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_{A'}+x_{B'}}{۲}=\dfrac{\alpha'+\beta'}{۲}=\dfrac{a}{۲}\\[2mm] \dfrac{y_{A'}+y_{B'}}{۲}=\dfrac{\alpha'^۲+\beta'^۲}{۲}=\dfrac{S'^۲-۲P'}{۲}=\dfrac{a^۲+۲b'}{۲}\end{array}\right.\rightarrow N\left|\begin{array}{l}\dfrac{a}{۲}\\[2mm] \dfrac{a^۲+۲b'}{۲}\end{array}\right.$$

ت : موازی اند. زیرا M و N دارای طول های مساوی اند و معادله‌ی خط MN بصورت $x=\dfrac{a}{۲}$ است.

ث : ابتدا دو خط موازی مانند d و d' را چنان رسم می کنیم که سهمی را در نقاط B و A و B' و A' قطع کند. سپس وسط های پاره خط های AB و $A'B'$ را به ترتیب M و N می نامیم. از رأس سهمی خط L را موازی خط MN رسم می کنیم. خط L پاسخ مسئله است.

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: **@amerimath**

سایت : **www.mathtower.ir**