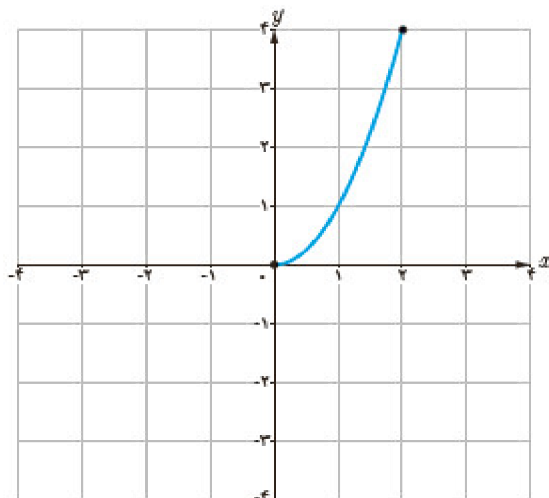


۱- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آن‌ها را با نمودار  $f$  مقایسه کنید.

الف)  $y = f(-x)$

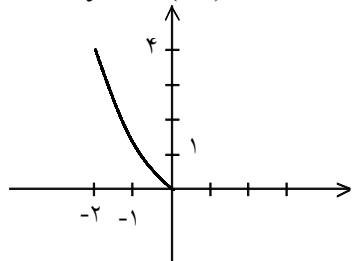
ب)  $y = -f(x)$

پ)  $y = -f(-x)$



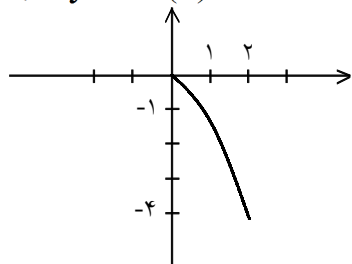
« پاسخ »

الف)  $y = f(-x)$



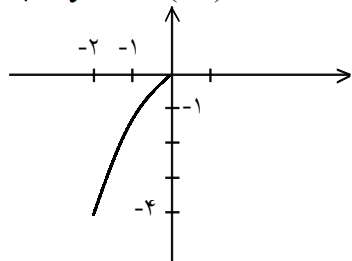
رسم: قرینه نسبت به محور  $y$  ها

ب)  $y = -f(x)$



رسم: قرینه نسبت به محور  $x$  ها

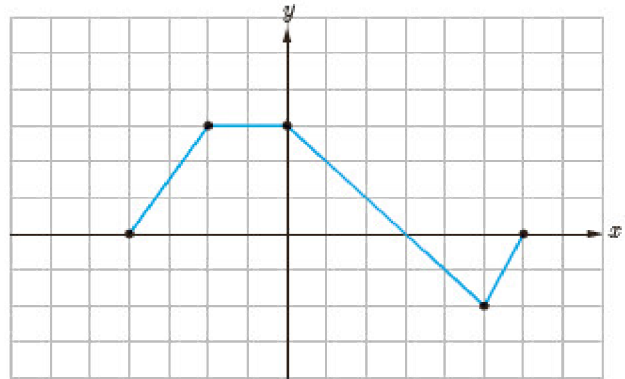
پ)  $y = -f(-x)$



رسم: هم نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم و هم نسبت به محور  $y$  ها قرینه می‌کنیم.

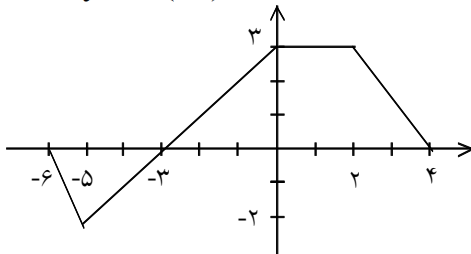
۲- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

- الف)  $y = f(-x)$
- ب)  $y = 2f(x-1)$
- پ)  $y = -f(x) + 2$
- ت)  $y = f(2x-1)$
- ث)  $y = f(3-x)$



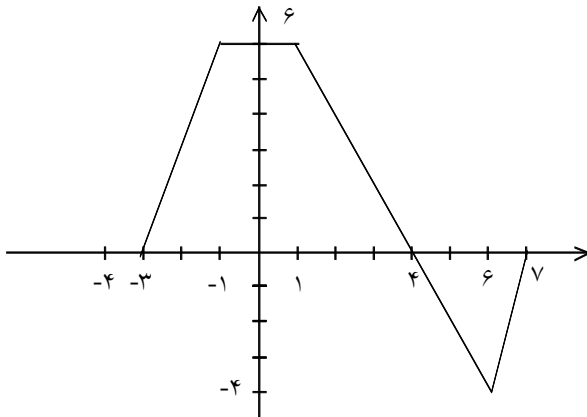
« پاسخ »

الف)  $y = f(-x)$



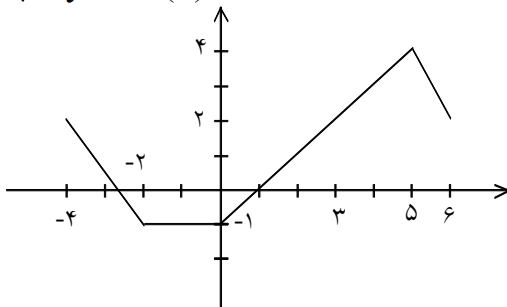
رسم: قرینه نسبت به محور  $y$  ها

ب)  $y = 2f(x-1)$



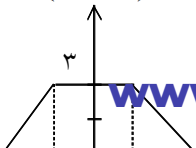
رسم: یک واحد در راستای افقی به راست سپس انبساط عمودی با ضریب انبساط ۲

پ)  $y = -f(x) + 2$



رسم: قرینه نسبت به محور  $x$  ها و سپس ۲ واحد در راستای قائم به بالا

ت)  $y = f(2x-1)$



۳- هریک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع  $y = \sqrt{x}$  هستند. هریک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف)  $y = \sqrt{2+x}$

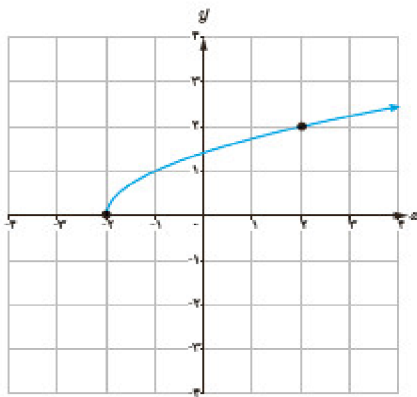
ب)  $y = 2 + \sqrt{x}$

پ)  $y = -2\sqrt{x}$

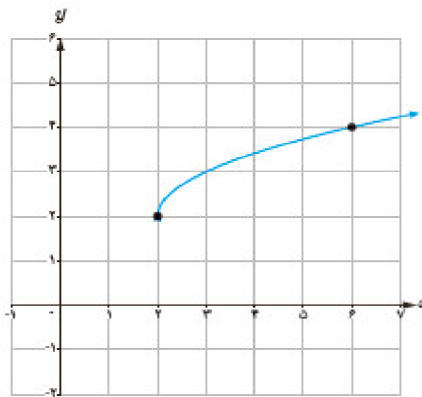
ت)  $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

ث)  $y = 2 + \sqrt{x-2}$

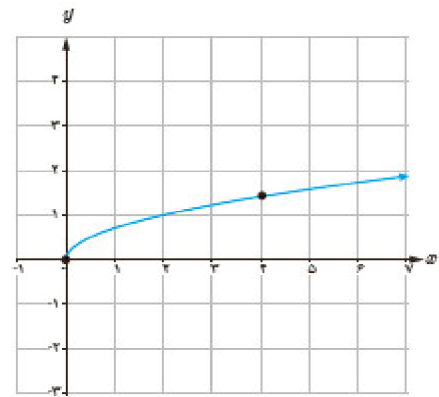
ج)  $y = \sqrt{-2x}$



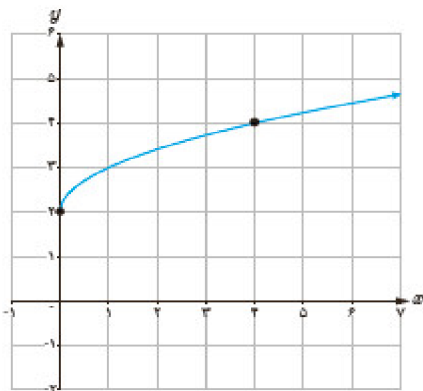
(a)



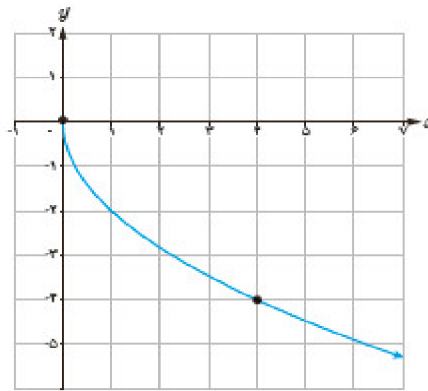
(b)



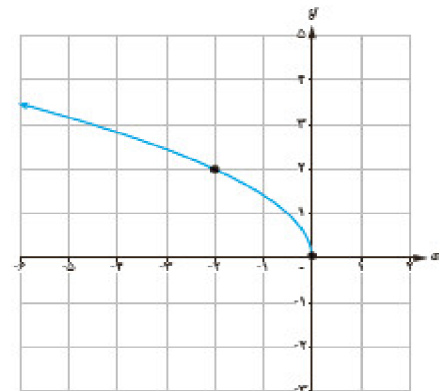
(c)



(d)



(e)



(f)

« پاسخ »

الف)  $y = \sqrt{2+x} \Rightarrow a$

ب)  $y = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow d$

پ)  $y = -2\sqrt{x} \Rightarrow e$

ت)  $y = \sqrt{\frac{x}{2}} \Rightarrow c$

ث)  $y = 2 + \sqrt{x-2}$

- ۴- تابع  $f(x) = 2x - 1$  را در نظر بگیرید.  
 الف) دامنه تابع  $f(2x)$  را مشخص کنید. (در صورتی که دامنه  $f(x)$  را  $[-2, 7]$  در نظر بگیریم.)  
 ب) نمودار تابع  $f\left(-\frac{x}{2}\right)$  را رسم کنید.

« پاسخ »

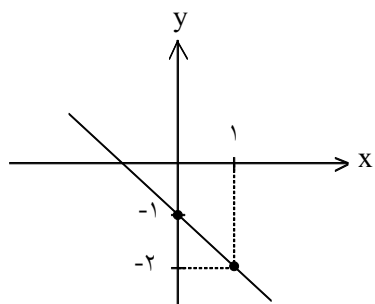
(الف)

$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 7 \xrightarrow{x \rightarrow 2x} -2 \leq 2x \leq 7 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq 3/5$$

$$D_{f(2x)} = [-1, 3/5]$$

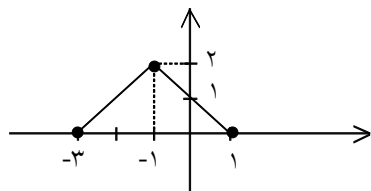
$$f\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\left(-\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow f\left(-\frac{x}{2}\right) = -x - 1$$

(ب)

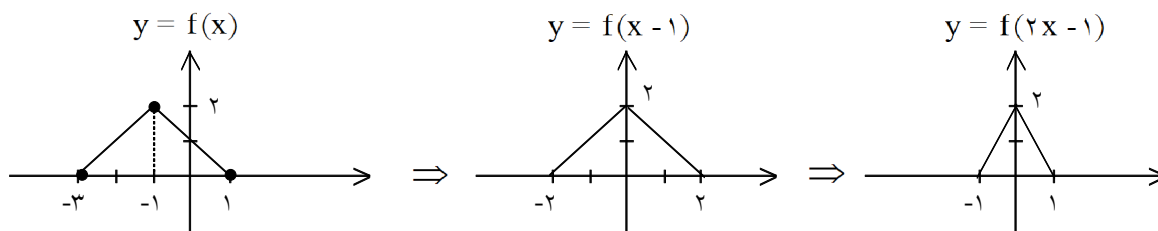


x	0	1
y	-1	-2

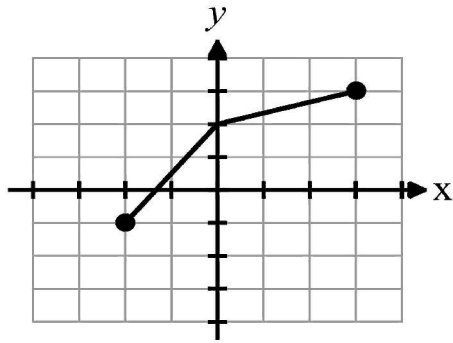
- ۵- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(2x - 1)$  را رسم کنید.



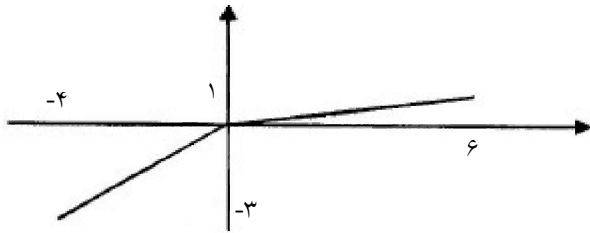
« پاسخ »



۶- با استفاده از نمودار تابع  $f$  نمودار تابع  $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$  را رسم کنید.



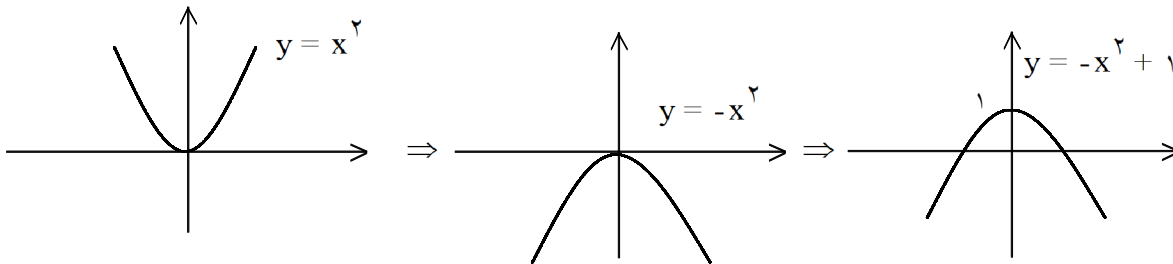
« پاسخ »



رسم درست شکل (۰/۷۵) نمره

۷- ابتدا نمودار  $y = -x^2 + 1$  را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. در صورتی که دامنه آن  $[0, 2]$  باشد در این صورت برد تابع را بنویسید.

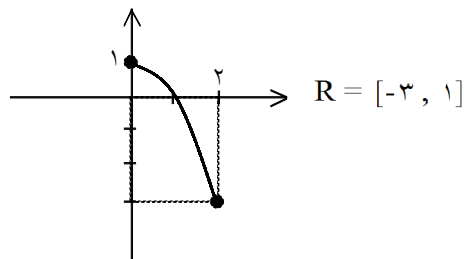
« پاسخ »



$$D = \mathbb{R}$$

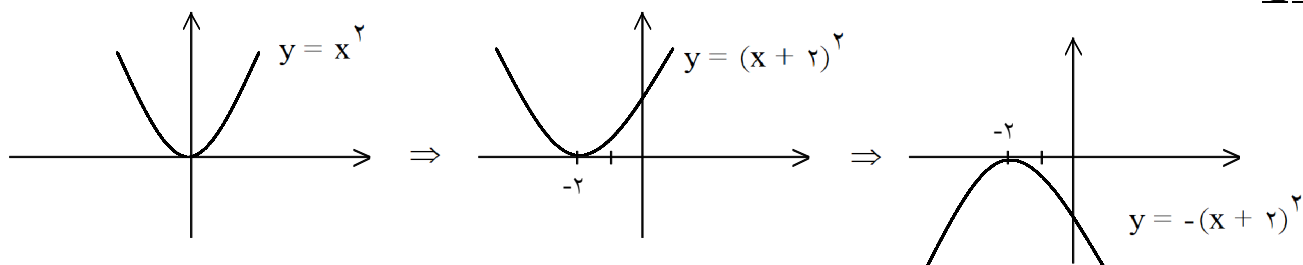
$$R = (-\infty, 1]$$

x	0	2
y	1	-3



۸- ابتدا نمودار  $y = -(x + 2)^2$  را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. در صورتی که دامنه آن  $[-1, -4]$  باشد در این صورت برد تابع را بیابید.

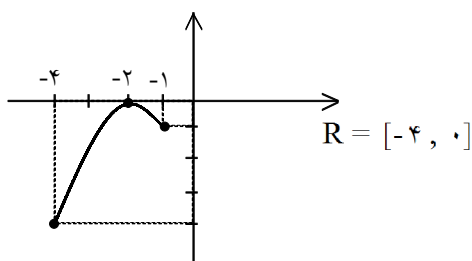
« پاسخ »



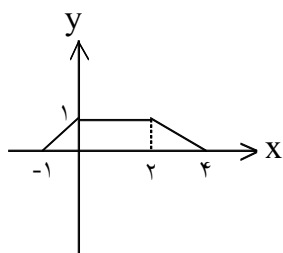
$$D = \mathbb{R}$$

$$R = (-\infty, 0]$$

x	-4	-2	-1
y	-4	0	-1



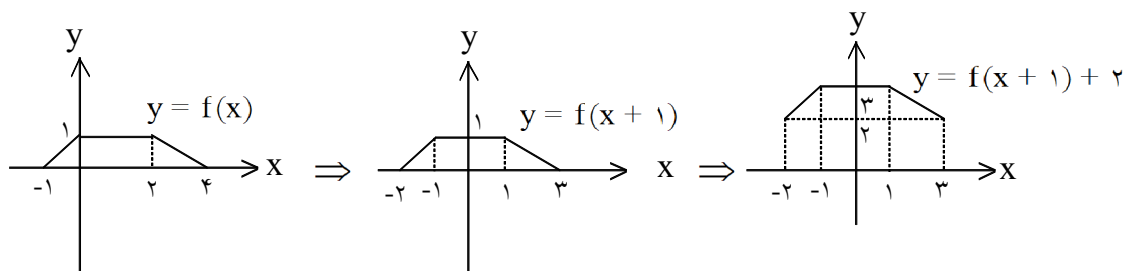
۹- نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $y = f(x + 1) + 2$  را به کمک انتقال رسم کنید.



« پاسخ »

۱ نمره

برای رسم نمودار خواسته شده به کمک انتقال، ابتدا نمودار داده شده را یک واحد به سمت چپ و سپس دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



۱۰- درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

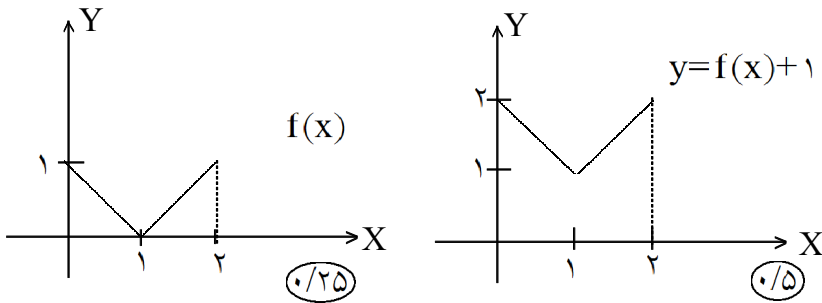
اگر دامنه‌ی تابع  $f$  برابر با  $[-۱, ۳]$  باشد، دامنه‌ی تابع  $g(x) = -۳f(۲x)$  بازه‌ی  $\left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}\right]$  است.

« پاسخ »

درست (۰/۲۵)

۱۱- ابتدا نمودار تابع  $f(x) = |x-۱|$  را با دامنه‌ی  $[۰, ۲]$  رسم کنید. سپس نمودار  $y = f(x) + ۱$  را رسم کرده و برد آن را به دست آورید.

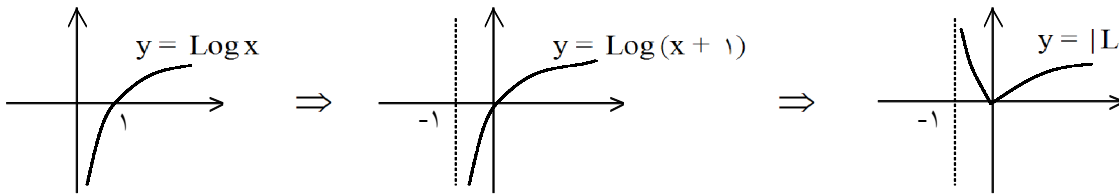
« پاسخ »



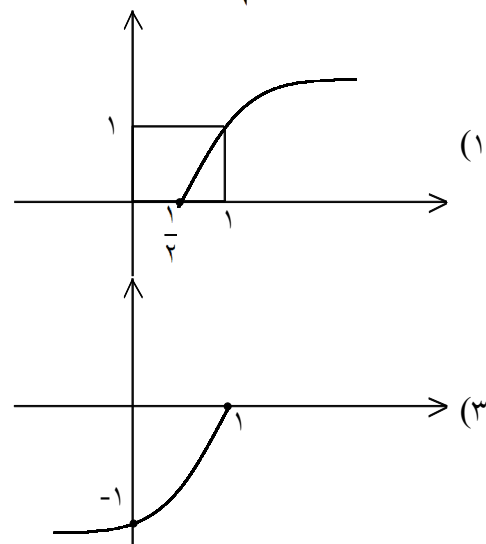
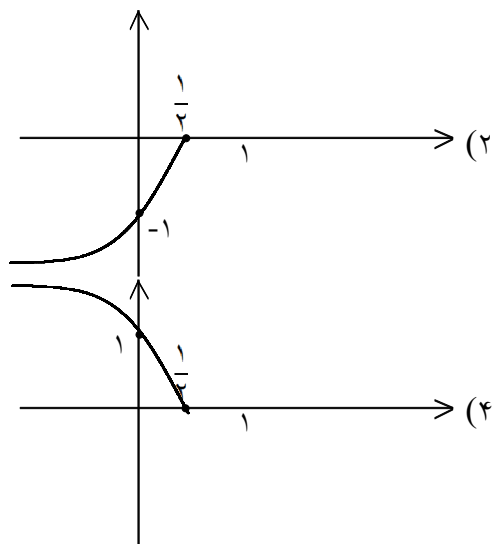
$$R_{f(x)+1} = [1, 2] \quad (۰/۵)$$

۱۲- نمودار تابع  $y = |\text{Log}(x + ۱)|$  را رسم کنید.

« پاسخ »

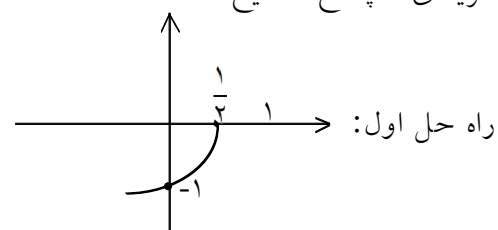


۱۳- نمودار تابع  $y = -\sqrt{1 - 2x}$  کدام است؟

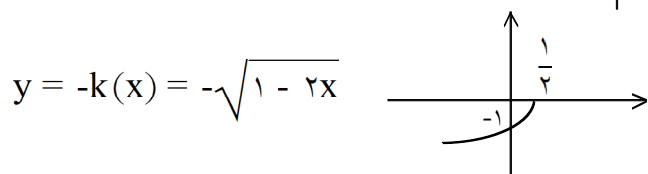
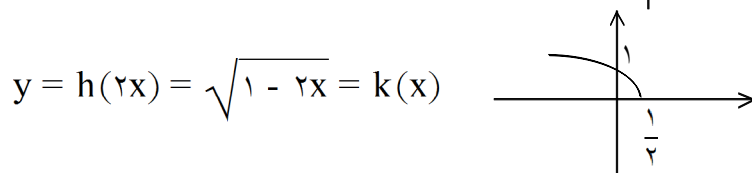
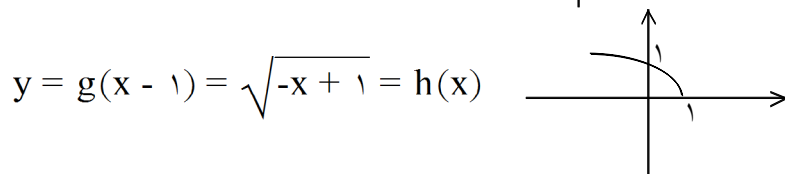
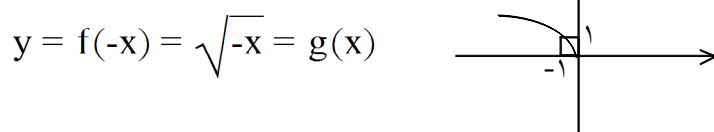
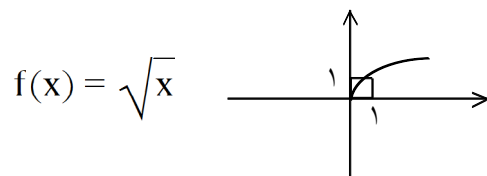


« پاسخ »

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$y = -\sqrt{1 - 2x} \quad 1 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{1}{2} \\ y & 0 \end{array}$$

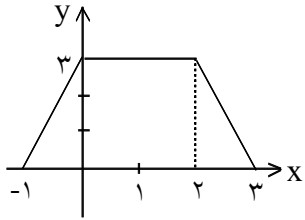


راه حل دیگر:

می‌توان نقاطی را که در هر شکل مشخص شده در معادله  $y = -\sqrt{1 - 2x}$  امتحان کرد و شکل درست را مشخص نمود.



نمودار تابع معین  $f$  در زیر داده شده است. به سؤال بعدی پاسخ دهید:



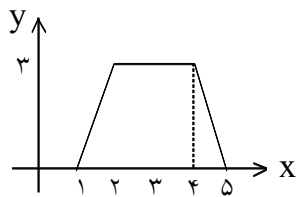
۱۴- دامنه و برد  $f$  را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$D_f = [-1, 3] \quad R_f = [0, 3]$$

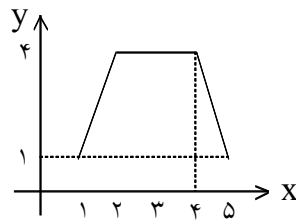
۱۵- نمودار تابع  $f(x - 2) + 1$  را به کمک انتقال، رسم نموده، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

« پاسخ »



$$f(x - 2)$$

$$D = [1, 5] \quad R = [0, 3]$$

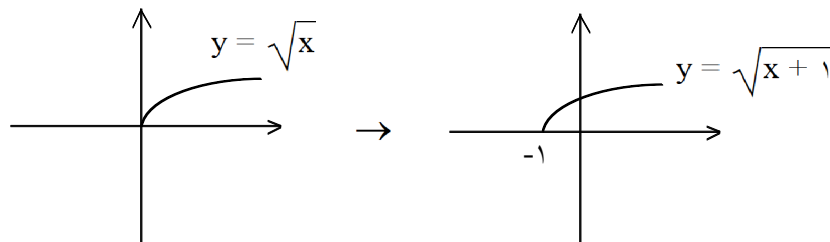


$$f(x - 2) + 1$$

۱۶- الف) نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.

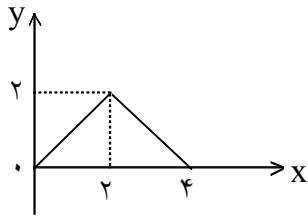
ب) به کمک انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x+1}$  را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

« پاسخ »



$$D_f = [-1, +\infty), R_f = [0, +\infty)$$

۱۷- نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $y = f(x)$  در شکل زیر رسم شده است:  
 نمودار توابع  $y = f(x + 2)$  و  $y = -2f(x) + 1$  را به کمک انتقال  
 رسم نموده و دامنه و برد هر یک را تعیین کنید.

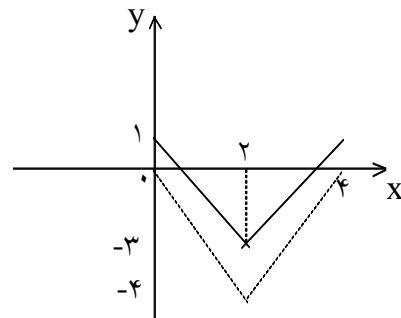
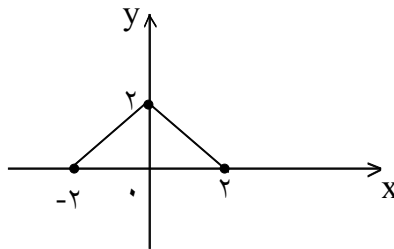


« پاسخ »

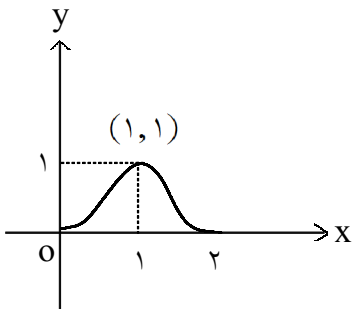
$$y = f(x + 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D = [-2, 2] \\ R = [0, 2] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D = [0, 4] \\ R = [-3, 1] \end{array} \right.$$



نمودار تابع معین  $f$  با دامنه  $[0, 2]$  و برد  $[0, 1]$  در شکل مقابل نشان داده شده است.  
 (به سوال بعدی پاسخ دهید)

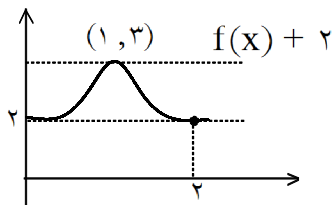


۱۸- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(x) + 2$$

« پاسخ »

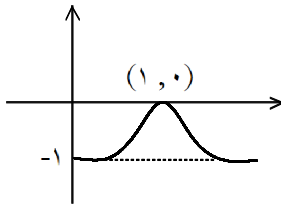
باید نمودار  $f$  دو واحد به بالا برده شود.



$$D_f = [0, 2] \quad R_f = [2, 3]$$

۱۹- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$f(x) - ۱$



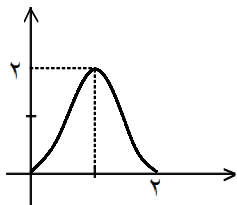
« پاسخ »

باید نمودار  $f$  یک واحد به پایین آورده شود.

$$D_f = [0, 2] \quad , \quad R_f = [-1, 0]$$

۲۰- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$۲f(x)$



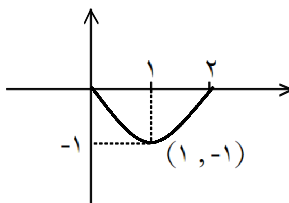
« پاسخ »

دامنه تغییر نمی کند ولی عرض نقاط ۲ برابر می شود.

$$D_f = [0, 2] \quad , \quad R_f = [0, 2]$$

۲۱- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$-f(x)$



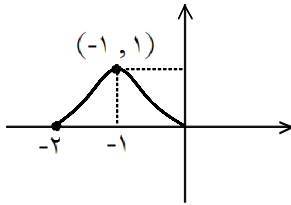
« پاسخ »

نمودار  $f$  باید نسبت به محور  $x$ ها قرینه شود.

$$D_f = [0, 2] \quad , \quad R_f = [-1, 0]$$

۲۲- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(x + 2)$$



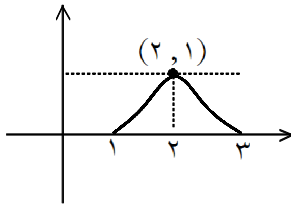
« پاسخ »

نمودار  $f$  را، ۲ واحد به سمت چپ می‌بریم.

$$D_f = [-2, 0] \quad R_f = [0, 1]$$

۲۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(x - 1)$$



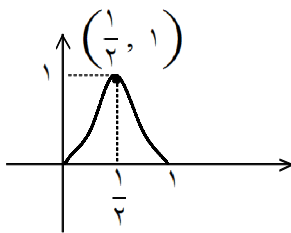
« پاسخ »

نمودار  $f$ ، یک واحد به سمت راست برده می‌شود.

$$D_f = [1, 3] \quad R_f = [0, 1]$$

۲۴- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(2x)$$



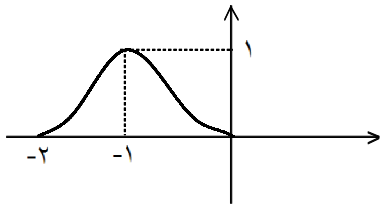
« پاسخ »

برد تابع تغییر نمی‌کند ولی:  $0 \leq 2x \leq 2 \rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$D_f = [0, 1] \quad R_f = [0, 1]$$

۲۵- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$f(-x)$



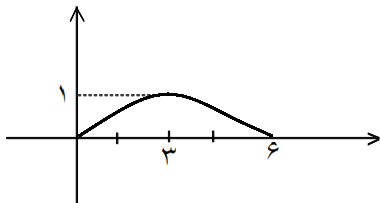
« پاسخ »

نمودار  $f$ ، نسبت به محور  $y$ ها قرینه می شود.

$$D_f = [-2, 0] \text{ , } R_f = [0, 1]$$

۲۶- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$f\left(\frac{x}{3}\right)$



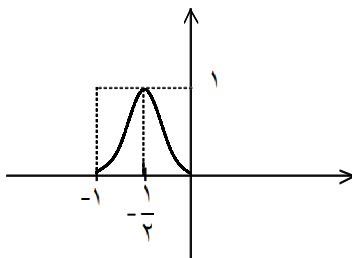
« پاسخ »

برد تابع تغییر نمی کند ولی:  $0 \leq \frac{x}{3} \leq 2 \rightarrow 0 \leq x \leq 6$

$$D_f = [0, 6] \text{ , } R_f = [0, 1]$$

۲۷- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$f(-2x)$



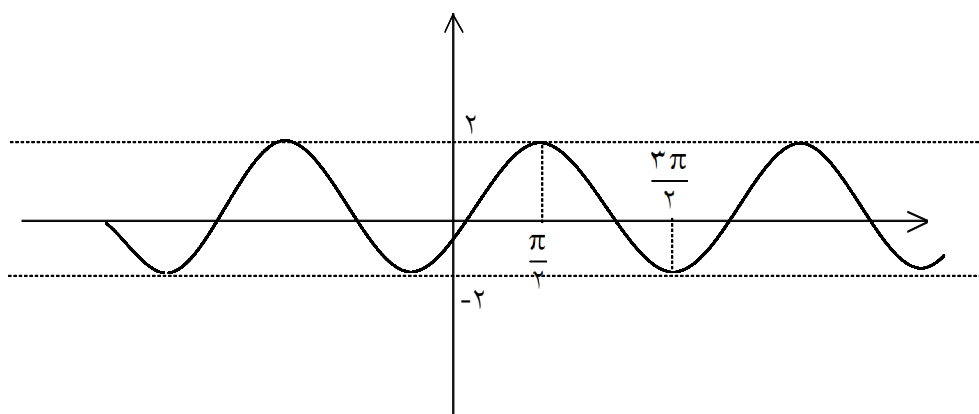
« پاسخ »

برد تابع تغییر نمی کند ولی:  $0 \leq -2x \leq 2 \rightarrow -1 \leq x \leq 0$

$$D_f = [-1, 0] \text{ , } R_f = [0, 1]$$

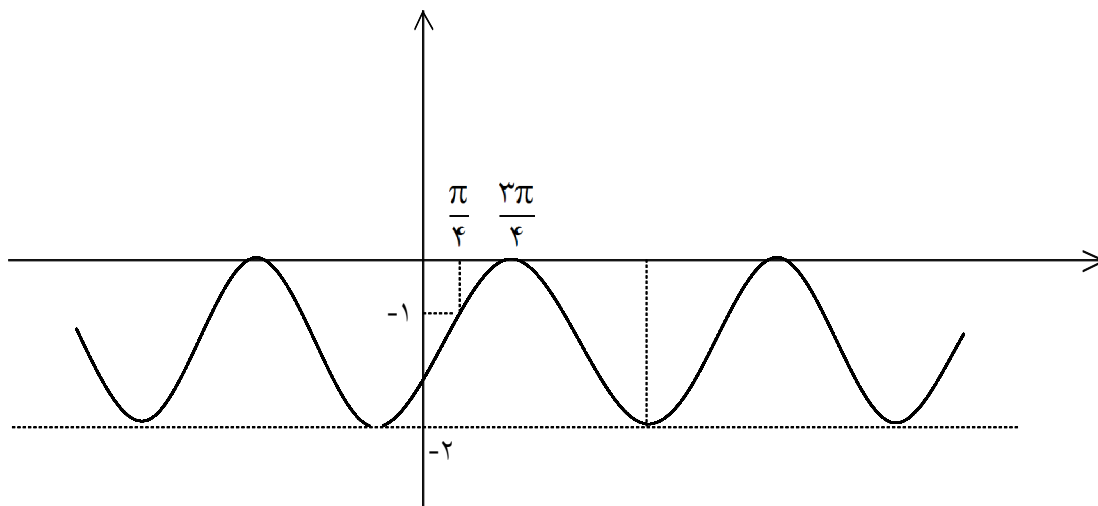
۲۸- تابع زیر را با استفاده از نمودار  $y = \text{Sin } x$  یا  $y = \text{Cos } x$  و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:  
 $y = ۲ \text{ Sin } x$

« پاسخ »



۲۹- تابع زیر را با استفاده از نمودار  $y = \text{Sin } x$  یا  $y = \text{Cos } x$  و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:  
 $y = \text{Sin} \left( x - \frac{\pi}{۴} \right) - ۱$

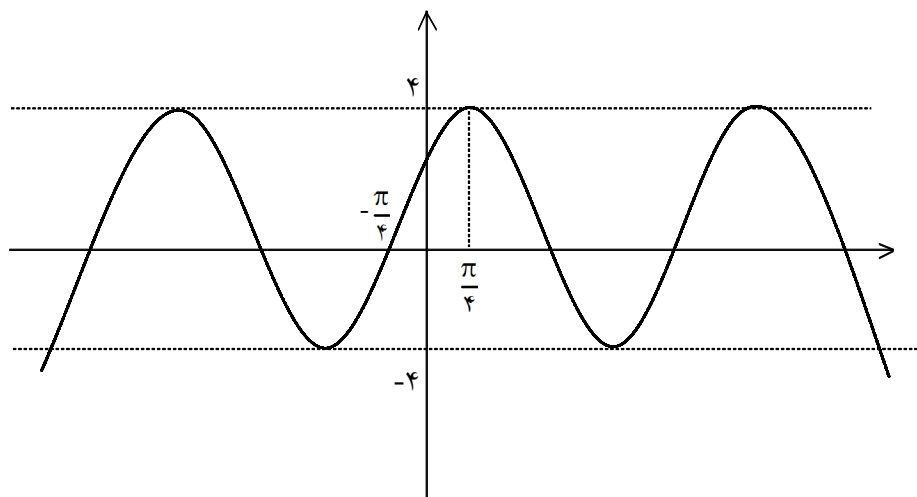
« پاسخ »



۳۰- تابع زیر را با استفاده از نمودار  $y = \sin x$  یا  $y = \cos x$  و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:

$$y = 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

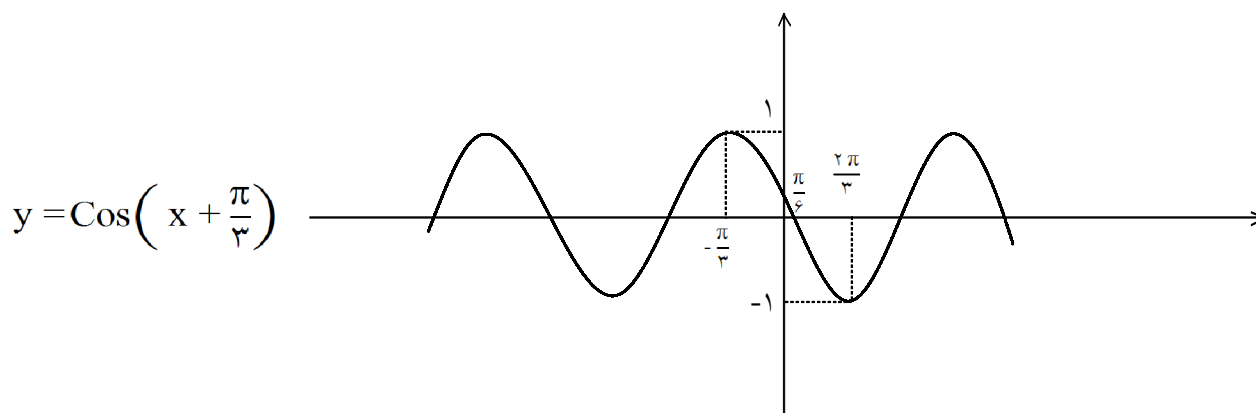
« پاسخ »



۳۱- تابع زیر را با استفاده از نمودار  $y = \sin x$  یا  $y = \cos x$  و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

« پاسخ »

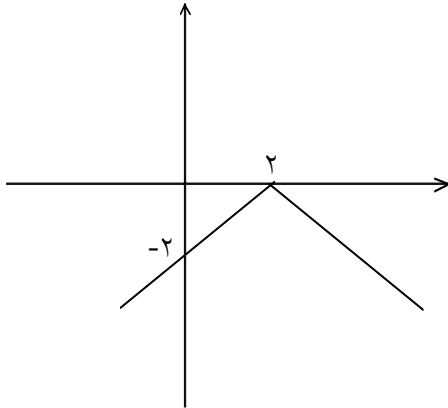


$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = -|x - 2|$$

۳۲- با استفاده از انتقال تابع، نمودار زیر را رسم کنید.

« پاسخ »



۳۳- هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف)  $x^6 - 1$  با عامل  $x - 1$

ب)  $x^6 - 1$  با عامل  $x + 1$

پ)  $x^5 + 32$  با عامل  $x + 2$

« پاسخ »

الف)  $x^6 - 1 = x^6 - 1^6 = (x - 1)(x^5 + 1x^4 + 1^2x^3 + 1^3x^2 + 1^4x + 1^5)$

$$= (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ب)  $x^6 - 1 = x^6 - 1^6 = (x + 1)(x^5 - 1x^4 + 1^2x^3 - 1^3x^2 + 1^4x - 1^5)$

$$= (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

پ)  $x^5 + 32 = (x^5 + 2^5) = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 2^2x^2 - 2^3x + 2^4)$

$$= (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

۳۴- مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای  $x^3 + ax^2 + bx + 1$  بر  $x - 2$  و  $x + 1$  بخش پذیر باشد.

« پاسخ »

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9$$

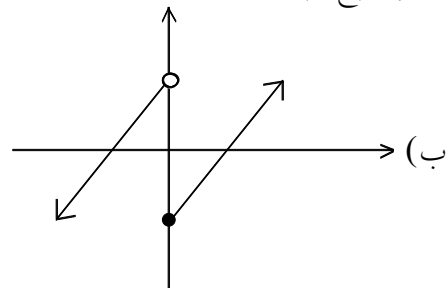
$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b = \frac{-3}{2}$$



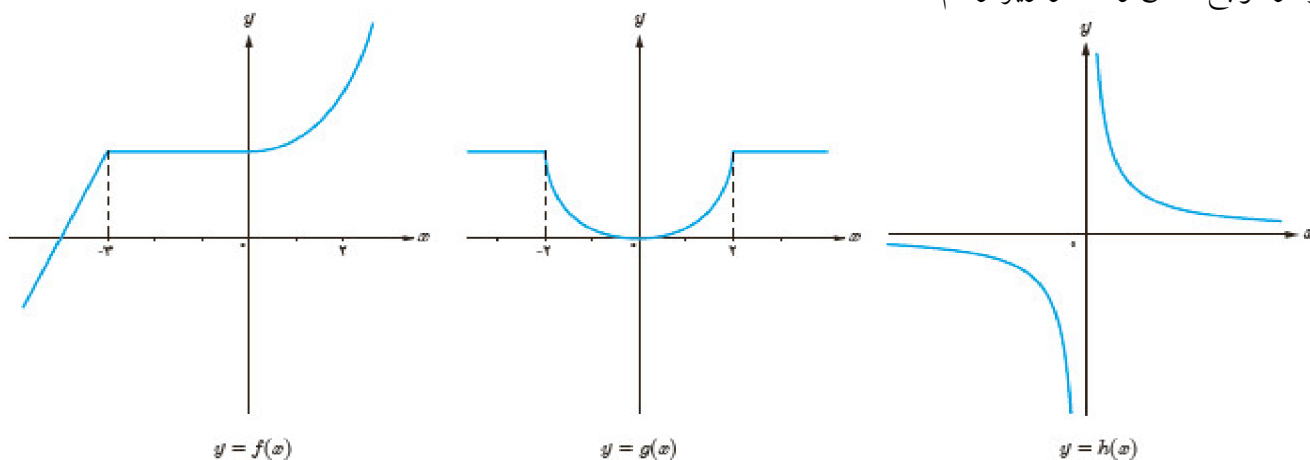
۳۵- الف) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟  
 ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در هریک از بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد ولی در  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی نباشد.

« پاسخ »

الف) تابع ثابت



۳۶- نمودار توابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  در زیر رسم شده‌اند.



الف) تابع  $f$  در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟  
 ب) تابع  $g$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟  
 پ) تابع  $h$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

« پاسخ »

الف) تابع  $f$  در بازه‌های  $[-3, -\infty)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی و در بازه  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  صعودی است.  
 ب) تابع  $g$  در بازه  $[-2, 0]$  اکیداً نزولی و در بازه  $(2, +\infty)$  و  $(-\infty, 0)$  نزولی است.  
 پ) تابع  $h$  در بازه‌های  $(0, +\infty)$  و  $(-\infty, 0)$  اکیداً نزولی است.

۳۷- به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) تابع روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; -2 < x < 1 \\ -2x - 5 & ; x \leq -2 \end{cases}$$

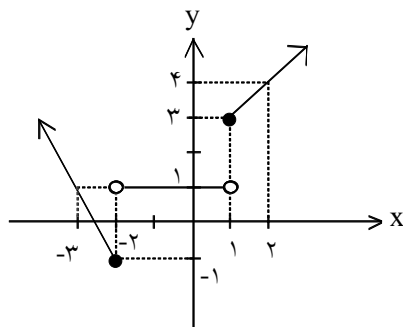
ب) بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; -2 < x < 1 \\ -2x - 5 & ; x \leq -2 \end{cases}$$

x	۱	۲
y	۳	۴
x	-۲	۱
y	۱	۱
x	-۲	-۳
y	-۱	۱

الف)



$(-\infty, -2] \Rightarrow$  نزولی

$(-2, 1) \Rightarrow$  ثابت

$[1, +\infty) \Rightarrow$  صعودی

ب)

۳۸- با رسم نمودار یکنوایی تابع را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

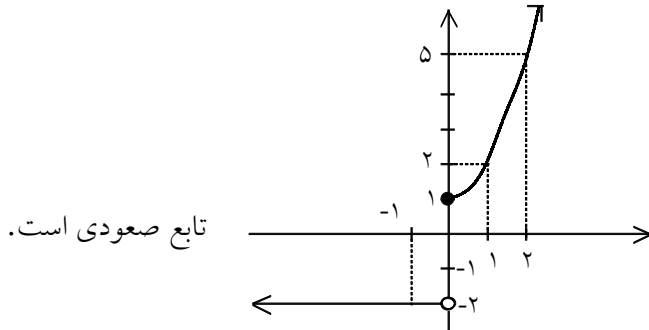
« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

$x$	0	1	2
$y$	1	2	5

$x$	0	-1
$y$	-2	-2



۳۹- با رسم نمودار یکنواپی تابع را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 2 & -1 < x < 2 \\ x+1 & x \leq -1 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 2 & -1 < x < 2 \\ x+1 & x \leq -1 \end{cases}$$

$x$	۲	۳
$y$	۴	۹

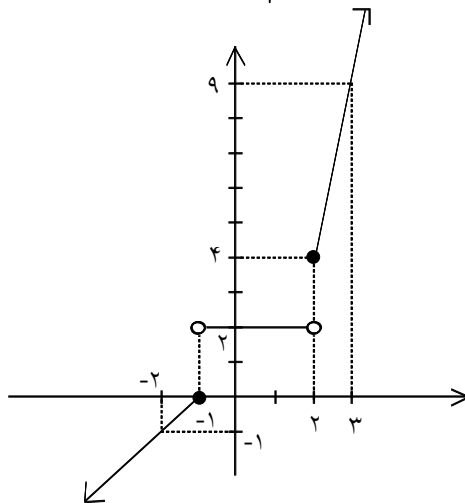
  

$x$	-۱	۲
$y$	۲	۲

$x$	-۱	-۲
$y$	۰	-۱

تابع صعودی است.



۴۰- هریک از چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید.

الف)  $x^5 + 1$  با عامل  $x + 1$       ب)  $x^6 - 1$  با عامل  $x - 1$

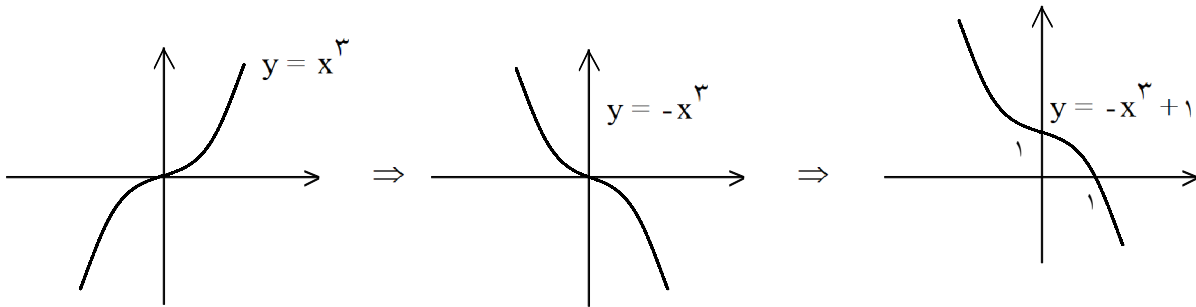
« پاسخ »

الف)  $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$  (۰/۵)

ب)  $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  (۰/۵)

۴۱- نمودار  $y = -x^3 + 1$  را به کمک انتقال رسم کنید.

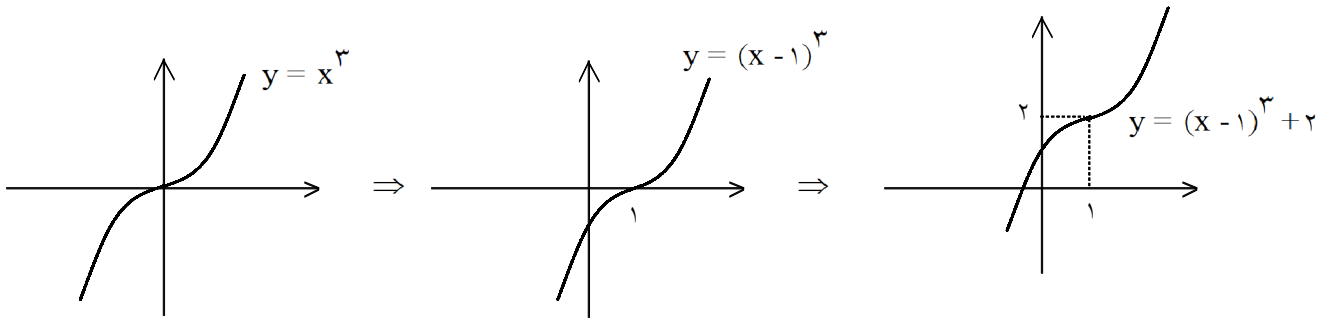
« پاسخ »



۴۲- نمودار  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$  را به کمک انتقال رسم کنید.

« پاسخ »

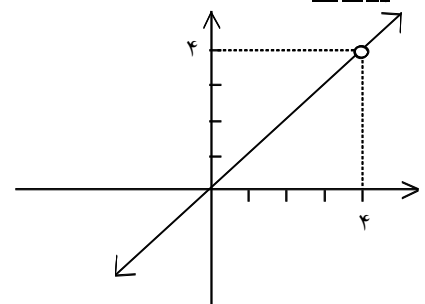
$$y = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{\text{اتحاد مکعب دو جمله ای}} + 2 \Rightarrow y = (x - 1)^3 + 2$$



۴۳- اگر  $f(x) = \frac{x^2 + ax + a + 4}{x - 4}$  تابع همانی باشد، مقدار  $a$  را مشخص کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} f(x) = x (x \neq 4) &\Rightarrow \frac{x^2 + ax + a + 4}{x - 4} = x \\ \Rightarrow \cancel{x^2} + ax + a + 4 &= \cancel{x^2} - 4x \Rightarrow ax + 4x + a + 4 = 0 \\ x(a + 4) + a + 4 &= 0 \Rightarrow (a + 4)(x + 1) = 0 \\ \Rightarrow a + 4 = 0 &\Rightarrow a = -4 \end{aligned}$$



۴۴- در تابع خطی  $M(x) = 2/89x + 70/64$  اگر  $x$  طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) و  $M(x)$  طول قد یک انسان بزرگسال (مرد) باشد.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۰ سانتی متر باشد، طول قد او چه قدر است؟  
 ب) اگر قد یک مرد ۱۷۰ سانتی متر باشد، طول استخوان بازوی او چه قدر است؟

« پاسخ »

(الف)

$$x = 30 \Rightarrow M(30) = 2/89(30) + 70/64 = 86/7 + 70/64 = 157/34 \text{ cm}$$

(ب)

$$M(x) = 170 \Rightarrow 2/89x + 70/64 = 170 \Rightarrow 2/89x = 170 - 70/64 \Rightarrow x = 34/38 \text{ cm}$$

۴۵- جاهای خالی را پر کنید.

تابع	$f(x) = 3x$	$g(x) = 2x - 1$	$h(x) = x^2$	$t(x) = 5 - x$
دامنه تابع	$[-1, 3]$		$[-1, 3]$	$[-2, 4]$
برد تابع		$[-1, 7]$		

« پاسخ »

$$f(x) = 3x$$

$$D_f: -1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 9 \Rightarrow R_f = [-3, 9]$$

$$g(x) = 2x - 1$$

$$R_g = -1 \leq y \leq 7 \xrightarrow{+1} -1 \leq 2x - 1 \leq 7 \xrightarrow{\div 2} 0 \leq 2x \leq 8 \xrightarrow{\div 2} 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_g = [0, 4]$$

$$h(x) = x^2$$

$$D_h: -1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} 0 \leq x^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq y \leq 9 \Rightarrow R_h = [0, 9]$$

$$t(x) = 5 - x$$

$$D_t: -2 \leq x \leq 4 \xrightarrow{\times (-1)} -4 \leq -x \leq 2 \xrightarrow{+5} 1 \leq 5 - x \leq 7 \Rightarrow 1 \leq y \leq 7 \Rightarrow R_t = [1, 7]$$

تابع	$f(x) = 3x$	$g(x) = 2x - 1$	$h(x) = x^2$	$t(x) = 5 - x$
دامنه تابع	$[-1, 3]$	$[0, 4]$	$[-1, 3]$	$[-2, 4]$
برد تابع	$[-3, 9]$	$[-1, 7]$	$[0, 9]$	$[1, 7]$

۴۶- اگر  $2f(x) + f(1) = 5x + 4$  باشد ضابطه‌ی  $f(x)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x=1} 2f(1) + f(1) &= 5 + 4 \Rightarrow 3f(1) = 9 \Rightarrow f(1) = 3 \\ 2f(x) + 3 &= 5x + 4 \Rightarrow 2f(x) = 5x + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{5x + 1}{2} \end{aligned}$$

۴۷- اگر  $f$  یک تابع خطی باشد،  $f(2x + 3) + f(2) = 6x - 1$ ، آن‌گاه  $f(x)$  و  $f(3)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$f$  یک تابع خطی است بنابراین به صورت  $f(x) = ax + b$  در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} f(2x + 3) + f(2) &= 6x - 1 \Rightarrow a(2x + 3) + b + 2a + b = 6x - 1 \\ 2ax + 3a + b + 2a + b &= 6x - 1 \Rightarrow 2ax + 5a + 2b = 6x - 1 \\ \begin{cases} 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \\ 5a + 2b = -1 \end{cases} &\xrightarrow{a=3} 15 + 2b = -1 \Rightarrow 2b = -16 \Rightarrow b = -8 \\ f(x) = 3x - 8 &\Rightarrow f(3) = 9 - 8 = 1 \end{aligned}$$

۴۸-  $m$  را طوری تعیین کنید که خط  $y = -2mx - 7$  در یک نقطه بر سهمی  $y = (m + 2)x^2 - 4mx - 6$  مماس باشد.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} (m + 2)x^2 - 4mx - 6 &= -2mx - 7 \Rightarrow (m + 2)x^2 - 2mx + 1 = 0, \Delta = 0 \\ 4m^2 - 4(m + 2) &= 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

۴۹- اگر  $f(x) + f(1) = 3x + 9$ ، آن‌گاه  $f(x)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x=1} f(1) + f(1) &= 12 \Rightarrow 2f(1) = 12 \Rightarrow f(1) = 6 \xrightarrow{f(1)=6} f(x) + 6 = 3x + 9 \\ \Rightarrow f(x) &= 3x + 3 \end{aligned}$$

۵۰- اگر  $f(x) = (a - 1)x^2 + bx + 7$  یک تابع خطی گذرنده از  $A(1, 9)$  باشد  $a, b$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$f(x)$  یک تابع خطی است بنابراین باید ضریب  $x^2$  صفر شود.

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = bx + 7$$

تابع گذرنده از  $A(1, 9)$  است، بنابراین در ضابطه آن قرار می‌دهیم.

$$A(1, 9) \Rightarrow 9 = b(1) + 7 \Rightarrow b = 2$$

۵۱- اگر خط  $y = -4x + m - 1$  بر سهمی  $y = (m - 1)x^2 + 2x + 3m$  در یک نقطه مماس باشد، مقدار  $m$  را حساب کنید.

« پاسخ »

با تساوی قرار دادن آن‌ها باید  $\Delta = 0$  باشد.

$$(m - 1)x^2 + 2x + 3m = -4x + m - 1 \Rightarrow (m - 1)x^2 + 6x + 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 36 - 4(m - 1)(2m + 1) = 0 \xrightarrow{\div (-4)} -9 + (m - 1)(2m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 + m - 2m - 1 - 9 = 0 \Rightarrow 2m^2 - m - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 5/2 \end{cases}$$

۵۲- حدود  $m$  را چنان بیابید که خط  $y = 1 - mx$ ، سهمی  $y = x^2 - 5x + 10$  را قطع نکند؟

« پاسخ »

باید دو تابع را برابر قرار داد و بعد از تشکیل معادله درجه ۲ باید  $\Delta < 0$  باشد.

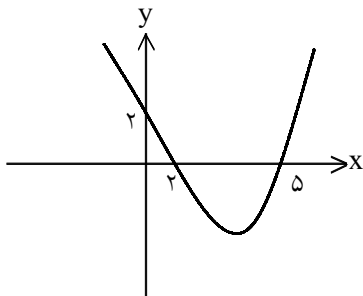
$$x^2 - 5x + 10 = 1 - mx \Rightarrow x^2 + mx - 5x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + (m - 5)x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (m - 5)^2 - 36 < 0 \Rightarrow (m - 5)^2 < 36 \Rightarrow |m - 5| < 6 \Rightarrow -6 < m - 5 < 6$$

$$\xrightarrow{+5} -1 < m < 11$$



۵۳- معادله‌ی سهمی زیر را بنویسید.



« پاسخ »

سهمی محور X ها را در نقطه‌ی ۲ و ۵ قطع کرده است و برای معادله سهمی داریم:

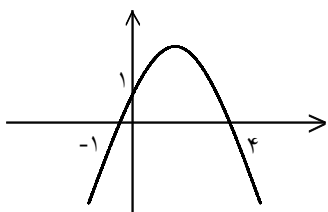
$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow \text{محل برخورد با محور X ها } x_1, x_2$$

$$y = a(x - 2)(x - 5) \xrightarrow{\text{از نقطه } A(0, 2) \text{ می‌گذرد}} 2 = a(0 - 2)(0 - 5) \Rightarrow 10a = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}(x - 2)(x - 5) = \frac{1}{5}(x^2 - 7x + 10)$$

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{5}x + 2$$



۵۴- معادله‌ی سهمی شکل مقابل را حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = ax^2 + bx + c \text{ معادله سهمی}$$

$$A(0, 1) \Rightarrow 1 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 1$$

$$B(-1, 0) \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 1 \Rightarrow a - b = -1$$

$$C(4, 0) \Rightarrow 0 = a(4)^2 + b(4) + 1 \Rightarrow 16a + 4b = -1$$

$$4 \times \begin{cases} a - b = -1 \\ 16a + 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = -4 \\ 16a + 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow 20a = -5 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$

۵۵- مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت  $۸x^۳ + ۴x^۲ - kx - ۸$  بر  $۲x - ۱$  بخش پذیر باشد.

« پاسخ »

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$R = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - k\left(\frac{1}{2}\right) - 8 = 0 \Rightarrow \frac{-k}{2} = 6 \Rightarrow k = -12$$

۵۶- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(9a^2 + 6a - 7) \div (3a - 2)$$

« پاسخ »

$$\begin{array}{r} 9a^2 + 6a - 7 \quad | \quad 3a - 2 \\ \underline{-9a^2 + 6a} \quad \quad \quad | \quad 3a + 4 \\ 12a - 7 \quad \quad \quad \quad | \\ \underline{-12a + 8} \quad \quad \quad \quad | \\ 1 \end{array}$$

۵۷- مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای  $P(x) = 2x^3 - mx^2 + 2x + 1$  بر  $2x + 1$  بخش پذیر باشد.

« پاسخ »

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \left(\frac{0}{25}\right) \Rightarrow -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}m - 1 + 1 = 0 \quad \left(\frac{0}{25}\right) \Rightarrow m = -1 \quad \left(\frac{0}{25}\right)$$

۵۸- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که سهمی  $f(x) = ax^2 + bx$  از نقطه‌ی (۳, ۵) بگذرد و تساوی  $f(-1) = 3$  برقرار باشد.

« پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} (3, 5) \Rightarrow 5 = 9a + 3b \quad \left(\frac{0}{25}\right) \\ (-1, 3) \Rightarrow 3 = a - b \quad \left(\frac{0}{5}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{6} \quad \left(\frac{0}{25}\right) \\ b = -\frac{11}{6} \quad \left(\frac{0}{25}\right) \end{cases}$$

۵۹- سهمی به معادله  $f(x) = ax^2 + bx + c$  مفروض است، مقادیر  $a, b, c$  را طوری بیابید که این سهمی محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ و محور  $x$  ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند و از نقطه‌ی  $M(1, 4)$  نیز بگذرد.

« پاسخ »

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$A(0, 1) \Rightarrow 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow 1 = c \quad (0/25)$$

$$\left. \begin{aligned} B(-1, 0) &\Rightarrow 0 = a - b + 1 \Rightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \\ M(1, 4) &\Rightarrow 4 = a + b + 1 \Rightarrow \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad (0/25), (0/25)$$

۶۰- اگر  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد،  $a$  و  $b$  و  $c$  را طوری بیابید که سهمی محور  $x$  ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ی ۱- قطع کند و از نقطه‌ی  $(1, 3)$  بگذرد.

« پاسخ »

$$(2, 0) \in \text{سهمی} \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c \quad (0/25)$$

$$(0, -1) \in \text{سهمی} \Rightarrow -1 = c \quad (0/25) \quad \begin{cases} 9a + 3b = 2 \\ 4a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{6} \quad (0/25) \quad b = +\frac{1}{6} \quad (0/25)$$

$$(3, 1) \in \text{سهمی} \Rightarrow 1 = 9a + 3b - 1 \quad (0/25)$$

۶۱-  $m$  را چنان بیابید که چندجمله‌ای  $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + mx - 3$  بر  $2x + 1$  بخش پذیر باشد.

« پاسخ »

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + m\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} = -5 \Rightarrow m = -10$$

۶۲-  $a, b$  را چنان بیابید که چند جمله‌ای  $3 - 2bx + ax^2 + x^3$  بر  $x - 3$  بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم بر  $x - 1$  برابر ۴- باشد.

« پاسخ »

$$P(x) = x^3 + ax^2 + 2bx - 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(3) = 0 \\ P(1) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(3) = 27 + 9a + 6b - 3 = 0 \\ P(1) = 1 + a + 2b - 3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 6b + 24 = 0 \\ a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$