مثال: دو بازه باز مثال بزنید که در یکی از آنها تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ مشتق پذیر باشد و دردیگری مشتق پذیر نباشد.

کاربرد مشتق

یکنوایی تابع و رابطه آن با مشتق

در فصل اول تابع صعودی و نزولی را آموختیم .

طبق فصل اول:

تابع f را در بازه ای **صعودی** میگوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه در این بازه : $a<b \Rightarrow f(a)\leq f(b)$

تابع f را در بازه ای **نزولی** میگوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه در این بازه : $a<b \Rightarrow f(a)\geq f(b)$

حال در فصل جدید میخواهیم تعریف جدیدی از صعودی و نزولی بودن را ارائه بدهیم.

از روی شکل تابع مشخص است که وقتی تابع صعودی است شیب خط مماس مثبت است یعنی می توان نتیجه گرفت وقتی تابع صعودی است مشتق مثبت است. و همین طور در مورد تابع نزولی.

پس میتوان تعریف جدید زیر را در نظرگرفت:

تابع پیوسته f در بازه (a,b) اکیداً صعودی است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ) > ۰$

تابع پیوسته f در بازه (a,b) اکیداً نزولی است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ) < ۰$

تابع پیوسته در بازه (a,b) ثابت است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ) = ۰$

برای یکنوایی تابع پیوسته $f(x)$ (برای صعودی یا نزولی بودن تابع) ابتدا از تابع مشتق میگیریم ، سپس تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم. بازه هایی که مشتق مثبت است تابع صعودی و بازه هایی که مشتق منفی است تابع نزولی است.

مثال: یکنوایی تابع $f(x) = x^۲ - ۴x$ را مشخص کنید. (ازدوراه، شکل و مشتق)

اکسترمم تابع

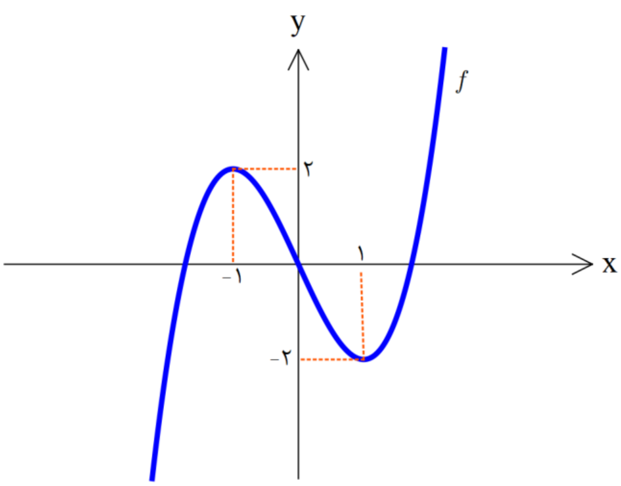
گوییم تابع در نقطه ای به طول a **ماکزیمم نسبی** دارد هرگاه همسایگی از a موجود باشد که در تمام نقاط این همسایگی نقطه a عرض بیشتری داشته باشد. و تابع در نقطه ای به طول a دارای **مینیمم نسبی** است هرگاه همسایگی از a موجود باشد که در تمام نقاط این همسایگی نقطه a عرض کمتری داشته باشد.

نکته: اگر وضعیت تابع پیوسته در نقطه ای به این صورت باشد که قبل از آن نقطه مشتق منفی و بعد از آن نقطه مشتق مثبت باشد، آن نقطه را مینیمم و اگر قبل نقطه مشتق مثبت و بعد از آن مشتق منفی باشد آن نقطه را ماکزیمم می گوییم.

x		a	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$

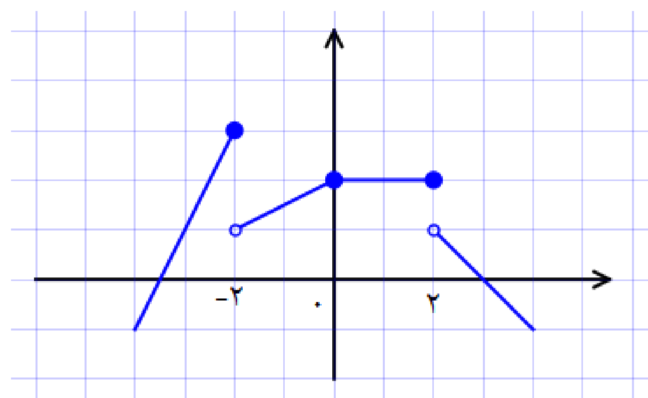
x		a	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

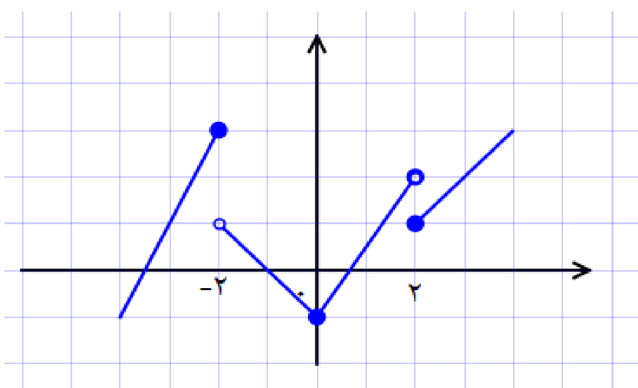
مثال: در شکل روبرو تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ را رسم کرده ایم.در کدام بازه ها تابع صعودی و در کدام بازه ها تابع نزولی است؟ (از روی شکل) سپس جدول تغییرات مشتق را رسم کنید و دوباره به سوالات بالا پاسخ دهید.



مثال: وضعیت یکنوایی و طول نقاط اکسترمم تابع $y=-x^{۳}+۳x$ را مشخص کنید.

مثال: در توابع رسم شده زیر نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را مشخص کنید.





اگر نقطه (a,b) نقطه اکسترمم نسبی (ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی) تابعی پیوسته باشد، در این صورت دو شرط زیر همواره برقرار است.

۱- نقطه مورد نظر در ضابطه تابع صدق میکند. یعنی $f(a)=b$

۲- طول نقطه مورد نظر ریشه مشتق اول تابع است. یعنی : $f'(a)=۰$

مثال: اگر تابع $f(x)=(1-m)x^2+(m^2-6)x+1$ در نقطه ای به طول -1 ماکزیمم داشته باشد، مقدار m چیست؟

مثال: در تابع $y=ax^3+bx^2$ ضرایب را چنان بیابید که نقطه $(1,2)$ اکسترمم نسبی باشد.

مثال: اگر نقطه $(-2,5)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+b$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

مثال: مقدار b,a را چنان بیابید که نقطه $A(-1,2)$ یک $\max$ نسبی تابع $f(x)=ax^3+bx^2$ باشد.

مثال: اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد مقادیر b,a را به دست آورید. خرداد۹۸

مثال: اگر نقطه $(2,1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر b,d را به دست آورید. خرداد۹۹ خارج نوبت صبح

نکته: در تمام مسائل اکسترمم به نکات زیر دقت ویژه داشته باشید

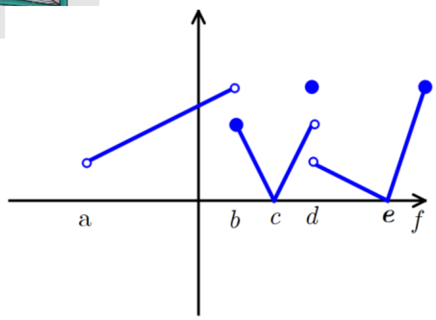
۱- نقاط ابتدا و انتهای بازه ی بسته، نقاط اکسترمم نسبی نیستند.

۲- اگر تابع در $x=a$ دارای اکسترمم نسبی باشد و مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(a)=0$

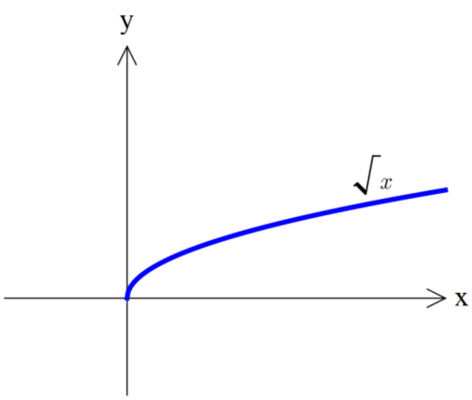
۳- لزومی ندارد تابع f در نقاط اکسترمم خود پیوسته یا مشتق پذیر باشد.

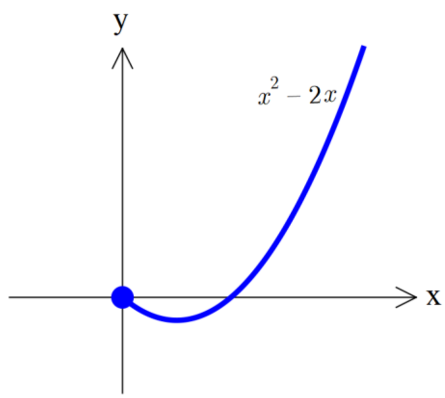
۴- هر نقطه بر روی تابع ثابت هم مینیمم نسبی است هم ماکزیمم نسبی است.

مثال: در چند نقطه از شکل مقابل اکسترمم نسبی داریم.



مثال: وضعیت اکسترمم نسبی هر یک از توابع زیر را در بازه ی داده شده بررسی کنید.





مثال: جدول تغییرات تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+۴$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. شهریور۹۸

مثال: با رسم جدول تغییرات تابع $f(x)=x^{3}+x^{2}-9x-10$ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را در صورت وجود بیابید. دی۹۸

مثال: نقاط اکسترمم تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}+\frac{1}{2}x^{2}$ را بیابید.

نکته : در تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ ریشه ساده یا ریشه از مرتبه فردِ $f'(x)=0$، طول نقاط اکسترمم نسبی هستند و ریشه مضاعف یا ریشه مرتبه زوج طول نقاط اکسترمم نیستند.

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را بیابید.

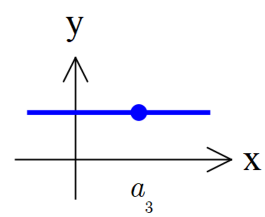
مثال: تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول تغییرات تابع ، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را به دست آورید. تیر۹۹

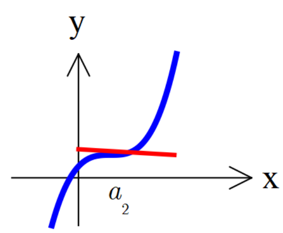
نقطه بحرانی

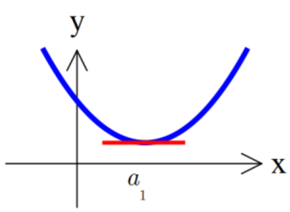
فرض کنید $a \in D_f$ باشد. نقطه ای به طول a را بحرانی گوییم هرگاه: $f'(a) = 0$ **یا** $f'(a)$ وجود نداشته باشد.

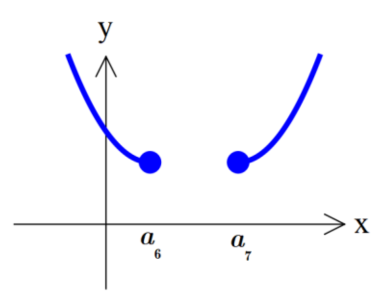
مثال: نقطه بحرانی را تعریف کنید. خرداد۹۹ خارج

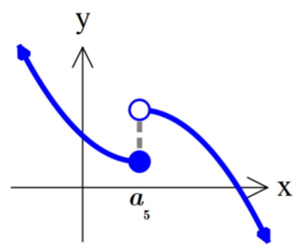
در تمام شکل های زیر تمام حالت های نقطه بحرانی آمده است:

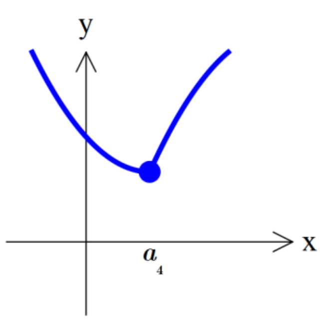












نکته: هر اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی است **اما** هر نقطه بحرانی لزوماً یک اکسترمم نسبی نیست.

در شکل بالا $a_{۷}, a_{۶}, a_{۲}$ بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست. ولی در بقیه نقطه ها هر دو خاصیت رو داراست.

نکته: در حالت کلی برای یافتن نقاط بحرانی تابع پیوسته f ، باید ابتدا دامنه آن را یافته و تابع مشتق را به دست آوریم و نقاطی از دامنه که مشتق در آن صفر است **یا** مشتق وجود ندارد را بیابیم.

📖 **مثال:** نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲}$ را بیاید.

در تابع با ضابطه $y = |f(x)|$ که در آن تابع f تابعی مشتق پذیر در R است، نقاط بحرانی تابع عبارتند از :

الف) ریشه های معادله $f(x) = ۰$ ب) ریشه های معادله $f'(x) = ۰$

📖 **مثال:** نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x^{۲} - ۴|$ را بیابید.

مثال: نقاط بحرانی $f\left(x\right)=\left|\,|x|-۲\right|$ را به دست آورید (در صورت وجود.)

اکسترمم مطلق

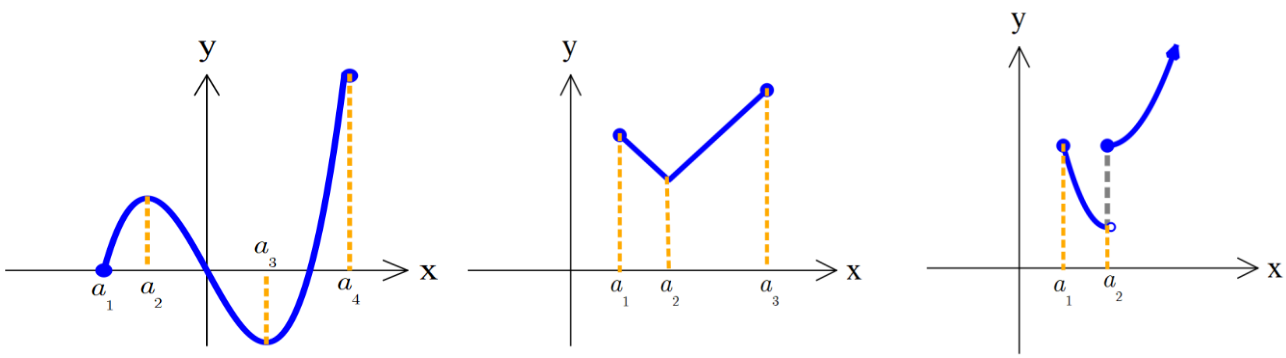
نقطه $M\in D_f$ را نقطهٔ **ماکزیمم مطلق** گوییم هرگاه به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم: $f\left(M\right)\geq f\left(x\right)$ در واقع ماکزیمم مطلق نقطه ای است که عرض آن از عرضِ تمام نقاط دامنه بزرگتر باشد.

نقطه $M\in D_f$ را نقطهٔ **مینیمم مطلق** گوییم هرگاه به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم: $f\left(M\right)\leq f\left(x\right)$ در واقع مینیمم مطلق نقطه ای است که عرض آن از عرضِ تمام نقاط دامنه کوچکتر باشد.

یک نکته بسیار مهم در مورد اکسترمم نسبی

۱- نقاط تنها میتوانند مطلق باشند اما نسبی نیستند. ۲- ابتدا و انتهای بازه میتوانند مطلق باشند اما نسبی نیستند.

مثال: در شکل های زیر وجود نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق را بررسی کنید.



قضیه: اگر تابعی در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، حتما در این بازه دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است.

دقت کنید اگربازه فوق باز باشد ممکن است اکسترمم مطلق نداشته باشد.

برای یافتن اکسترمم های مطلق تابع f در بازه $[a,b]$ ابتدا نقاط بحرانی را در بازه (a,b) یافته و مقدار تابع را در این نقاط پیدا میکنیم. سپس این مقادیر را با مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه می کنیم. نقطه یا نقاطی که دارای بیشترین عرض باشد، ماکزیمم مطلق و نقطه یا نقاطی که دارای کمترین عرض باشد مینیمم مطلق است.

مثال: اکسترمم های مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳x^۴-۴x^۳$ را در بازه $[-۱,۲]$ بیابید.

مثال: الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=-۲x^۳+۹x^۲-۱۳$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید.

ب) اکسترمم های مطلق تابع f را در بازه ی $[-۱,۲]$ تعیین کنید. تیر۹۸

📖 **مثال:** اکسترمم های مطلق تابع $g(x)=x^3+2x-5$ را در بازه $[-2,1]$ در صورت وجود تعیین کنید. شهریور۹۸ تیر۹۹خارج نوبت عصر

📖 **مثال:** تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ را در نظر بگیرید.مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را در بازه $[0,3]$ را به دست آورید. تیر۹۹

بهینه سازی

وقتی با یک سری داده ها میخواهیم بیشترین یا کمترین مقدار یک عبارتی را به دست آوریم، با مسائل بهینه سازی سرو کار داریم. مثلا میدانیم $2x+y=9$ مشخص است که y,x های زیادی در این عبارت صدق می کنند. وقتی از ما خواسته شود بگوییم بین آن y,x ها کدامشان بیشترین مقدار xy^2 را خواهند ساخت، با مسائل بهینه سازی سر و کار داریم.

📖 **مثال:** محیط مستطیلی ۲۰ سانتی متر است. ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن ماکزیمم شود.

📖 **مثال:** میخواهیم در کنار یک رودخانه زمینی مستطیل شکل بخریم و دور آن را حصور بکشیم(قسمتی که کنار رودخانه قرار دارد را حصار نکشید) اگر برای کشیدن حصار ۲۰ متر نرده داشته باشیم بیشترین مساحت ممکن برای زمین چقدر است؟

📖 **مثال:** اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود. دی۹۷

🕮 **مثال:** اگر بین دو عدد حقیقی y, x رابطهٔ $\text{۱۰}x - y = \text{۵}$ باشد، مقادیر y, x را طوری بیابید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم شود. تیر۹۸

🕮 **مثال:** دو عدد حقیقی b, a را طوری بیابید که داشته باشیم $\text{۲}a + b = \text{۶۰}$ و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن شود. شهریور۹۸

🕮 **مثال:** ورق فلزی مربع شکل به طول یک متر را در نظر بگیرید. میخواهیم از چهارگوشهٔ آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمیگردانیم تا یک جعبه درباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر اندازه ممکن گردد. خرداد۹۸

مثال: هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت $۳۲cm^۲$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایین هر صفحه $۲cm$ و حاشیه های کناری هر کدام $۱cm$ در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد. تیر۹۹ داخل

مثال: نشان دهید در بین تمام مستطیلهایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول وعرض آن هم اندازه باشد.