۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

$1398 \overset{9}{\equiv} ? \to 1\times10^3+3\times10^2+9\times10+8\times10^0 \overset{9}{\equiv} ? \qquad \underrightarrow{10\overset{9}{\equiv}1,\ 10^2\overset{9}{\equiv}1}$

$1\times1+3\times1+9\times1+8\times1 \overset{9}{\equiv} 1+3+9+8 \overset{9}{\equiv} 21 \overset{9}{\equiv} 3$

به دستهٔ همنهشتی ۳

۲ اگر $k\in\mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$k\overset{3}{\equiv}0$ یا $k\overset{3}{\equiv}1$ یا $k\overset{3}{\equiv}2$

(به عبارت دیگر، $k\in[0]_3$ یا $k\in[1]_3$ یا $k\in[2]_3$)

$k\in\mathbb{Z}$

قضیه تقسیم

$$\begin{cases} k=3q+0 \to k-0=3q \to 3|k-0 \to k\overset{3}{\equiv}0 \\ k=3q+1 \to k-1=3q \to 3|k-1 \to k\overset{3}{\equiv}1 \\ k=3q+2 \to k-2=3q \to 3|k-2 \to k\overset{3}{\equiv}2 \end{cases}$$

۳ اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $n|m$ ثابت کنید $a\overset{n}{\equiv}b$.

$a\overset{m}{\equiv}b \to m|a-b \xrightarrow[\text{خاصیت تعدی}]{n|m} n|a-b \to a\overset{n}{\equiv}b$

۴ فرض کنیم، $a\overset{m}{\equiv}b$ و $b\overset{n}{\equiv}c$ و $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a\overset{d}{\equiv}c$.

$(m,n)=d \to d|m,\ d|n$

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \to m|a-b \xrightarrow{d|m} d|a-b \\ b\overset{n}{\equiv}c \to n|b-c \xrightarrow{d|n} d|b-c \end{array}\right\} + \ d|a-c \Rightarrow a\overset{d}{\equiv}c$$

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a\overset{m}{\equiv}b$.

فرض می‌کنیم باقیمانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m برابر r باشد:

$a=mq+r \ ,\ b=mq'+r$

$a-b=mq+r-(mq'+r)=mq+\cancel{r}-mq'-\cancel{r}=mq-mq' \to a-b=m(\overbrace{q-q'}^{q''})$

$a-b=mq'' \to m|a-b$

$\to a\overset{m}{\equiv}b$

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

فرض می‌کنیم $a\overset{m}{\equiv}b$ ثابت می‌کنیم که باقیمانده تقسیم a و b بر m باهم برابر است.

اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم که باقیمانده تقسیم a و b بر m دو عدد متفاوت r و r' باشند که $r\neq r'$ $\quad 0\le r,r'<m \to r-r'<m$ (I)

$$\left.\begin{array}{l} a=mq+r \\ b=mq'+r' \end{array}\right\} a-b=mq+r-(mq'+r') \Rightarrow a-b=m(q-q')+(r-r')$$

فرض مسئله $a\overset{m}{\equiv}b \to m|a-b \to a-b=mk$

$\Rightarrow mk=m(q-q')+r-r'$

$\Rightarrow m(k-q+q')=r-r'$

$m|r-r' \to m<r-r'$ (II)

رابطه های I و II با هم در تناقض هستند پس فرض خلف باطل است و باقیمانده a و b بر m عددی یکسان است.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\times a^n+\binom{n}{1}\times a^{n-1}b+\binom{n}{2}\times a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}\times a^{n-3}b^3+\dots+\binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$.

$$(a+b)^n=\overbrace{\cancel{\binom{n}{0}}^{1}a^n}^{\text{فقط } a^n}+\underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b}_{\text{هم a هم b}}+\underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{\text{هم a هم b}}+\dots+\underbrace{\binom{n}{n-1}ab^{n-1}}_{\text{هم a هم b}}+\underbrace{\cancel{\binom{n}{n}}^{1}b^n}_{\text{فقط } b^n}$$

$$(a+b)^n-(a^n+b^n)=\underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}}_{\text{از ab می‌شود فاکتور گرفت}} \to ab|(a+b)^n-(a^n+b^n) \Rightarrow (a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

طبق تمرین قبل $۲۳^{۵۱} = (۱۱+۱۲)^{۵۱} \overset{۱۱\times۱۲}{\equiv} ۱۱^۲+۱۲^۲$

$(۱۱+۱۲)^{۵۱} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۱۱^۲+۱۲^۲ \to (۱۱+۱۲)^{۵۱} - ۱۱^۲ - ۱۲^۲ \overset{۱۳۲}{\equiv} ۰ \to ۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۰ \to$ باقی‌مانده

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱}+۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

$۲^۵ \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۸۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{\times۲} ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \to ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{+۷} ۲^{۱۱}+۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۸ \xrightarrow{\times۹}$

$(۲^{۱۱}+۷)\times۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۷۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۳$

$A \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \to$ باقی‌مانده

۱۰ اگر دو عدد $(۳a-۵)$ و $(۴a-۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a+۶)$ را به‌دست آورید.

دو عدد که رقم یکان برابر دارند یعنی در تقسیم بر ۱۰ باقی‌مانده یکسان دارند

$۴a-۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a-۵ \to ۴a-۳a \overset{۱۰}{\equiv} -۵+۷ \to a \overset{۱۰}{\equiv} ۲$ به پیمانه ۱۰ با هم همنهشت هستند

$a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times۹} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۱۸ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \to ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \xrightarrow{+۶} ۹a+۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$ حال $۹a+۶$ را می‌سازیم.

$\to ۹a+۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \to$ باقی‌مانده

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \dots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

همگی ۵×۲ دارند و مضرب ۱۰ هستند

$۱!+۲!+۳!+۴!+\cancel{۵!}+\cancel{۶!}+\cancel{۷!}+\cancel{۸!}+\cancel{۹!}+\cancel{۱۰!}+\cancel{۱۱!}+\dots+\cancel{۴۹۹!}+\cancel{۵۰۰!} \overset{۱۰}{\equiv} ۱+(۲\times۱)+(۳\times۲\times۱)+(۴\times۳\times۲\times۱)$

همگی مضرب ۱۰ هستند و ۱۰ دارند

$۱+۲+۶+۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۳۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \to$ باقی‌مانده A در تقسیم بر ۱۰ = رقم یکان A

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x+۵y=۱۱$ را به‌دست آورید.

$(۷,۵)|۱۱ \to$ معادله جواب دارد

$۷x \overset{۵}{\equiv} ۱۱ \xrightarrow{۱۱ \overset{۵}{\equiv} ۲۱} ۷x \overset{۵}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{(۵,۷)=۱} \frac{۷x}{۷} \overset{۵}{\equiv} \frac{۲۱}{۷} \to x \overset{۵}{\equiv} ۳ \to x = ۵k+۳$

جایگذاری در معادله سیاله $\to ۷(۵k+۳)+۵y=۱۱ \to ۳۵k+۲۱+۵y=۱۱ \to ۵y=-۳۵k-۱۰ \to y=-۷k-۲$

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های $\overset{x}{۲۰۰۰}$ و $\overset{y}{۵۰۰۰}$ تومانی تبدیل کرد؟

$۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۲۹۰۰۰$

$\to ۲x+۵y=۲۹ \to ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹$ $(۲,۵)|۲۹$ پس معادله سیاله جواب دارد

$\xrightarrow{۲۹\overset{۵}{\equiv}۲۴} ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۴ \xrightarrow{(۵,۲)=۱} \frac{۲x}{۲} \overset{۵}{\equiv} \frac{۲۴}{۲} \to x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{۱۲\overset{۵}{\equiv}۲} x \overset{۵}{\equiv} ۲ \to x=۵k+۲$ جواب عمومی

جایگذاری در معادله سیاله $۲(۵k+۲)+۵y=۲۹ \to ۱۰k+۴+۵y=۲۹ \to ۵y=-۱۰k+۲۵ \to y=-۲k+۵$ جواب عمومی

$k=۰ \begin{cases} x=۲ \\ y=۵ \end{cases}$ ۲ دو هزار تومانی و ۵ تا پنج هزار تومانی

$k=۱ \begin{cases} x=۷ \\ y=۳ \end{cases}$ ۷ تا دو هزار تومانی و ۳ تا پنج هزار تومانی

$k=۲ \begin{cases} x=۱۲ \\ y=۱ \end{cases}$ ۱۲ تا دو هزار تومانی و ۱ پنج هزار تومانی

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

الف) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$ $(۴۲۳,۱۱)=۱|۷۹$ معادله جواب دارد.

$۴۲۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \to ۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۵x$

معادله جدید $\to ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹ \xrightarrow{۷۹\overset{۱۱}{\equiv}۹۰} ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۹۰ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} \frac{۵x}{۵} \overset{۱۱}{\equiv} \frac{۹۰}{۵} \to x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{۱۸\overset{۱۱}{\equiv}۷} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \to x=۱۱k+۷$

ب) $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ $\xrightarrow{۲۰\overset{۱۲}{\equiv}۸} ۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۸ \xrightarrow{(۸,۱۲)=۴} \frac{۸x}{۸} \overset{۱۲/۴}{\equiv} \frac{۸}{۸} \to x \overset{۳}{\equiv} ۱ \to x=۳k+۱$

ج) $۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$ $(۶,۵۱)=۳$ $(۶,۵۱)\nmid ۱۱$ معادله جواب ندارد.

$۵۱=۳\times۱۷$
$۶=۲\times۳$

۱۵ اگر اوّل مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

روزهای باقی‌مانده از مهر — روزهای آبان، آذر، دی و بهمن — روزهای اسفند

$\cancel{29} + 4\times\cancel{30} + \cancel{7} \overset{7}{\equiv} 1+8+0 \overset{7}{\equiv} 9$

$9 \overset{7}{\equiv} 2$

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

سه‌شنبه

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

شروع — پایان

$-\cancel{12} - 4\times\cancel{30} - \cancel{31} - 1 \overset{7}{\equiv} -4-8-3-1 \overset{7}{\equiv} -16$

$-16 \overset{7}{\equiv} -2 \overset{7}{\equiv} +5$

ج	ش	ی	د	س	چ	پ
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

نکته: یا روز مبدأ یا روز مقصد پایان را نادیده می‌گیریم. جواب: چهارشنبه

۱۷ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

$5x+9 \longleftarrow$ ۵ برابر عددی به علاوه ۹

$5x+9 \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} -9 \xrightarrow{-9\overset{11}{\equiv}-20} 5x \overset{11}{\equiv} -20 \xrightarrow[\text{تقسیم بر ۵}]{(5,11)=1} \frac{5x}{5} \overset{11}{\equiv} \frac{-20}{5} \rightarrow x \overset{11}{\equiv} -4 \overset{11}{\equiv} 7$

$x \overset{11}{\equiv} 7 \rightarrow x = 11k+7 \quad k\in\mathbb{Z}$

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$3x+5y=23 \xrightarrow[\text{همنهشتی}]{\text{تبدیل به معادله}} 3x \overset{5}{\equiv} 23 \xrightarrow[+5+5]{23\overset{5}{\equiv}33} 3x \overset{5}{\equiv} 33 \xrightarrow[\text{تقسیم بر ۳}]{(5,3)=1} \frac{3x}{3} \overset{5}{\equiv} \frac{33}{3} \rightarrow x \overset{5}{\equiv} 11 \quad 11\overset{5}{\equiv}1$

$x \overset{5}{\equiv} 1 \rightarrow x=5k+1$ جواب عمومی $\xrightarrow[\text{سیاله}]{\text{جایگذاری در معادله}} 3(5k+1)+5y=23 \rightarrow 5y=-15k+20 \rightarrow y=-3k+4$ جواب عمومی

$k=0 \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ ۱ وزنه ۳ کیلویی و ۴ وزنه ۵ کیلویی

$k=1 \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$ ۶ وزنه ۳ کیلویی و یک وزنه ۵ کیلویی

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

x: تعداد گل‌های نوع اول — y: تعداد گل‌های نوع دوم

معادله سیاله $\rightarrow x+y=9$

معادله همنهشتی $\rightarrow x \overset{1}{\equiv} 9 \rightarrow x=k+9$

جایگذاری x در معادله سیاله $\rightarrow k+9+y=9 \rightarrow y=-k$

$k=0 \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$ $k=-1 \begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases}$ $k=-2 \begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$

$k=-3 \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$ $k=-4 \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ $k=-5 \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ $k=-6 \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$ $k=-7 \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$

$k=-8 \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$ $k=-9 \begin{cases} x=0 \\ y=9 \end{cases}$

به ۱۰ طریق

۲۰ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

x: تعداد سؤالات ۷ امتیازی — y: تعداد سؤالات ۹ امتیازی

معادله سیاله $\rightarrow 7x+9y=73$

معادله همنهشتی $\rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 73 \xrightarrow[-5\times9]{73\overset{9}{\equiv}28} 7x \overset{9}{\equiv} 28 \xrightarrow{(7,9)=1} \frac{7x}{7} \overset{9}{\equiv} \frac{28}{7} \rightarrow x \overset{9}{\equiv} 4 \rightarrow x=9k+4$

$7(9k+4)+9y=73 \rightarrow 63k+28+9y=73 \rightarrow 9y=-63k+45 \rightarrow y=-7k+5$

$k=0 \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

۴ سؤال ۷ امتیازی و ۵ سؤال ۹ امتیازی