# حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل دوم : مثلثات

به نام خدا

## پایه دوازدهم ریاضی

## فصل دوم: مثلثات

## درس اول: تناوب و تانژانت

## قسمت اول: تناوب

## جلسه اول: صفحات ۲۴ و۲۵

**مدرس:** سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

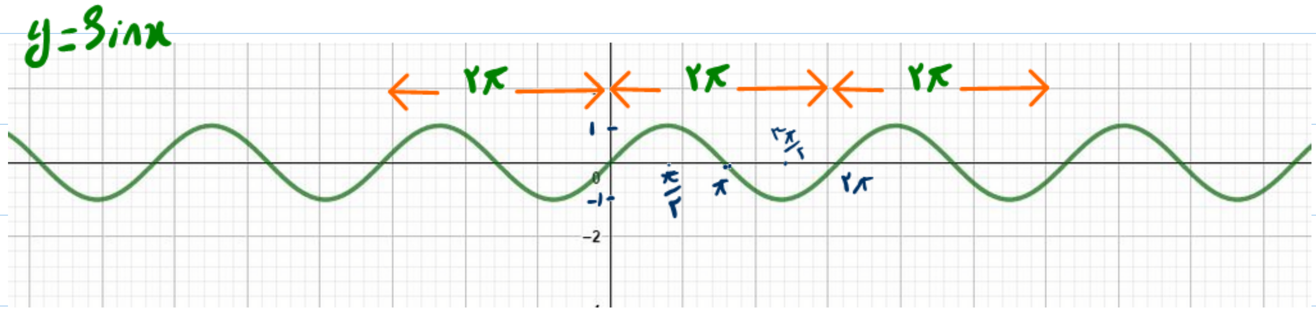
گروه ریاضی استان همدان

## تابع متناوب :

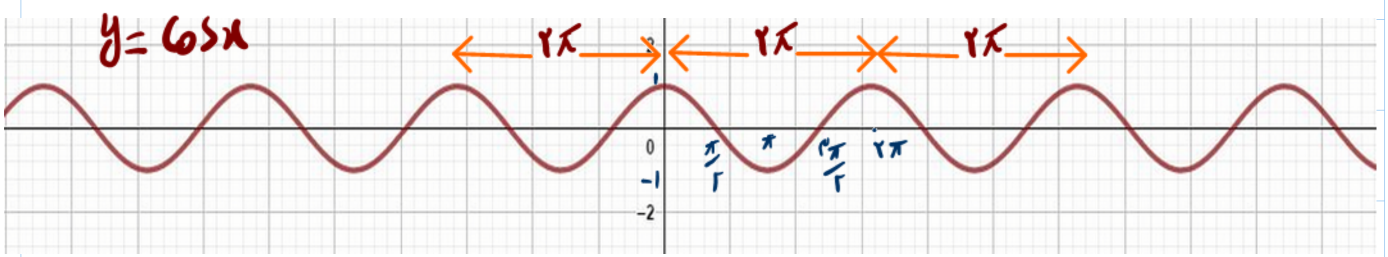
اگر در تابعی برای هر مقدار از دامنه تابع، تساوی $f(x+T)=f(x)$ برقرار باشد،
یعنی اضافه کردن $T$ ، اثری روی مقدار تابع نداشته باشد، می گوییم $f$ متناوب است.
به کوچک ترین مقدار مثبت $T$ دوره تناوب می گوییم.

به عبارت دیگر در توابع متناوب، قسمتی از نمودار در حال تکرار شدن است. به کوچکترین
اندازه افقی این قسمت تکرار شونده دوره تناوب می گوییم.

**مثال** : دوره تناوب توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را بیابید.




$T=2\pi$



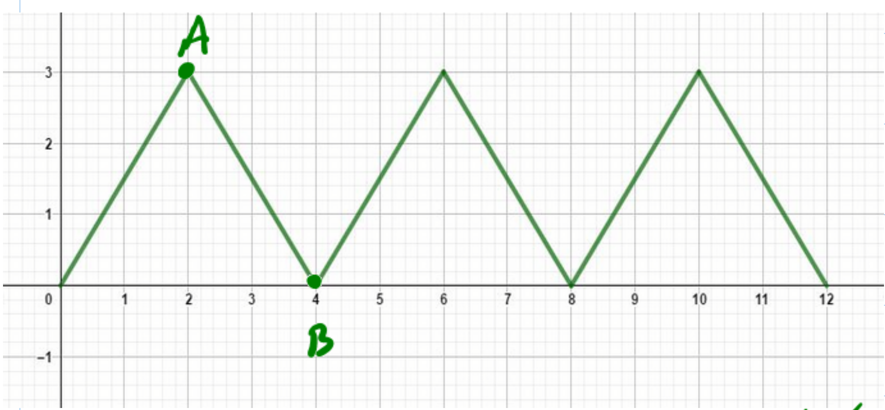

$T=2\pi$

**نکته:** اگر $f$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T$ باشد، اضافه یا کم کردن مضارب صحیح $T$، مقدار تابع را تغییر نمی‌دهد:

$$f(x+kT)=f(x)$$

**مثال:** اگر قسمتی از نمودار تابع $f$ به شکل زیر باشد، $f(1399)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$




$T=4$

باید مضربی از ۴ را به ۱۳۹۹ اضافه یا کم کنیم تا عددی بین ۰ تا ۴ بدست آید.

$$f(1399)=f(1399+(-349)4)=f(1399-1396)=f(3)$$

خط $AB$ : $A(2,3)\,,\ B(4,0)$ $\qquad m=\frac{0-3}{4-2}=-\frac{3}{2}$

$$y-0=-\frac{3}{2}(x-4) \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+6$$

$$f(3)=-\frac{3}{2}(3)+6=-\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2}$$

گزینه ۲

**مثال:** ضابطه تابع متناوب $f$ در بازه $[0,1)$ به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ است. اگر دوره تناوب تابع برابر یک باشد، $f(-5/36)$ کدام است؟

۱) $0/8$ ۲) $0/6$ ۳) تعریف نشده ۴) $0/4$

گزینه ۱ $f(-5/36)=f(-5/36+6(1))=f(0/64)=\sqrt{0/64}=0/8$

**نکته:** اگر دوره تناوب $f(x)$ برابر $T$ باشد، دوره تناوب $af(bx+c)+d$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است. یعنی برای محاسبه دوره تناوب فقط به ضریب $x$ توجه می‌کنیم.

سایر ضرایب و انتقال‌ها اثری روی دوره تناوب ندارند.

**مثال:** دوره تناوب $y=2f(6x-1)+4$ برابر $2$ است. دوره تناوب $g(x)=-f(3x)-1$ را بیابید.

$y:\quad 2=\frac{T_f}{6} \Rightarrow T_f=12$

$g:\quad T_g=\frac{T_f}{3}=\frac{12}{3}=4$

نتیجه: دوره تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$

برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x)=k\cos(kx)+3$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، مقدار $f(0)$

کدام است؟ ۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{k} \Rightarrow k\pi=8\pi \rightarrow k=8$$

$$f(x)=8\cos 8x+3 \Rightarrow f(0)=8\overbrace{\cos 8\times 0}^{1}+3=8\times 1+3=11$$ گزینه ۱

نکته: گاهی اوقات لازم است با استفاده از روابط بین نسبت های مثلثاتی، تابع را ساده

تا حد امکان ساده کنیم، سپس دوره تناوب را محاسبه کنیم.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x$ کدام است؟

۱) $\pi$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $2\pi$

$$f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x=\cos^2 x(1-\cos^2 x)=\cos^2 x\sin^2 x$$

یادآوری : $\sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

یادآوری : $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\times\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ گزینه ۲

مثال : اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{2}\cos^2(mx-4)$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد، مقدار $m$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$$f(x) = \sqrt{2}\times\frac{1+\cos 2(mx-4)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\cos(2mx-8)\right)$$

گزینه ۱

$$T = \frac{3\pi}{4} = \frac{\cancel{2}\pi}{|\cancel{2}m|} \Rightarrow 3\pi|m| = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{4\pi}{3\pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \pm\frac{4}{3}$$

نکته: دوره تناوب توابع $y=\tan ax$ و $y=\cot ax$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) $4\pi$ ۲) $2\pi$ ۳) $\pi$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$$ گزینه ۲

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

**فصل دوم:** مثلثات

**درس اول:** تناوب و تانژانت

**قسمت دوم:** بررسی توابع مثلثاتی با ضابطه $y = asinbx + c$ یا

$$y = acosbx + c$$

**جلسه دوم:** صفحات ۲۶ تا ۲۹

**مدرس:** سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

بررسی توابع مثلثاتی به صورت $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

پارامتر a باعث انبساط یا انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس می‌شود و پارامتر c یک انتقال عمودی را نتیجه می‌دهد. پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم این گونه توابع عبارتند از:

$$y_{max}=|a|+c \qquad y_{min}=-|a|+c$$

در درس قبل هم دیدیم پارامتر b که باعث انبساط یا انقباض افقی می‌شود، در دوره تناوب مؤثر است و $T=\frac{2\pi}{|b|}$.

مثال: مقادیر max، min و دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

الف) $y=4-\cos(\frac{1}{4}x)$ $\qquad T=\frac{2\pi}{1/4}=8\pi$

$$y_{max}=|-1|+4=1+4=5 \qquad y_{min}=-|-1|+4=-1+4=3$$

ب) $y=-2\sin(\pi x)+\sqrt{3}$ $\qquad T=\frac{2\pi}{\pi}=2$

$$y_{max}=|-2|+\sqrt{3}=2+\sqrt{3} \qquad y_{min}=-|-2|+\sqrt{3}=-2+\sqrt{3}$$

نکته: اگر نمودار تابعی به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$

باشد، برای بدست آوردن ضابطه تابع یعنی یافتن پارامترهای $a$، $b$، $c$ و تشخیص

سینوسی یا کسینوسی بودن تابع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) اگر محور $y$ها از max یا min نمودار عبور کند، تابع کسینوسی است در غیر این صورت سینوسی است.

۲) با جمع و کم کردن روابط گفته شده برای مقادیر max و min داریم..

$$y_{max}=|a|+c$$
$$y_{min}=-|a|+c$$
$$\xRightarrow{+} y_{max}+y_{min}=2c \Rightarrow c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$$
$$\Rightarrow y_{max}-y_{min}=2|a| \Rightarrow |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$$

۳) برای یافتن $b$ از دوره تناوب کمک می‌گیریم ( $T=\frac{2\pi}{|b|}$ )

۴) برای تشخیص علامت $a$ و $b$ این گونه عمل می‌کنیم:

الف- در توابع سینوسی اگر نمودار بعد $x=0$ روند صعودی داشته باشد، $a$ و $b$ هم علامت

هستند یعنی: $a\times b>0$

و اگر نمودار حول $x=0$ روند نزولی داشته باشد، a و b غیرهم علامت اند یعنی: $a \times b < 0$

ب- در توابع کسینوسی اگر نمودار، روی محور yها، ماکزیمم داشته باشد $a>0$ است

و اگر مینیمم داشته باشد $a<0$ است.

با توجه به رابطه $\cos(-x)=\cos x$ ، b می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی :

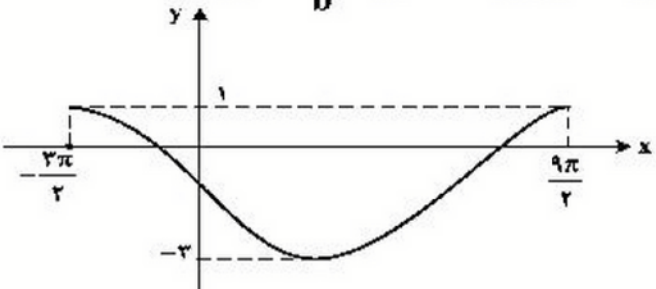
شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟

۱) $-۲$

۲) $-۳$

۳) $-۴$

۴) $-۶$




$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi \Rightarrow 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$|a| = \frac{1-(-3)}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

چون حول $x=0$ تابع نزولی است پس $ab<0$ و دو حالت داریم:

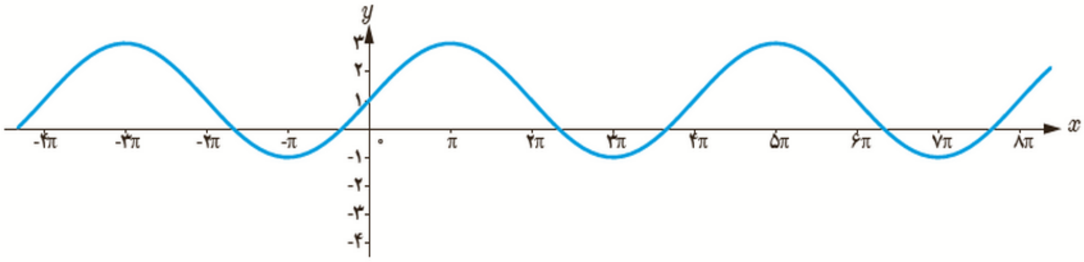
$$\begin{cases} a=-2 \\ b=\frac{1}{3} \end{cases} : \frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6 \qquad \begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad \frac{a}{b} = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6$$

گزینه ۴

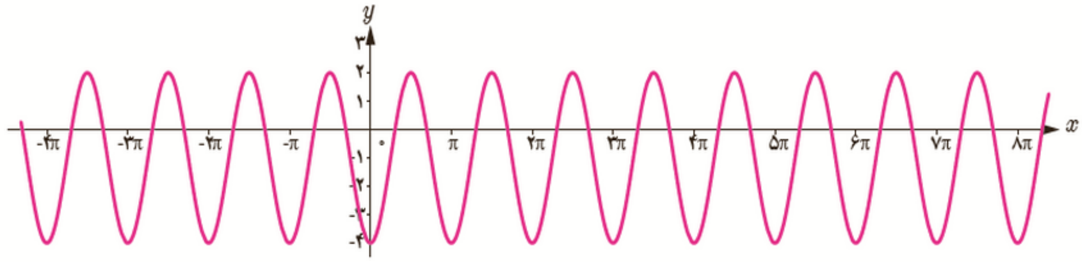
**مثال:** ضابطه توابع زیر به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ است.

ضابطه آنها را مشخص کنید.

الف)




ب)




الف) $T=4\pi \Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{1}{2}$ تابع سینوسی است

$|a|=\frac{3-(-1)}{2}=\frac{4}{2}=2$ , $c=\frac{3+(-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

بعد $x=0$ تابع روند صعودی دارد پس $ab>0$ :

ضابطه تابع: $y=2\sin\frac{1}{2}x+1$ یا $y=-2\sin(-\frac{1}{2}x)+1$

ب) $T=\pi \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2$ تابع کسینوسی

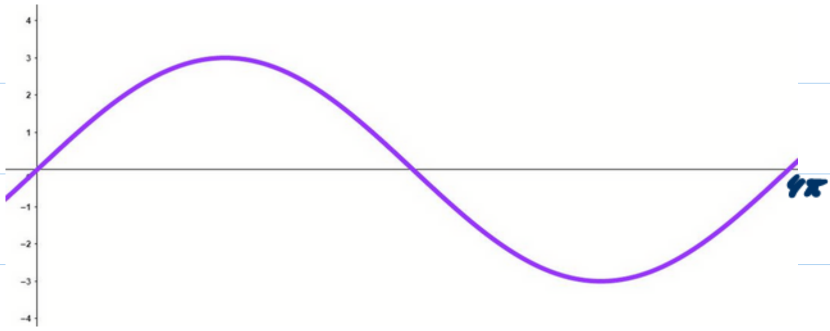
$|a|=\frac{2-(-4)}{2}=\frac{6}{2}=3$ , $c=\frac{2+(-4)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

چون معرر y ها از min نزدیک‌تر است $a<0$ یعنی $-3$ است:

$y=-3\cos 2x-1$ یا $y=-3\cos(-2x)-1$ ضابطه تابع

مثال: شکل زیر نمودار تابع $f(x)=a\sin bx$ است. مقدار ab کدام است؟

۱ (۱　　۲ (۲　　۳ (۳　　۴ (۴




$$T=4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi|b|=2\pi \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$$

$$|a|=\frac{3-(-3)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

بعد از $x=0$ روند تابع صعودی است پس $ab>0$ است:

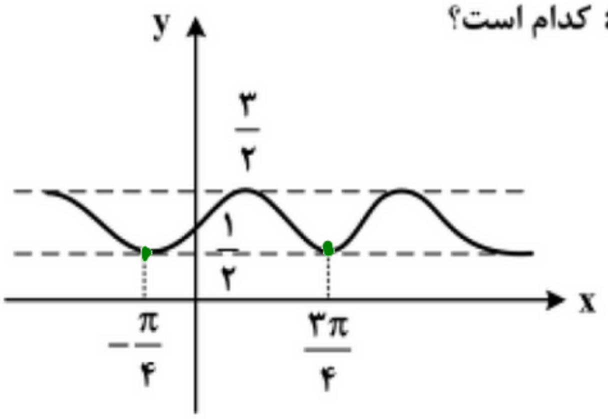
$$a=3,\ b=\frac{1}{3} \Rightarrow ab=3\times\frac{1}{3}=1$$

$$a=-3,\ b=-\frac{1}{3} \Rightarrow ab=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1$$

گزینه ۱

مثال : کنکور سراسری ۹۸ ریاضی :

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=1+a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟




۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۲

۴) ۳

sin ضریب    مخرج دوره تناوب

$$y=1+a\sin bx\cos bx = 1+\frac{1}{2}a\sin 2bx$$

$$T=\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\pi}{4}=\pi \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi|b|=\pi \Rightarrow |b|=1$$

$$\left|\frac{1}{2}a\right|=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow |a|=1$$

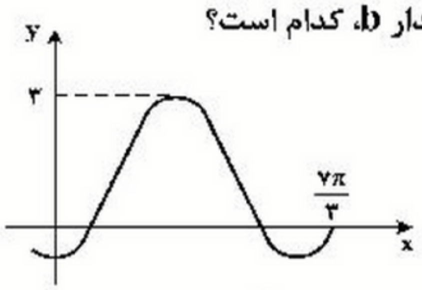
بعد از $x=0$ روند تابع صعودی است پس $ab>0$ است:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad a+b=2 \qquad , \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \quad a+b=-2$$

گزینه ۳

مثال : کنکور سراسری ۹۹ تجربی

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(\frac{\pi}{2}+x)$ است. مقدار b، کدام است؟




۱) ۲

۲) ۱

۳) $-1$

۴) $-2$

$$y = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = a + b\cos x$$

$$y_{max} = 3 = |b| + a$$

$a - b = 3 \qquad (1)$      چون محور yها از min عبور کرده است پس $b<0$ :

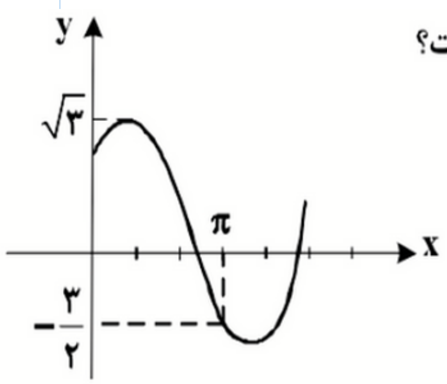
$$\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) \xrightarrow{\text{در تابع}} 0 = a + b\cos\frac{7\pi}{3} \Rightarrow 0 = a + b\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = a + b\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 = a + b \times \frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow -\begin{cases} a - b = 3 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3b}{2} = -3 \xRightarrow{\times \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow b = -2 \qquad \text{گزینه ۴}$$

مثال: کنکور سراسری ۹۸ تجربی :




شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$     ۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\sqrt{3}$     ۴) ۲

$$y_{max} = |b| + a \Rightarrow |b| + a = \sqrt{3}$$

چون تابع بعد از $x=0$ روند صعودی دارد پس $b$ با یک (ضریب $x$) هم علامت و مثبت است:

$$a+b=\sqrt{3} \qquad (1)$$

$$\left(\pi, -\frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\text{در } (2)} -\frac{3}{2} = a + b\,\overbrace{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

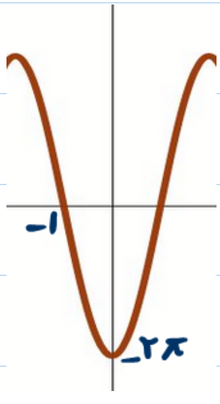
$$a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ -\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow b+\frac{\sqrt{3}}{2}b=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$$b\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b=\sqrt{3}$$

گزینه ۳

**مثال:** نمودار تابع $f(x)=a\cos hx$ به صورت زیر است. $f\left(\frac{1}{4}\right)$ کدام است؟




۱) $\sqrt{2}\pi$ ۲) $-\sqrt{2}\pi$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

$$y_{min}=-|a|+0=-2\pi \Rightarrow |a|=2\pi$$

چون نمودار ما از min عبور کرده پس $a<0$ است:

$\Rightarrow -a = ۲\pi \Rightarrow a = -۲\pi$

چون $f(-۱) = ۰$ پس:

$۰ = -۲\pi \cos(-b) \Rightarrow \cos(-b) = ۰ \Rightarrow -b = -\frac{\pi}{۲} \Rightarrow b = \frac{\pi}{۲}$

اولین نقطه‌ای که تابع cos قبل از $x = ۰$، برابر صفر می‌شود $-\frac{\pi}{۲}$ است.

$f(x) = -۲\pi \cos \frac{\pi}{۲} x$

$f(\frac{۱}{۲}) = -۲\pi \cos \frac{\pi}{۲} \times \frac{۱}{۲} = -۲\pi \cos \frac{\pi}{۴} = -۲\pi \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\sqrt{۲}\pi$

گزینه ۲

به نام خدا

# پایه دوازدهم ریاضی

## فصل دوم: مثلثات

## درس اول: تناوب و تانژانت

### قسمت سوم: تانژانت

### جلسه سوم: صفحات ۲۹ تا۳۲

**مدرس:** سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

## تانژانت در دایره مثلثاتی :

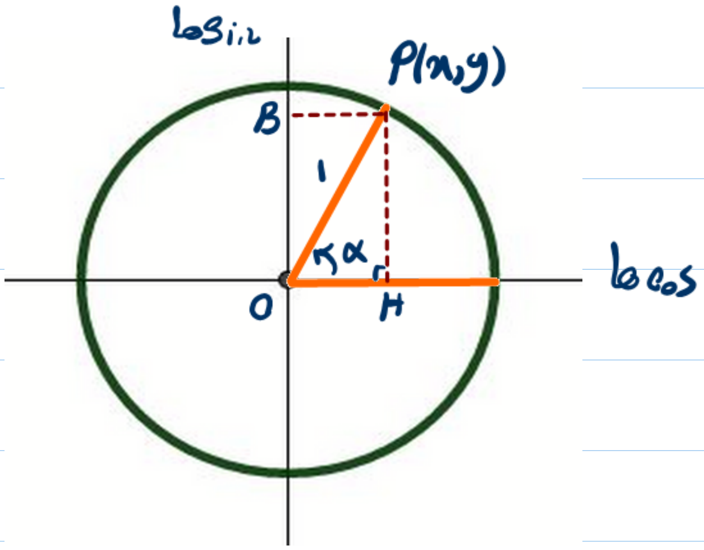
**یادآوری :** دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات است.

ضلع ابتدای هر زاویه در دایره مثلثاتی، بر قسمت مثبت محور $x$ ها واقع است.

اگر اندازه زاویه $\alpha > 0$ باشد به اندازه $\alpha$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

دوران می‌کنیم و اگر $\alpha < 0$ باشد به اندازه $\alpha$ در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخیم.

اگر ضلع انتهایی زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x,y)$ قطع کند داریم :

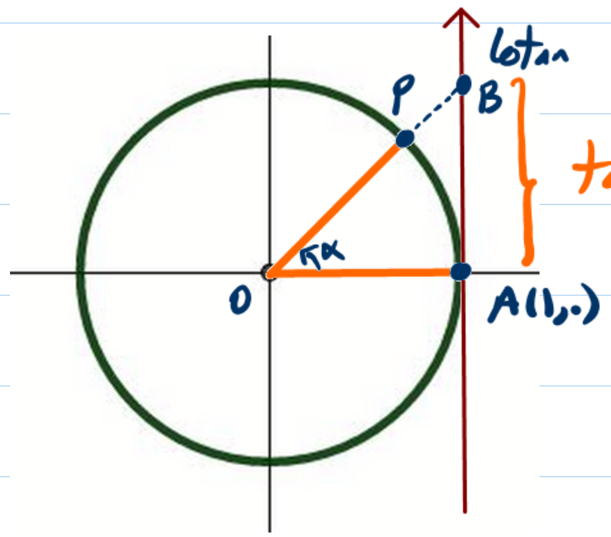



$$O\hat{H}P : \quad \sin\alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{PH}{1} \Rightarrow \sin\alpha = PH = BO \Rightarrow y_P = \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos\alpha = OH \Rightarrow x_P = \cos\alpha$$

محور تانژانت ها را موازی محور سینوس ها و مماس بر دایره در نقطه $A(1,0)$ در نظر می گیریم. مبدأ این محور $A(1,0)$ است و جهت مثبت آن مانند محور سینوس هاست.

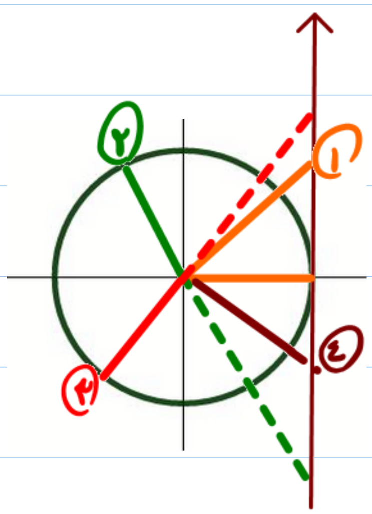
یعنی بالای $A$ تانژانت مثبت و پایین $A$ تانژانت منفی است.




اگر شعاع $OP$ را امتداد دهیم، محور تانژانت ها را در $B$ قطع می کند.

$$\overset{\triangle}{OAB}: \quad \tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \tan\alpha = AB$$

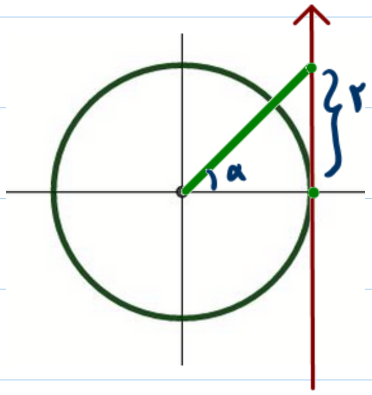
توجه: علامت تانژانت در نواحی چهارگانه به صورت زیر است:




| | اول | دوم | سوم | چهارم |
|---|---|---|---|---|
| tan | + | - | + | - |

**نکته:** در زاویه‌های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و بطور کلی در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، هرچقدر شعاع را امتداد دهیم محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند. در این زاویه‌ها تانژانت تعریف نشده است.

**مثال:** در شکل زیر $\cos\alpha$ کدام است؟

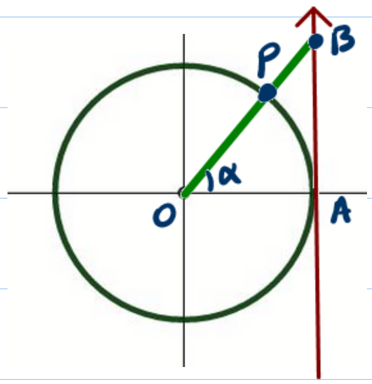



۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

$\tan\alpha = 2$ ، $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+4 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ گزینه ۲

**مثال:** با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، اگر $P(2a-1, a)$ باشد، مساحت مثلث $AOB$ چقدر است؟




۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$x_p = 2a-1 = \cos\alpha$

$y_p = a = \sin\alpha$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow a^2 + (2a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 4a + 1 - 1 = 0$$

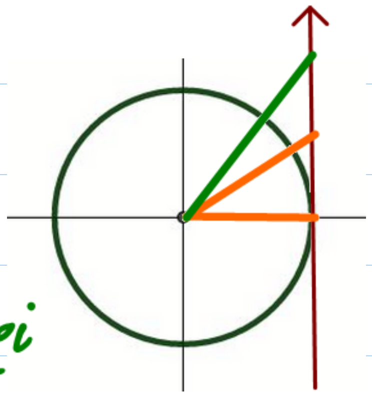
$$5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(5a-4) = 0 \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ 5a - 4 = 0 \longrightarrow a = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\alpha = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

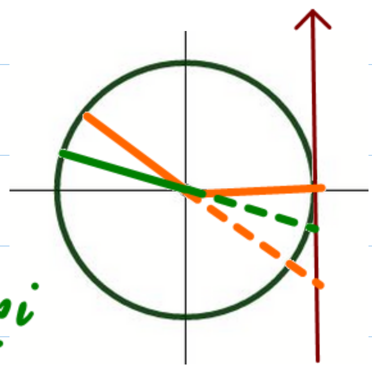
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{3} = AB$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$ گزینه ۲

نکته: در تمامی نواحی چهارگانه با افزایش زاویه، مقدار تانژانت هم افزایش می‌یابد.



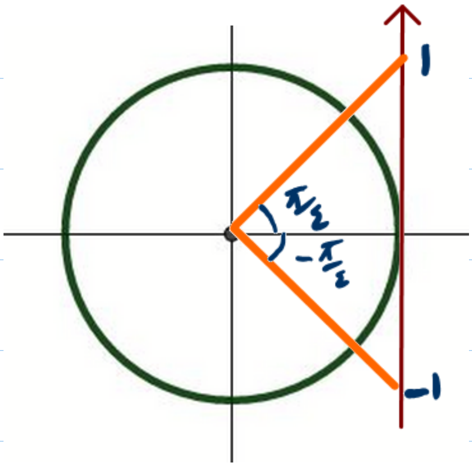
ناحیه اول



ناحیه دوم

برای نواحی سوم و چهارم به طور مشابه به دست می‌آید.

**مثال:** اگر $|x|\le \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2m-3}{5}$ باشد، محدوده $m$ را بیابید.



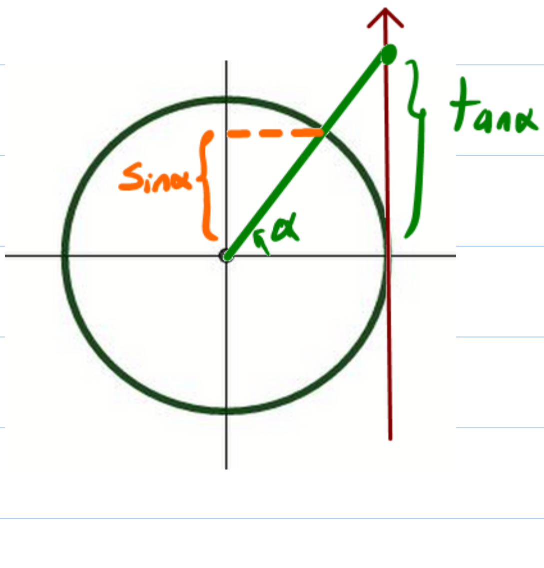

$$-\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{4}$$

$$-1\le \tan x\le 1$$

$$\Rightarrow \quad -1\le \frac{2m-3}{5}\le 1 \quad \xRightarrow{\times 5} -5\le 2m-3\le 5$$

$$\xRightarrow{+3} -2\le 2m\le 8 \quad \xRightarrow{\div 2} -1\le m\le 4$$

**نکته:** با استفاده از دایره مثلثاتی می‌توان گفت: $|\sin\alpha| < |\tan\alpha|$

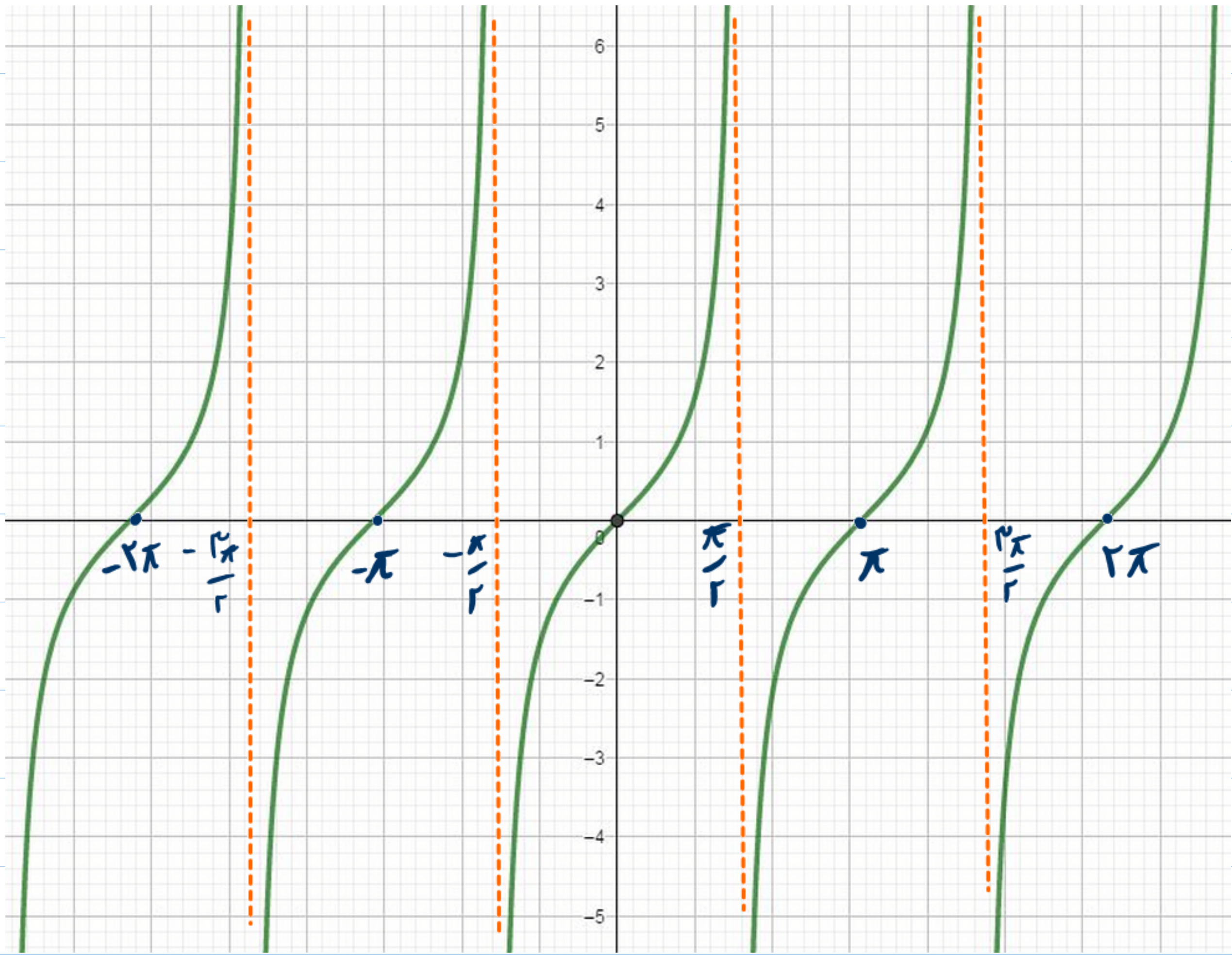


# تابع تانژانت

$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

اگر $x$ عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، تابعی که به عدد $x$ تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع تانژانت نامیده می‌شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با دنبال کردن روی دایره مثلثاتی به نمودار زیر می‌رسیم:



پس درباره تابع $f(x)=\tan x$ می‌توان گفت:

۱- $D_f = \mathbb{R}-\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

۲- $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع تانژانت، تابعی متناوب است و $T=\pi$

۴- تابع تانژانت یکنوا نیست ولی در بازه‌هایی که در آن تعریف می‌شود یعنی بازه‌هایی که شامل $k\pi+\frac{\pi}{2}$ها نیستند، اکیداً صعودی است.

تذکر: دوره تناوب تابع $y=a\tan(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{2})$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $x\neq k$ ۲) $x\neq 2k+1$ ۳) $x\neq 2k$ ۴) $\mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2}\neq k\pi$$

$$\xRightarrow{\times\frac{2}{\pi}} x\neq k\pi\times\frac{2}{\pi} \Rightarrow x\neq 2k$$

گزینه ۳

**مثال:** اگر $f(x)=\tan x-\frac{1}{\tan x}$، دوره تناوب تابع $\frac{1}{f}$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

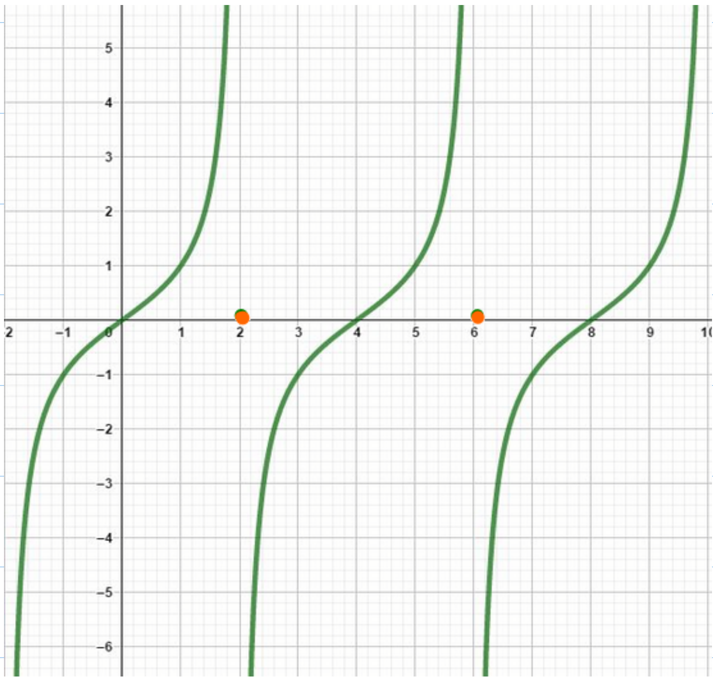
$$=-2\cot 2x=-\frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{2}\tan 2x \Rightarrow T_{\frac{1}{f}}=\frac{\pi}{2}$$

**مثال:** تابع $f$ با ضابطه $f(x)=\tan(\frac{\pi}{4}x)$ و دامنه $(2,a)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

حداکثر مقدار $a$ کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

باید طول تمام نقاط بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم یا در $\frac{4}{\pi}$ ضرب شود:




حداکثر مقدار برای $a$ بطوریکه تابع در بازه $(2,a)$ اکیداً صعودی باشد ۶ است. پس گزینه ۳ درست است.

به نام خدا

# پایه دوازدهم ریاضی

## فصل دوم: مثلثات

## درس دوم: معادلات مثلثاتی

## قسمت اول: معادلات سینوسی و کسینوسی

## جلسه چهارم: صفحات ۳۵ تا ۴۰

**مدرس:** سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

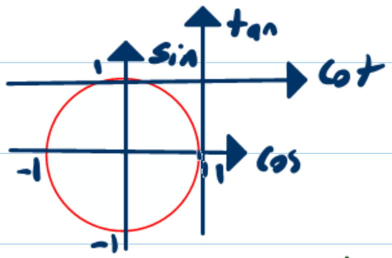
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

## یادآوری :

۱) جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف :

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ (۳۰°) | $\frac{\pi}{4}$ (۴۵°) | $\frac{\pi}{3}$ (۶۰°) | $\frac{\pi}{2}$ (۹۰°) | $\pi$ (۱۸۰°) | $\frac{3\pi}{2}$ (۲۷۰°) | $2\pi$ (۳۶۰°) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| tan | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | ت ن | $0$ | ت ن | $0$ |
| cot | ت ن | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | ت ن | $0$ | ت ن |




۲) جدول علامت نسبت‌های مثلثاتی :

| | ربع اول | ربع دوم | ربع سوم | ربع چهارم |
|---|---|---|---|---|
| sin | + | + | − | − |
| cos | + | − | − | + |
| tan | + | − | + | − |
| cot | + | − | + | − |

۳) نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(-\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۴) دو زاویه متمم : $\alpha, \beta$ متمم اند: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ($90^\circ$)

مثال: $30+60=90$

$\sin 30 = \cos 60 = \frac{1}{2}$

$\sin 60 = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\alpha = \cos\beta \quad , \quad \sin\beta = \cos\alpha$

$\tan\alpha = \cot\beta \quad , \quad \tan\beta = \cot\alpha$

۵) نسبت های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ ($k \in \mathbb{Z}$)

الف) اگر ضریب $\pi$ عددی زوج باشد آنرا از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم.

$\sin(2\cancel{k\pi} \pm \alpha) = \sin(\pm\alpha)$

$\cos(2k\cancel{\pi} \pm \alpha) = \cos(\pm\alpha)$

ب) اگر ضریب $\pi$ عددی فرد باشد آنرا از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم اما نسبت مثلثاتی را قرینه می‌کنیم.

$\sin(\cancel{(2k+1)}\pi \pm \alpha) = -\sin(\pm\alpha)$

$\cos(\cancel{(2k+1)}\pi \pm \alpha) = -\cos(\pm\alpha)$

ج) ضریب $\pi$ چه زوج و چه فرد باشد آنرا از کمان های $\tan$ و $\cot$ حذف می‌کنیم.

$\tan(\cancel{k\pi} \pm \alpha) = \tan(\pm\alpha)$

$\cot(\cancel{k\pi} \pm \alpha) = \cot(\pm\alpha)$

## ۶) نسبت های مثلثاتی $\left(\overbrace{(2k+1)\frac{\pi}{2}}^{\text{مضارب فرد } \frac{\pi}{2}} \pm \alpha\right)$

همیشه فرض می‌کنیم $\alpha$ حاده است و ناحیه‌ای که زاویه $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ در آن است را مشخص می‌کنیم و علامت نسبت را تشخیص می‌دهیم. حال مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ را حذف کرده و اسم نسبت را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$\sin \to \cos$ , $\cos \to \sin$ , $\tan \to \cot$ , $\cot \to \tan$

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \sin^{\text{مث}}_{\text{من}} \cos\alpha$$

$$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \cos^{\text{مث}}_{\text{من}} \sin\alpha$$

$$\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \tan^{\text{مث}}_{\text{من}} \cot\alpha$$

$$\cot\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \cot^{\text{مث}}_{\text{من}} \tan\alpha$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زیر را برحسب $\alpha$ بنویسید.

1) $\sin(\overset{\text{فرد}}{285}\pi-\alpha) = \overbrace{-\sin(-\alpha)}^{-\sin\alpha} = \sin\alpha$

2) $\cos(\overset{\text{فرد}}{343}\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

3) $\cos(\overset{\text{زوج}}{24}\pi-\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

4) $\sin\left(\overset{\text{مضرب فرد } \frac{\pi}{2}}{\frac{25\pi}{2}}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{24\pi+\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\left(\cancel{12\pi}+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

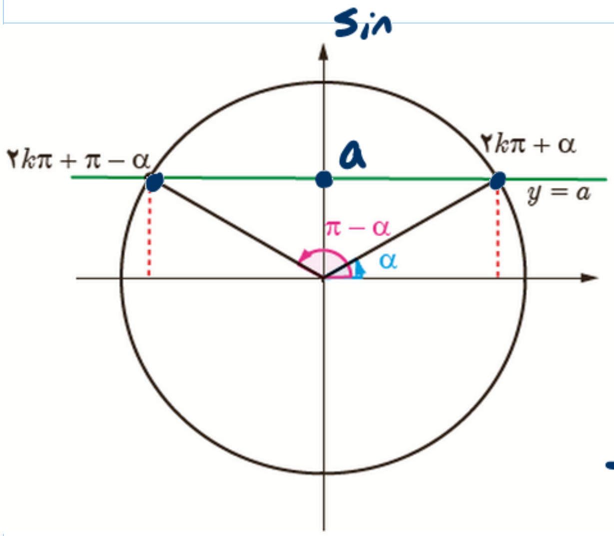
$= +\cos\alpha$

# معادلات مثلثاتی

به معادلاتی که مجهول در کمان نسبت مثلثاتی قرار بگیرد، معادلات مثلثاتی می‌گویند.

روش شهودی حل معادله $\sin x = a$ :

$\alpha+\beta \overset{\text{مکمل}}{=} \pi \Rightarrow \sin\alpha=\sin\beta$




روی محور سینوس‌ها مقدار a را مشخص و از این نقطه خطی بر محور سینوس‌ها عمود می‌کنیم تا دایره مثلثاتی را قطع کند. نقطه برخوردها جواب‌های مورد نظر است. البته توجه داشته باشید به فرمول عمومی $x$، جواب کلی معادله است.

نتیجه:

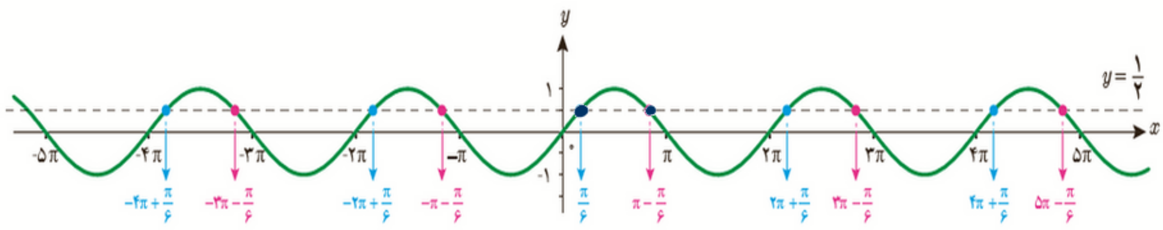
$$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+(\pi-\alpha)\end{cases}$$

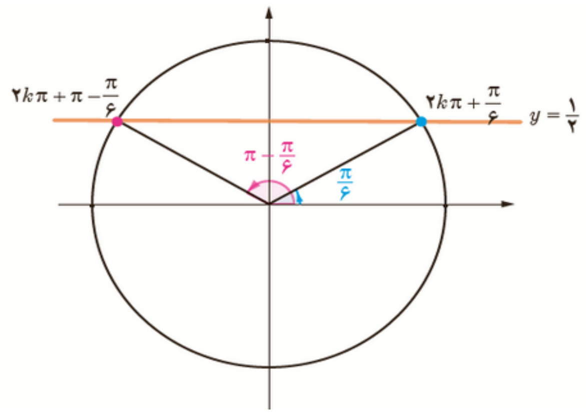
تعمیم

$$\sin\bigcirc=\sin\square \Rightarrow \begin{cases} \bigcirc=2k\pi+\square \\ \bigcirc=2k\pi+(\pi-\square)\end{cases}$$

**نکته مهم:** اگر معادله به صورت استاندارد گفته شده نبود، باید از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و جابه‌جایی عبارات و در صورت لزوم تغییر متغیر استفاده کرده و به شکل $\sin x=\sin\alpha$ یا $\cos x=\cos\alpha$ برسیم.

**مثال:** چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید.




$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

**کار در کلاس**

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x-\sqrt{3}=0$

ب) $4\sin x+\sqrt{8}=0$

الف) $2\sin x=\sqrt{3} \xrightarrow{\div 2} \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$

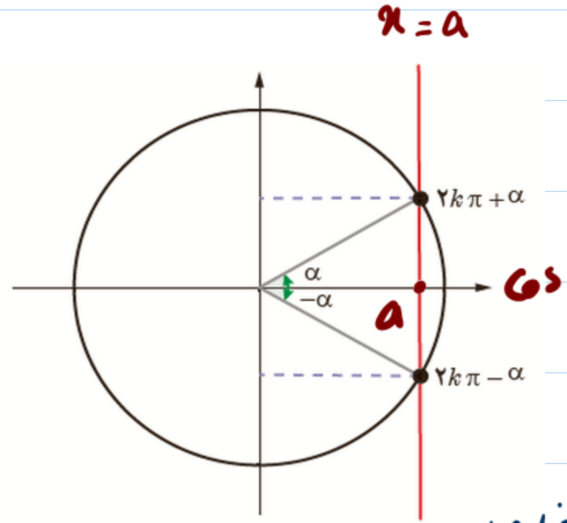
$$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب) $4\sin x=-\sqrt{8} \xrightarrow{\div 4} \sin x=\frac{-\sqrt{8}}{4}=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin x=\sin(-\frac{\pi}{4})$

$$\begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{4} \\ x=2k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{4})=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

روش تصویری حل معادله $\cos x = a$ :




روی محور cos مقدار a را انتخاب و از این نقطه خطی بر محور cos عمود می‌کنیم تا دایره مثلثاتی را قطع کند. نقطه برخوردها یا جواب مورد نظر خواهد بود.

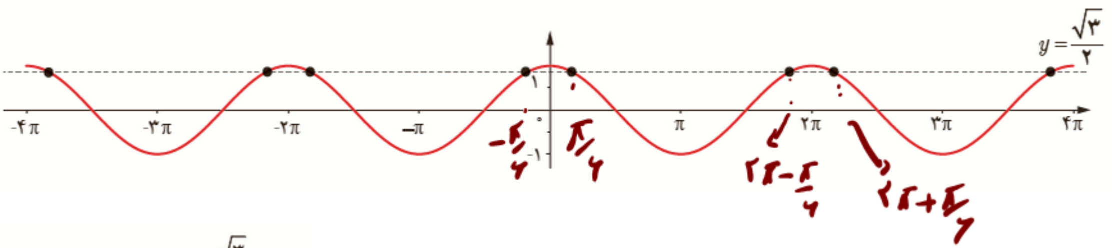
نتیجه :

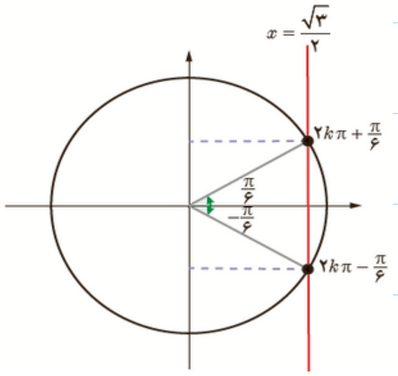
$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

تعمیم

$$\cos \bigcirc = \cos \square \Rightarrow \bigcirc = 2k\pi \pm \square$$

مثال: چند زاویه که مقدار کسینوس آنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است مثال بزنید.




$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$ جواب عمومی (کلی)

مثال : جواب‌های معادله $\cos x = \frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi, \pi]$ می‌باشند؟

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

| $k$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|
| $x$ | $-2\pi \pm \frac{\pi}{3}$ | $\pm\frac{\pi}{3}$ |

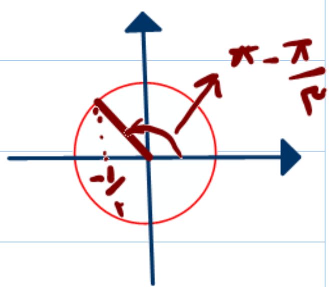
مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(۲\cos x - ۹) = ۵$ را حل کنید

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$$

$$\Delta = 81 - (4 \times 2 \times (-5)) = 81 + 40 = 121$$

$$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4} \begin{cases} \frac{9+11}{4} = 5 & \times \\ \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases} \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$$

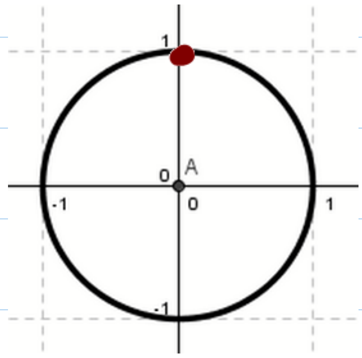
$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$




$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

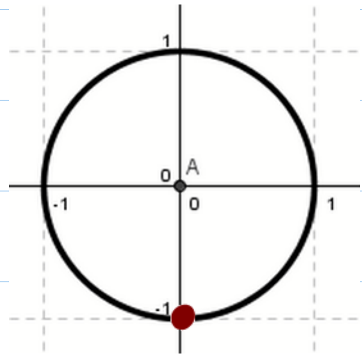
معادلات خاص :

$\sin x = 1$



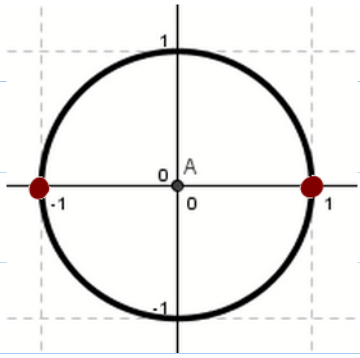

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1$



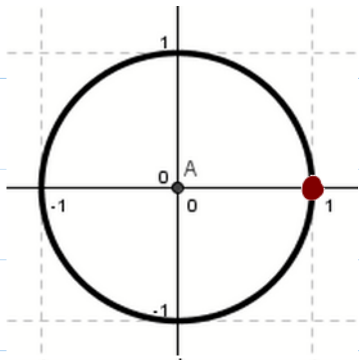

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0$



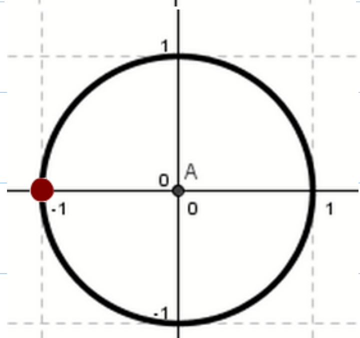

$x = k\pi$

$\cos x = 1$



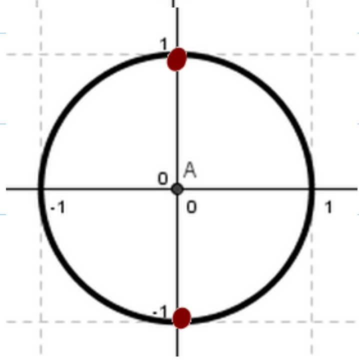

$x = 2k\pi$

$\cos x = -1$




$x = (2k+1)\pi$

$\cos x = 0$




$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x \rightarrow ۱ = \sin ۳x$ حالت خاص

$۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div ۳} x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

ب) $\underbrace{\cos ۲x}$ $- \cos x + ۱ = ۰ \rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰$

$۲\cos^۲ x - \cos x = ۰ \rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰$ $\begin{cases} \cos x = ۰ \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \end{cases}$

$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲\cos x = ۱ \rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$

پ) $\cos x = \cos ۲x$

$۲x = ۲k\pi \pm x$

$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \rightarrow ۳x = ۲k\pi \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$-2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0 \qquad \Delta = 9 - (4 \times (-2)(2)) = 9 + 16 = 25$

$\sin x = \dfrac{3 \pm 5}{-4} < \begin{cases} \dfrac{8}{-4} = -2 \times & -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\sin x = \dfrac{1}{2} = \sin \dfrac{\pi}{6} \qquad \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \dfrac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x - \dfrac{1}{4} = 0$

$-\sin^2 x - \sin x + \dfrac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - (4 \times (-1)(\dfrac{3}{4}))$
$= 1 + 3 = 4$

$\sin x = \dfrac{1 \pm 2}{-2} < \begin{cases} \dfrac{3}{-2} \times & -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} = \sin \dfrac{\pi}{6} & \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + 5\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - (4 \times 2 \times (-1)) = 1 + 8 = 9$

$\sin x = \dfrac{-1 \pm 3}{4} < \begin{cases} \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \dfrac{\pi}{6} & \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + 5\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \\ -1 \rightarrow x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

**مثال :** معادله ی مثلثاتی $۲\sin x+\sqrt{۲}=\sqrt{۸}$ را حل کنید.

$$۲\sin x=\sqrt{۸}-\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=\sqrt{۲}\xrightarrow{\div ۲}\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

**مثال :** جواب‌های معادله $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

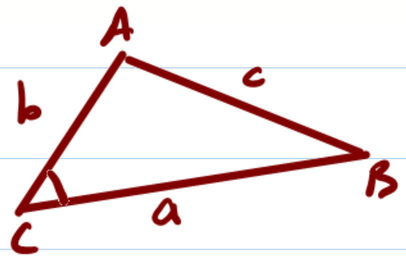
$$۲\sin x\cos x=۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{\div ۲}x=k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ ۲x=۲k\pi+\underbrace{\pi-\frac{\pi}{۳}}_{۲\pi/۳}\xrightarrow{\div ۲}x=k\pi+\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin\hat{C}$




$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\hat{C} \longrightarrow 3 = 6\sin\hat{C}$

$\sin\hat{C} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} \hat{C} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{\pi}{6} \checkmark \\ \hat{C} = 2k\pi + 5\frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = 5\frac{\pi}{6} \checkmark \end{cases}$

دو مثلث

به نام خدا

## پایه دوازدهم ریاضی

## فصل دوم: مثلثات

## درس دوم: معادلات مثلثاتی

### قسمت دوم: معادلات تانژانتی و رابطه

### تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه

## جلسه پنجم: صفحات ۴۱تا۴۳

**مدرس:** سید ابوالفضل فاضلیان

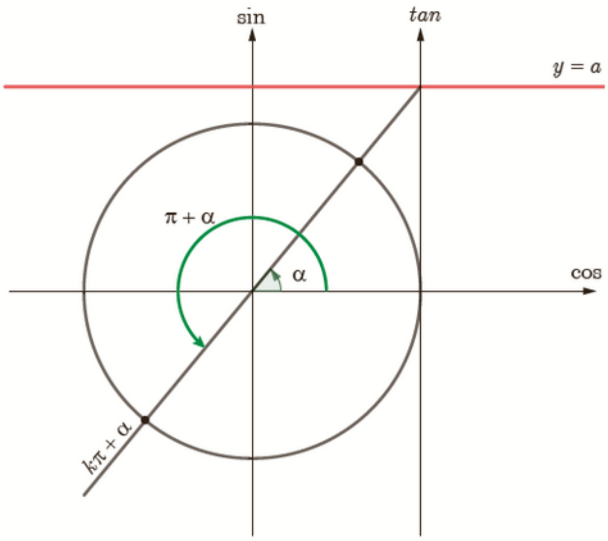

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

## روش شهودی حل معادله $\tan x = a$




روی محور tan ها مقدار a را مشخص می‌کنیم.

x هایی که امتدادشان به a برخورد می‌کند

جواب معادله هستند.

برای حل معادله $\tan x = a$ ابتدا زاویه‌ای را می‌یابیم که تانژانت آن برابر a شود.

اگر آن زاویه $\alpha$ باشد، برای یافتن جواب‌های کلی این معادله داریم:

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

**مثال:** جواب‌های کلی معادلات زیر را بدست آورید.

1) $\tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

2) $\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi$

3) $\tan x - 3\cot x = 0 \Rightarrow \frac{\tan x}{1} - \frac{3}{\tan x} = 0 \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 3}{\tan x} = 0$

$$\Rightarrow \tan^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan(\pm \pi/3) \Rightarrow x = k\pi \pm \pi/3$$

**نکته مهم**: از آنجایی که معادلات مثلثاتی محدودیت دامنه دارند، باید جواب به دست آمده را در معادله چک کرد. همچنین در حل معادلات مثلثاتی کسری و رادیکالی هم باید به دامنه توجه کرد.

**مثال**: جواب‌های معادله $2\cot 2x + \tan x = \cos^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

نکته: $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

$$\cot x - \tan x + \tan x = \cos^2 x \longrightarrow \cot x = \cos^2 x$$

$$\longrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{1} \longrightarrow \cos^2 x(\sin x) = \cos x$$

$$\longrightarrow \cos^2 x(\sin x) - \cos x = 0 \longrightarrow \cos x(\sin x \cos x - 1) = 0$$

$\cos x = 0 \longrightarrow x = \pi/2 , 3\pi/2$ : در این زوایا $\tan$ تعریف نشده

$\sin x \cos x - 1 = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = 1 \longrightarrow \sin 2x = 2$ جواب ندارد

$-1 \leq \sin x \leq 1$

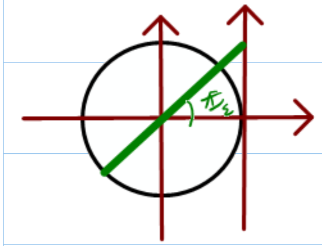
معادله جواب ندارد

**مثال**: مجموعه جواب های معادله $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}$ را بیابید.

به توان ۲

$$\Rightarrow \sin x=\cos x \xRightarrow{\div \cos x} \frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \tan x=1 \Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4} \to x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$




xهایی که در ربع سوم هستند نمی‌توانند جواب معادله باشند

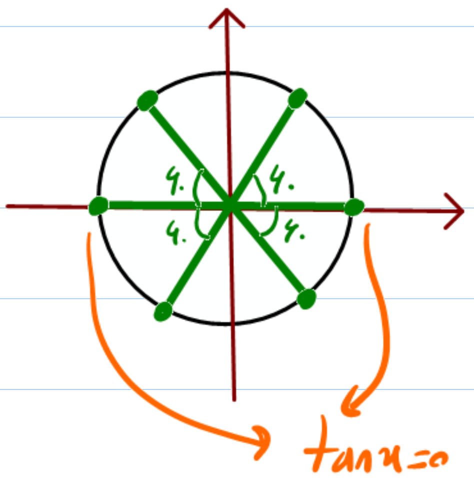
زیرا $\sin$ و $\cos$ در ربع سوم منفی هستند و زیر رادیکال جفت ۲ نمی‌توانند منفی باشند:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

**مثال**: جواب کلی معادله $\frac{\tan 3x+\tan x}{\tan x}=1$ را بیابید.

$$\tan 3x+\tan x=\tan x \Rightarrow \tan 3x=0 \to 3x=k\pi$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}$$




در $x=k\pi$ ، $\tan x$ که در مخرج است، صفر شد

پس باید آن‌ها را از جواب کلی کم کرد :

$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

یادآوری :

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان :

1) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$

2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان ( $2\alpha$ )

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

تانژانت مجموع و تفاضل دو کمان

1) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

2) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

اثبات ۱)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

صورت و مخرج را بر $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم می‌کنیم :

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\blacksquare$$

رابطه ۲ به طور مشابه ثابت می‌شود.

مثال: $\tan 105^\circ$ و $\tan 15^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\times\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

مثال: تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan 3x+\tan x+\sqrt{3}\tan 3x\tan x=\sqrt{3}$ در بازه $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\tan 3x + \tan x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 3x \tan x$$

$$\tan 3x + \tan x = \sqrt{3}(1 - \tan 3x \tan x)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 3x + \tan x}{1 - \tan 3x \tan x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan(3x + x) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$$

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{\pi}{12}$ ✓ | $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{4\pi}{12}$ ✓ | $\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$ ✓ | $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{10\pi}{12}$ |

$$\tan 3x = \tan 3\times\frac{10\pi}{12}$$
$$= \tan 3\times\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{5\pi}{2}$$ تعریف نشده

جواب گزینه ۳ است.

تانژانت دو برابر کمان:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

اثبات:
$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \blacksquare$$

**مثال:** اگر $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان $x$ در ربع اول باشد، مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2 x=\frac{1}{\frac{5}{9}}=\frac{9}{5}\rightarrow \tan^2 x=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$$

$$\xRightarrow[\text{ربع اول } x]{\sqrt{}} \tan x=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan 2x=\frac{2\times\frac{2}{\sqrt{5}}}{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}}=\frac{20}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$$

**مثال:** اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ را محاسبه کنید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$$

$$=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1+\tan\alpha=5-5\tan\alpha \Rightarrow 6\tan\alpha=4 \Rightarrow \tan\alpha=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{4\times 9}{3\times 5}=\frac{12}{5}$$

**مثال:** معادله $\tan 2x = 3\tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 3\tan x = 0 \Rightarrow \tan x\left(\frac{2}{1-\tan^2 x} - 3\right) = 0$$

$$\tan x = 0 \longrightarrow x = \underset{6}{\pi}, \underset{7}{2\pi}$$

$$\frac{2}{1-\tan^2 x} - 3 = 0 \longrightarrow \frac{2}{1-\tan^2 x} = 3 \Rightarrow \frac{1-\tan^2 x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1-\tan^2 x = \frac{2}{3} \rightarrow 1 - \frac{2}{3} = \tan^2 x \rightarrow \frac{1}{3} = \tan^2 x$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{\pi}{6}$ 1 | $\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ 2 | $2\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$ 4 |
| | | $\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ 3 | $2\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ 5 |

۷ جواب دارد.