بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

ریاضی (۲)

پایه یازدهم علوم تجربی

فصل ۵

۱ تابع نمایی و ویژگی های آن

۲ تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

۳ نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۵

درس ۳

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

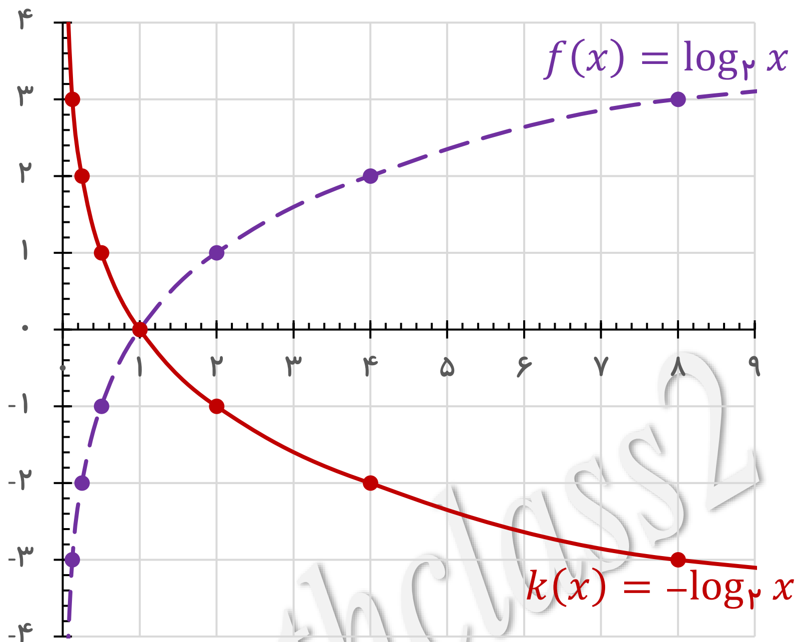
اهداف

- آشنایی با نحوهٔ انتقال نمودارهای توابع نمایی
- آشنایی با نحوهٔ انتقال نمودارهای توابع لگاریتمی
- یافتن ضابطهٔ توابع نمایی انتقال یافته با استفاده از نمودار آنها
- یافتن ضابطهٔ توابع لگاریتمی انتقال یافته با استفاده از نمودار آنها
- آشنایی با کاربردهای تابع نمایی
- آشنایی با کاربردهای تابع لگاریتمی

فعالیت صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

نمودار توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $k(x) = -\log_۲ x$



قرینه نمودار نسبت به محور طول ها

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $-f(x)$ را با قرینه کردن نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها به دست آورد.

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع لگاریتمی $f(x) = \log_۲ x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
$\log_۲ x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$-\log_۲ x$	۲	۱	۰	-۱	-۲

نمودار توابع $y = -\log_a x$ و $y = \log_{\frac{۱}{a}} x$ یکسان هستند. (a همواره مثبت و مخالف یک است)

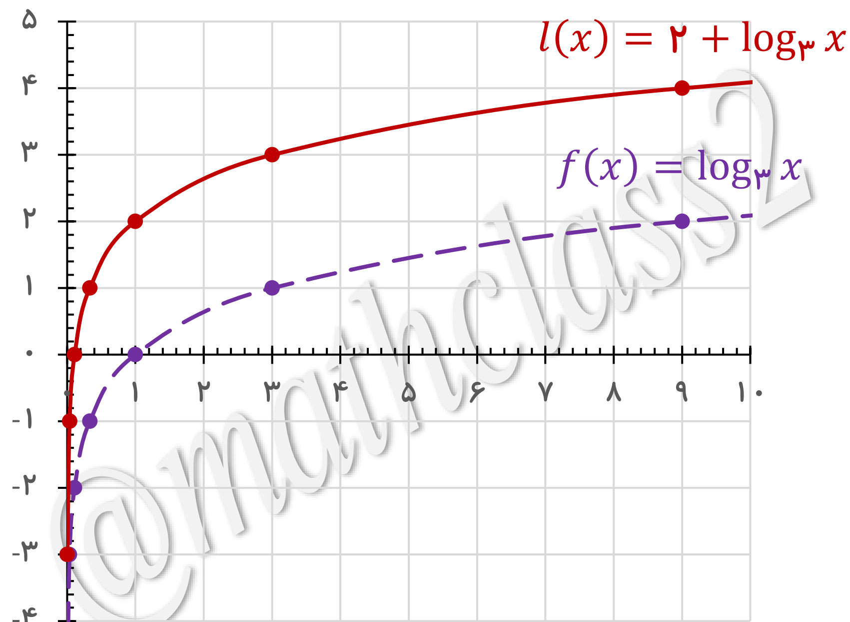
فعالیت صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

انتقال نمودار در راستای محور عرض ها

ب) $l(x) = ۲ + \log_۳ x$

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت مثبت محور yها به دست آورد.

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x) - k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت منفی محور yها به دست آورد.



برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $f(x) = \log_۳ x$ را به اندازه ۲ واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم.

x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
$\log_۳ x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$۲ + \log_۳ x$	۰	۱	۲	۳	۴

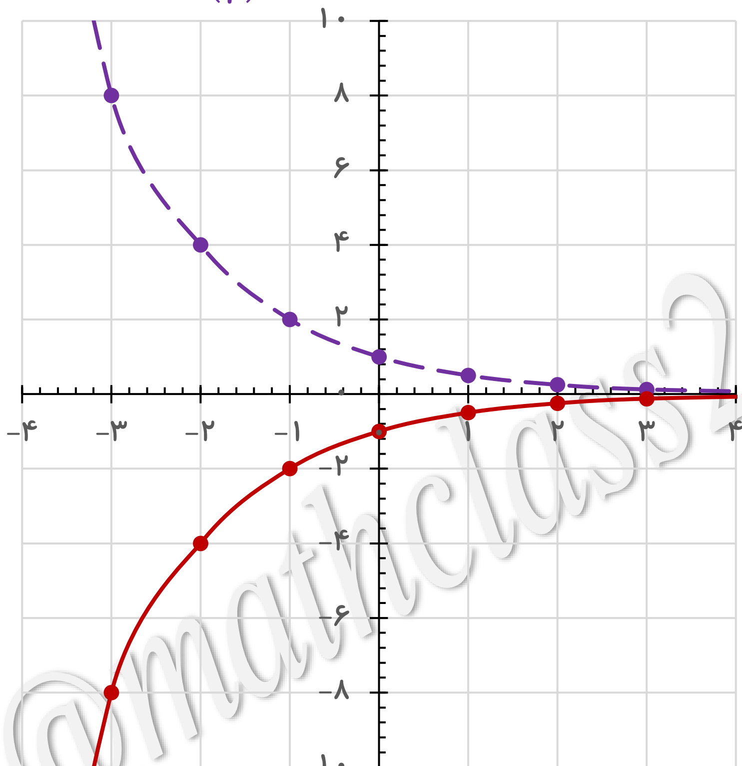
انتقال یافتهٔ (عرضی) تابع $y = \log_۳ x$

فعالیت صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

قرینه نمودار نسبت به محور طول ها

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $-f(x)$ را با قرینه کردن نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها به دست آورد.

پ) $h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$



برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع نمایی $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

x	۲-	۱-	۰	۱	۲
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$-\left(\frac{1}{2}\right)^x$	۴-	۲-	۱-	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$

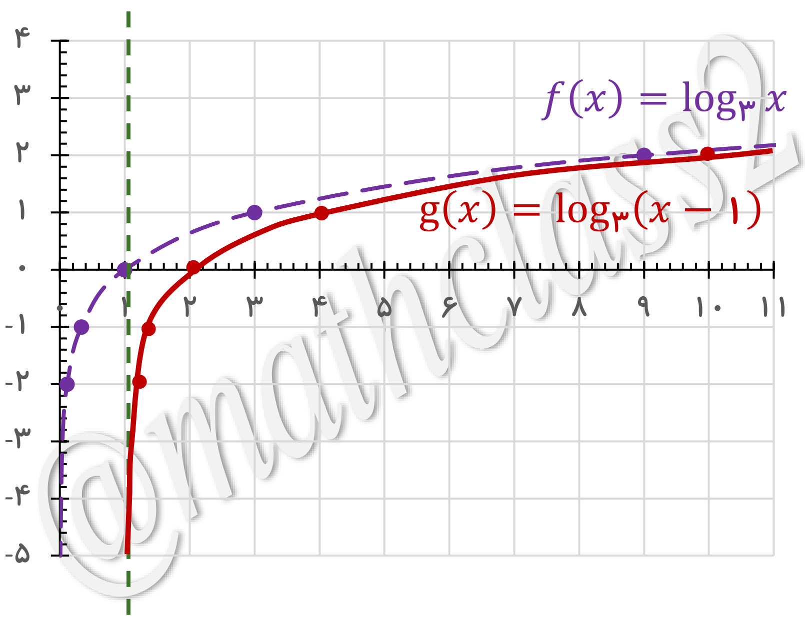
فعالیت صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

ت) $g(x) = \log_{۳}(x - ۱)$

انتقال نمودار در راستای محور طول ها

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x+k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت منفی محور xها به دست آورد.

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x-k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت مثبت محور xها به دست آورد.



دقت کنید

دامنهٔ تابع $g(x) = \log_{۳}(x - ۱)$ برابر با xهای بزرگتر از یک است.

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $f(x) = \log_{۳} x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور xها انتقال دهیم.

انتقال یافتهٔ (طولی) تابع $y = \log_{۳} x$

تشکیل جدول مقادیر در انتقال طولی؛ به نفع ما نیست.

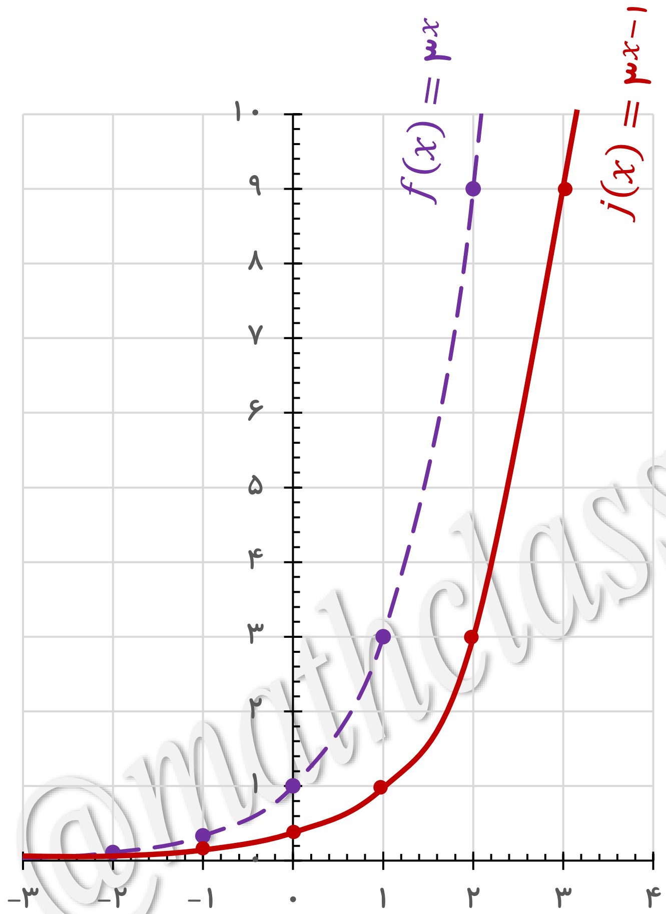
فعالیت صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

انتقال نمودار در راستای محور طول ها

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x+k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت منفی محور xها به دست آورد.

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x-k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت مثبت محور xها به دست آورد.

ث $j(x) = ۳^{x-۱}$



برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $f(x) = ۳^x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور xها انتقال دهیم.

انتقال یافتهٔ (طولی) تابع $y = ۳^x$

تشکیل جدول مقادیر در انتقال طولی؛ به نفع ما نیست.

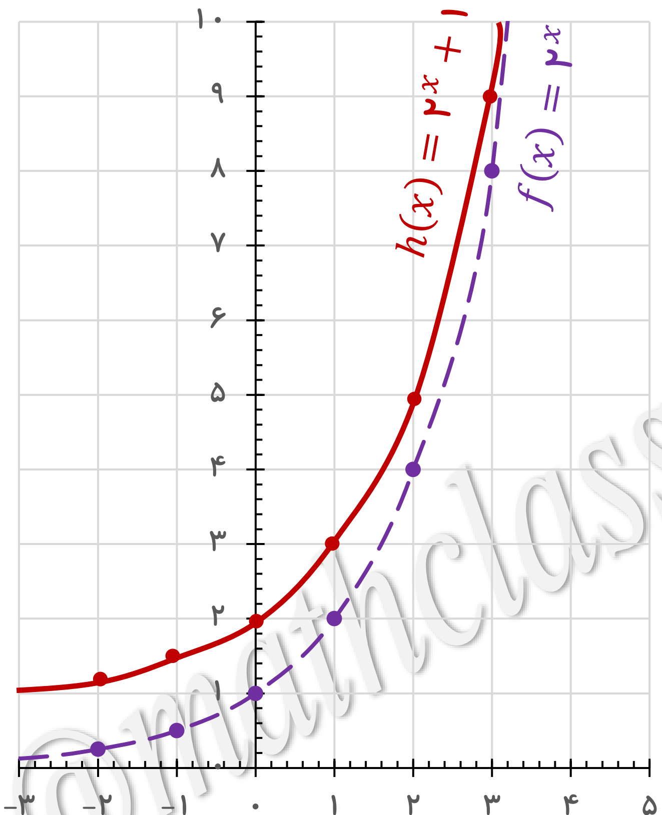
انتقال نمودار در راستای محور عرض ها

فعالیت صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت مثبت محور yها به دست آورد.

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x)-k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت منفی محور yها به دست آورد.

ج) $h(x) = ۲^x + ۱$



برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم.

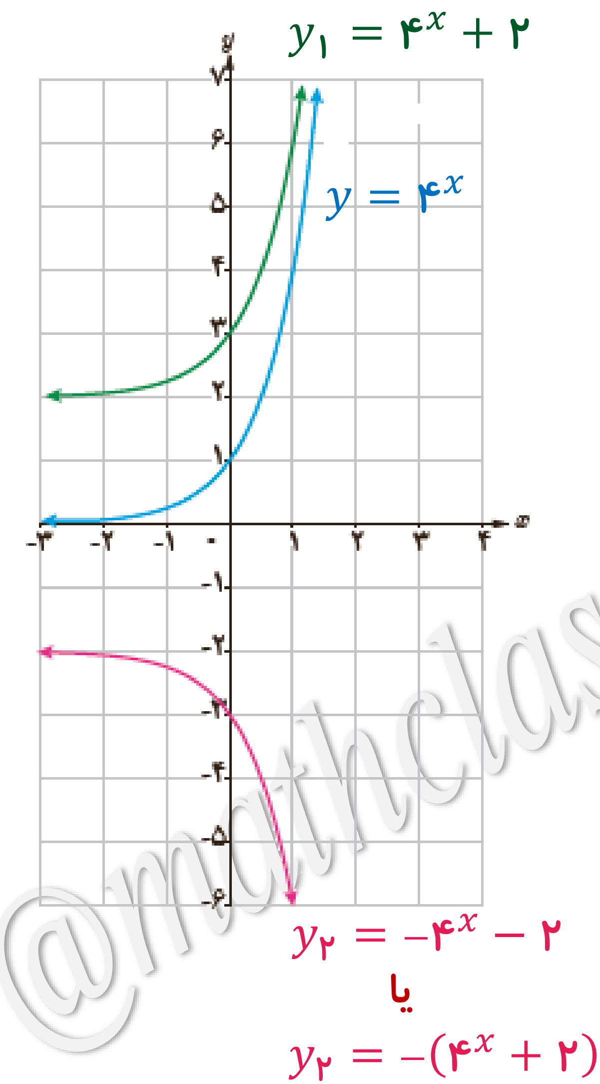
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
۲^x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
$۲^x + ۱$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳	۵

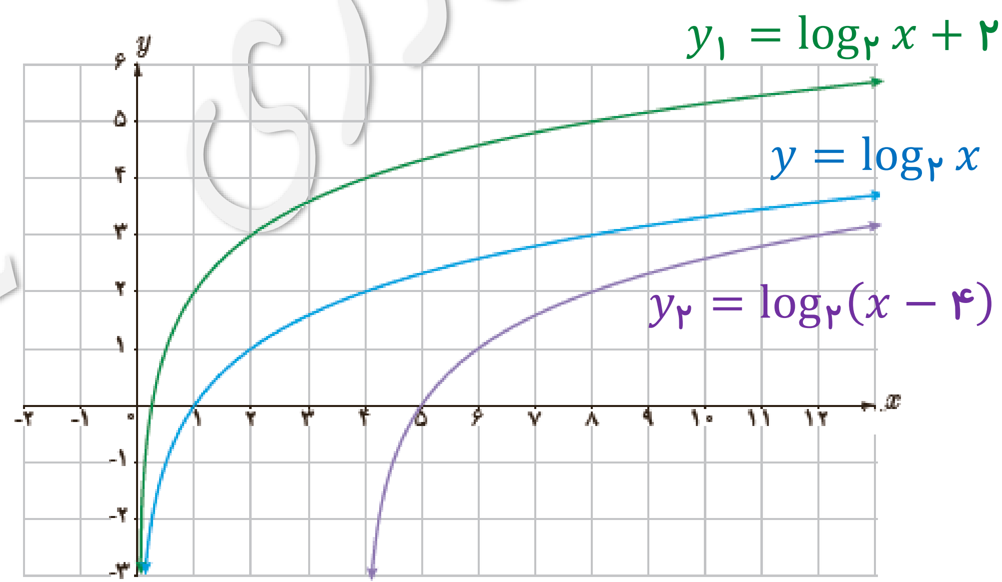
انتقال یافتهٔ (عرضی) تابع $y = ۲^x$

کار در کلاس ۱ صفحه ۱۱۶ کتاب درسی

در شکل های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته های آنها رسم شده است.

ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.

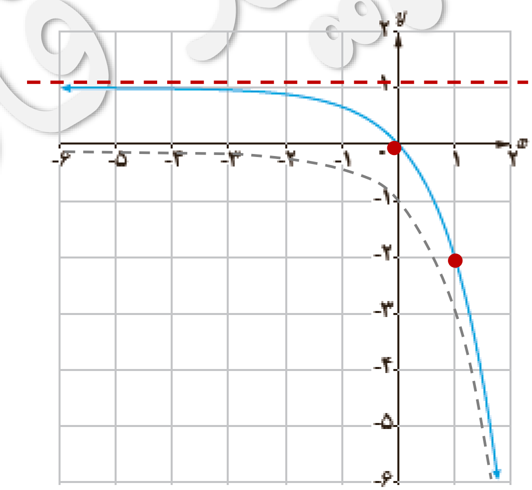




کار در کلاس ۲ صفحه ۱۱۶ کتاب درسی

کدام یک از ضابطه ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۳) $y = ۱ - ۳^x$

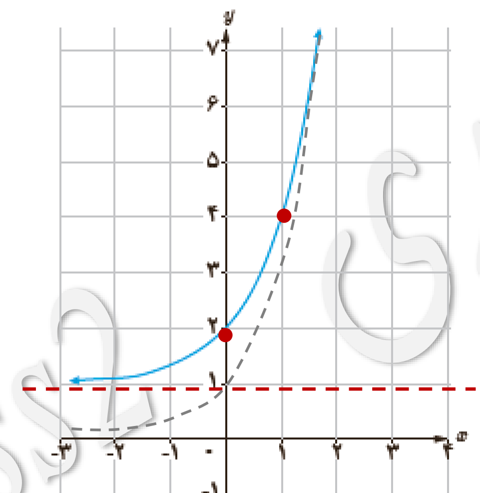


(پ)

x	۰	۱
y	۰	-۲

$y = ۳^x$ نسبت به محور طول ها قرینه شده و یک واحد در جهت مثبت محور yها منتقل شده

۲) $y = ۳^x + ۱$

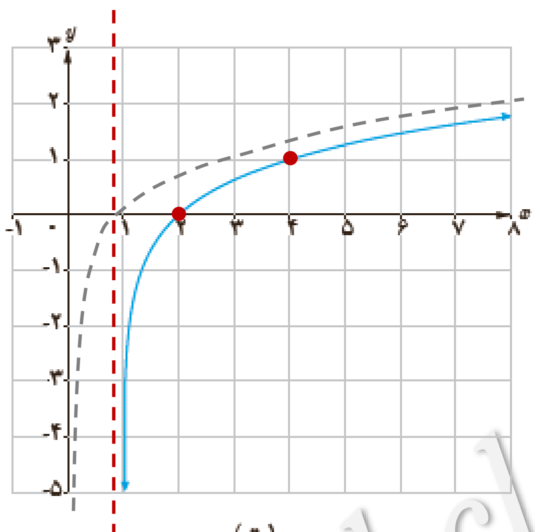


(ج)

x	۰	۱
y	۲	۴

$y = ۳^x$ یک واحد در جهت مثبت محور yها منتقل شده

۱) $y = \log_۳(x - ۱)$



(ت)

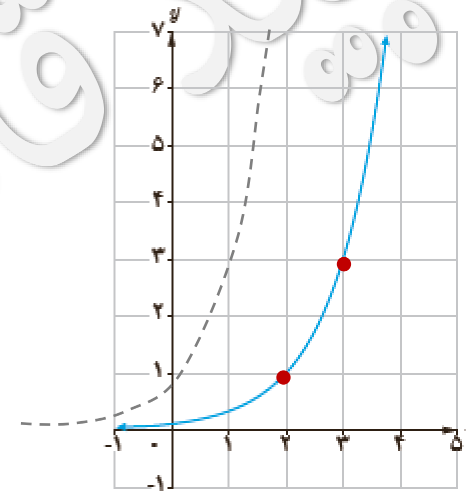
x	۲	۴
y	۰	۱

$y = \log_۳ x$ یک واحد در جهت مثبت محور xها منتقل شده و دامنهٔ آن xهای بزرگتر از یک است.

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۱۶ کتاب درسی

کدام یک از ضابطه ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۶ $y = ۳^{x-۲}$

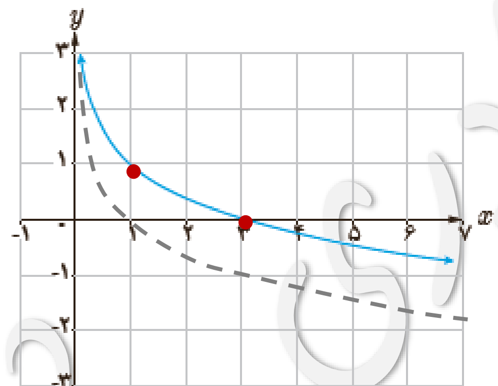


(ث)

x	۲	۳
y	۱	۳

$y = ۳^x$ دو واحد در جهت مثبت محور xها منتقل شده

۵ $y = ۱ - \log_۳ x$

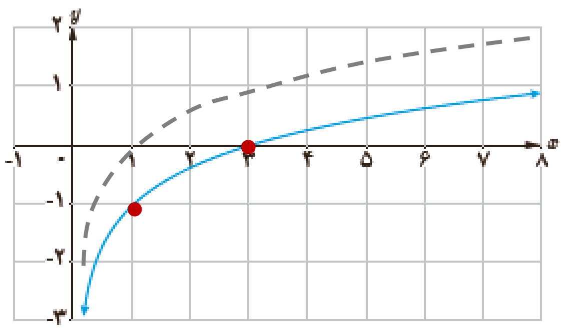


(ب)

x	۱	۳
y	۱	۰

$y = \log_۳ x$ قرینه شده و یک واحد در جهت مثبت محور yها منتقل شده

۴ $y = \log_۳ x - ۱$



(الف)

x	۱	۳
y	۱-	۰

$y = \log_۳ x$ یک واحد در جهت منفی محور yها منتقل شده

کاربرد توابع نمایی

صفحه ۱۱۷ کتاب درسی

تابعی با رفتار نمایی، در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهرشده و کاربرد دارد.

به عنوان مثال:

نوعی باکتری با نام E.coli ؛ به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می کند و تکثیر آن به صورت نمایی است.

ازدیاد این باکتری سبب بروز بیماری می شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می شود.

اندازهٔ هر توده باکتری بعد از ساعت از تابع نمایی با ضابطهٔ زیر به دست می آید:

$$p(t) = ۱۰۰ \times ۲^{۲t} \qquad (۰ \leq t \leq ۱۶)$$

با فرض این که هیچ کدام از باکتری ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با

$$p(۳) = ۱۰۰ \times ۲^{۶} = ۶۴۰۰$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : فرض کنید ۱۰ میلی گرم از یک دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطهٔ $A(t)=۱۰(۰/۸)^t$ به دست می آید.

مقدار دارویی که پس از گذشت ۸ ساعت در بدن شخص وجود دارد چقدر است؟

$$A(t)=۱۰(۰/۸)^t \rightarrow A(۸)=۱۰(۰/۸)^۸ \cong ۱/۶۷$$

صفحه ۱۱۷ کتاب درسی

کاربرد توابع لگاریتمی

تابعی لگاریتمی نیز در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهرشده و کاربرد دارد.

به عنوان مثال:

ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می دهد. اگر بزرگی زلزله ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ زلزله برابر (E) در واحد اِرگ (Erg) خواهد بود و از تابع لگاریتمی با ضابطهٔ زیر به دست می آید:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

مقدار انرژی آزاد شده در زلزلهٔ ۶/۶ ریشتری شهر بم (دی ماه ۱۳۸۲) برابر است با:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶/۶) = ۲۱/۷ \quad \Longrightarrow \quad E = ۱۰^{۲۱/۷}\ Erg$$

کار در کلاس صفحه ۱۱۷ کتاب درسی

زلزلهٔ ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار- منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۷/۴) = ۲۲/۹ \quad \Longrightarrow \quad E = ۱۰^{۲۲/۹}\, Erg$$

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : اگر اندازهٔ بزرگی زمین لرزه بر حسب ریشتر یک واحد بزرگ تر شود، انرژی آن چند برابر می شود؟

$$\log E_1 = 11/8 + 1/5M \Rightarrow E_1 = 10^{11/8+1/5M}\ Erg$$

$$\log E_2 = 11/8 + 1/5(M+1) \Rightarrow E_2 = 10^{11/8+1/5(M+1)}\ Erg$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{11/8+1/5(M+1)}}{10^{11/8+1/5M}}$$

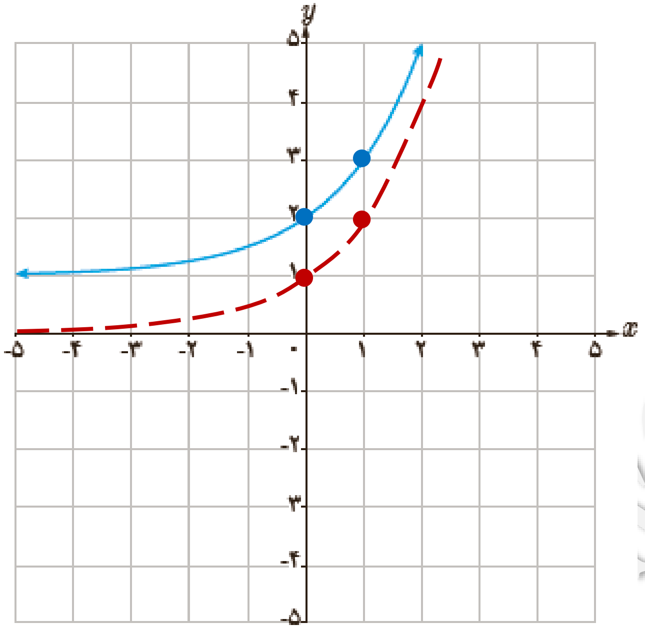
پایه ها برابرند، توان ها را از هم کم می کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{1/5} \cong 31/6$$

یعنی با یک واحد افزایش در مقیاس ریشتر، انرژی آزاد شده تقریباً ۳۱/۶ برابر می شود.

تمرین ۱ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

در دستگاه مختصات رو به رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + ۲^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید.



$y = ۲^x$ یک واحد در جهت مثبت محور yها منتقل شده پس a برابر یک است.

$y = ۲^x$ انتقال طولی نداشته پس b برابر صفر است.

تمرین ۲ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

فرض کنید $g(x) = ۴^x + ۲$ باشد،

الف) $g(-۱)$ را به دست آورید.

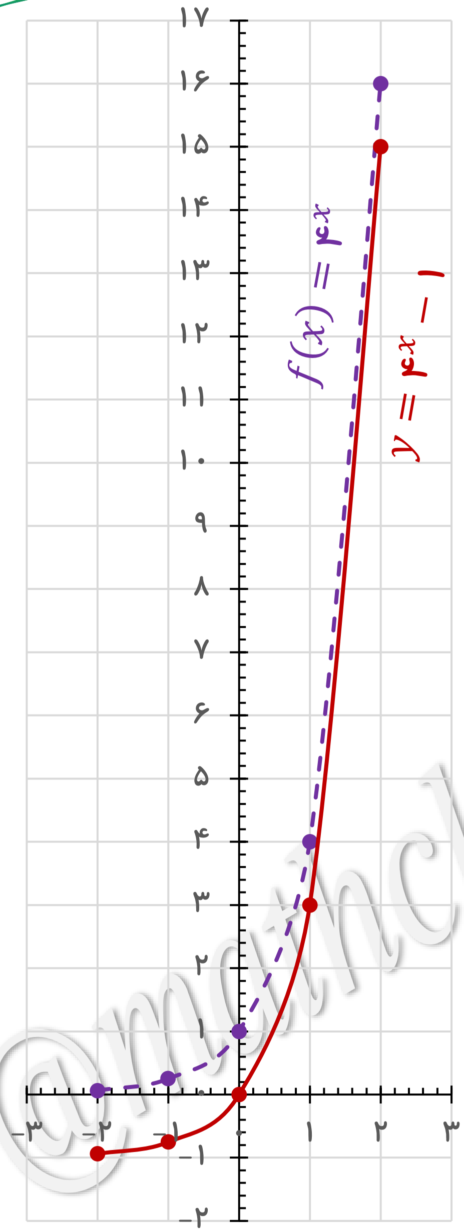
ب) اگر $g(x) = ۶۶$ باشد، مقدار چقدر است؟

الف) $g(x) = ۴^x + ۲ \rightarrow g(x) = ۴^{(-۱)} + ۲ = \frac{۱}{۴} + ۲ = \frac{۹}{۴}$

ب) $g(x) = ۴^x + ۲ \rightarrow ۶۶ = ۴^x + ۲ \rightarrow ۶۴ = ۴^x \rightarrow ۴^۳ = ۴^x \rightarrow x = ۳$

تمرین ۳ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴^x - ۱$ را در بازهٔ $[-۲\ ,\ ۲]$ رسم کنید.



برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $f(x) = ۴^x$ را به اندازه یک واحد در جهت منفی محور yها انتقال دهیم.

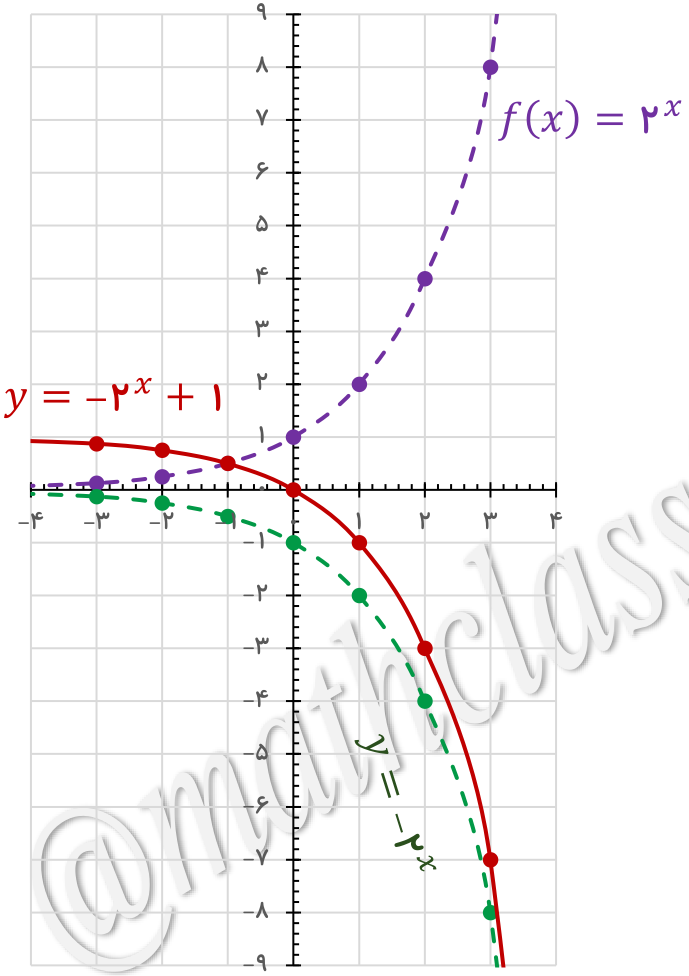
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
۴^x	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۴}$	۱	۴	۱۶
$۴^x - ۱$	$\frac{-۱۵}{۱۶}$	$\frac{-۳}{۴}$	۰	۳	۱۵

انتقال یافتهٔ (عرضی) تابع $y = ۴^x$

تمرین ۴ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

نمودار توابع با ضابطه های زیر را رسم کنید.

الف $y = -۲^x + ۱$



برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم، سپس به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
۲^x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
-۲^x	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{-۱}{۲}$	-۱	-۲	-۴
$-۲^x + ۱$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	-۳

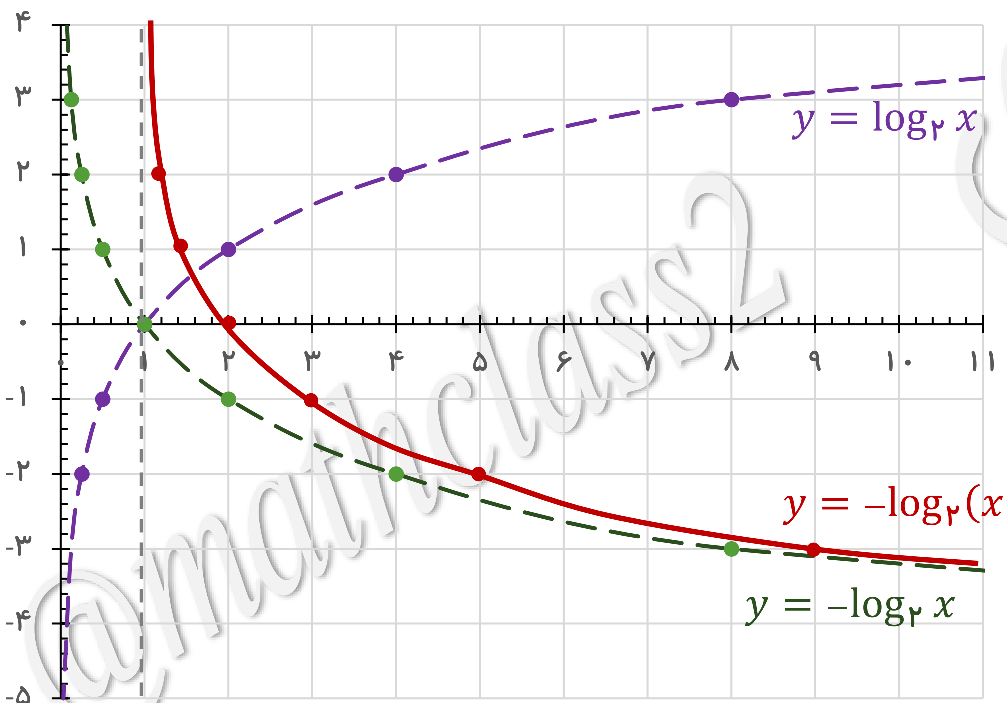
تمرین ۴ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

نمودار توابع با ضابطه های زیر را رسم کنید.

ب) $y = -\log_{۲}(x - ۱)$

دقت کنید

دامنهٔ این تابع برابر با xهای بزرگتر از یک است.

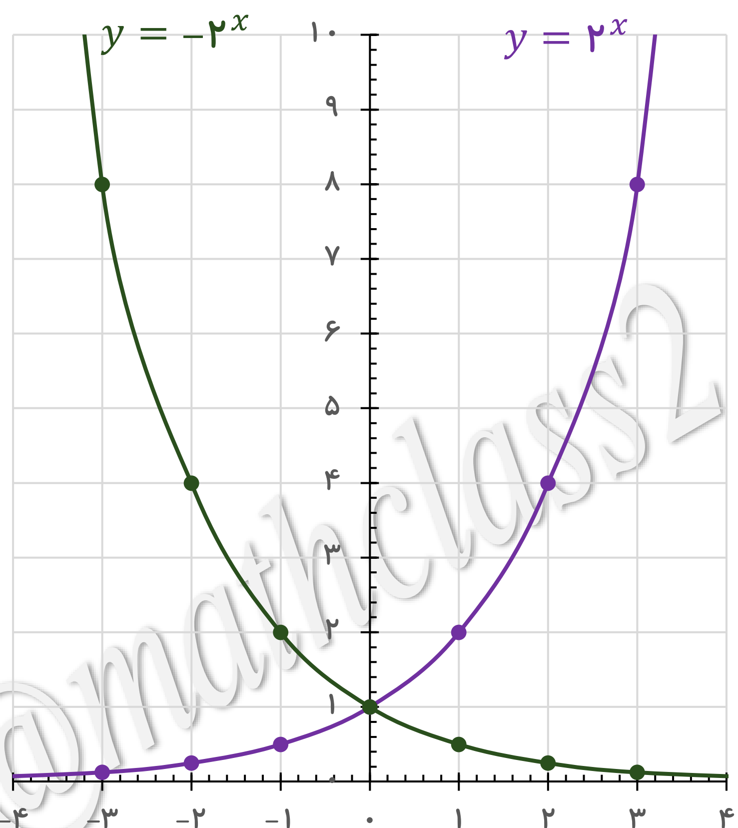


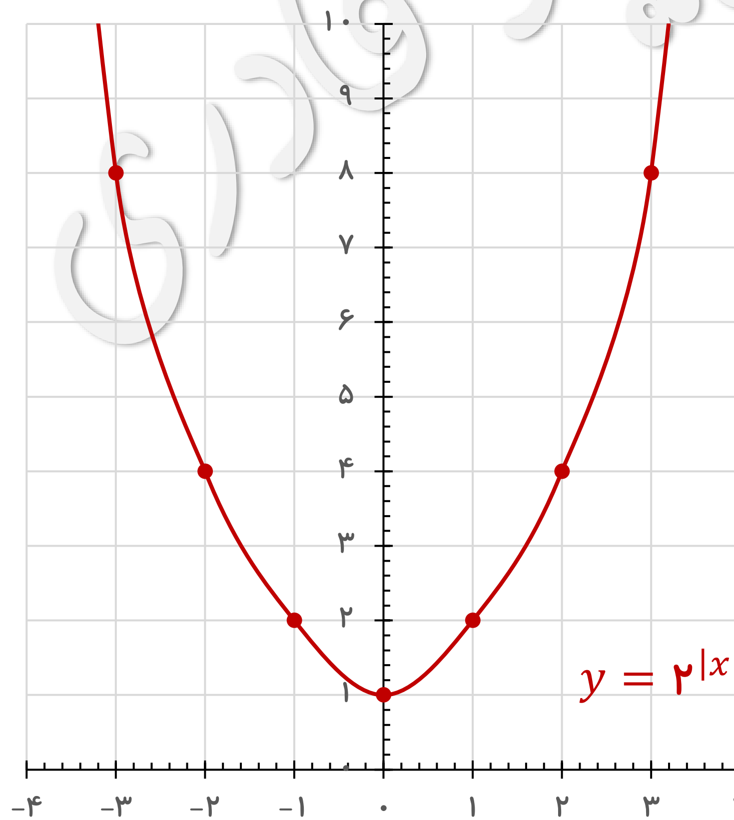
برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \log_{۲} x$ را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم، سپس به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور xها انتقال دهیم.

تمرین ۴ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

نمودار توابع با ضابطه های زیر را رسم کنید.

پ) $y = ۲^{|x|} \quad \rightarrow \quad y = \begin{cases} ۲^{x} & x \geq ۰ \\ ۲^{-x} & x < ۰ \end{cases}$

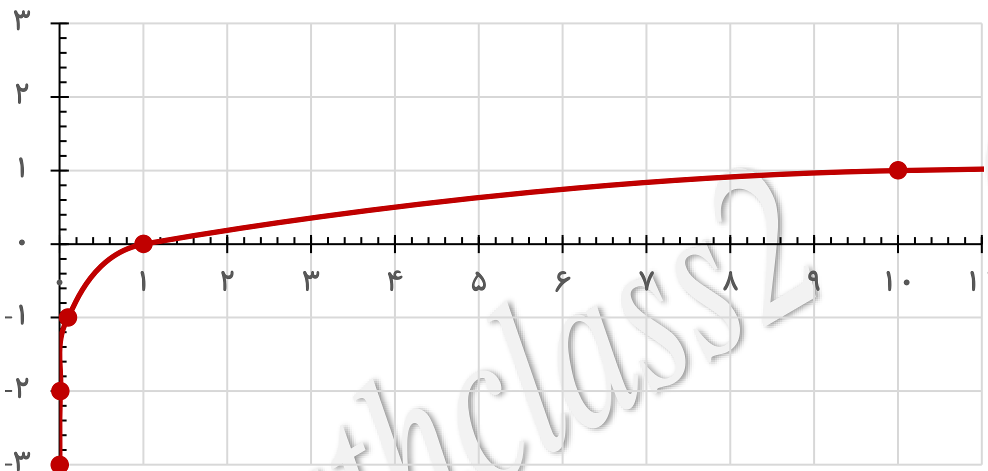




تمرین ۴ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

نمودار توابع با ضابطه های زیر را رسم کنید.

ت) $y = \frac{|x|}{x}\log x \quad \rightarrow \quad y = \frac{x}{x}\log x \quad \rightarrow \quad y = \log x$



دقت کنید

دامنهٔ این تابع برابر با xهای بزرگتر از صفر است.

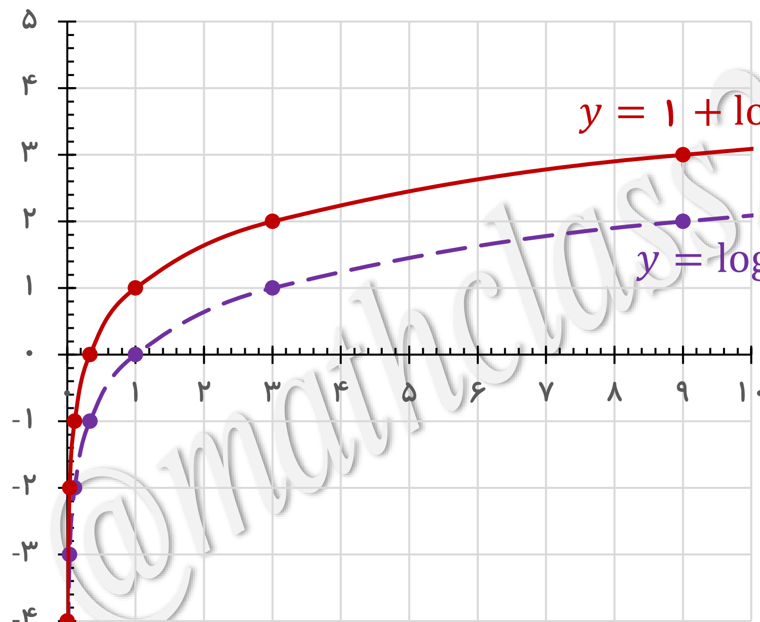
x	$\frac{۱}{۱۰}$	۱	۱۰
$\log x$	-۱	۰	۱

تمرین تکمیلی

سوال ۳ : نمودار تابع $y = ۱ + \log_۳ x$ را رسم کنید.

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت مثبت محور yها به دست آورد.

انتقال یافتهٔ (عرضی) تابع $y = \log_۳ x$



برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \log_۳ x$ را به اندازه ۲ واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم.

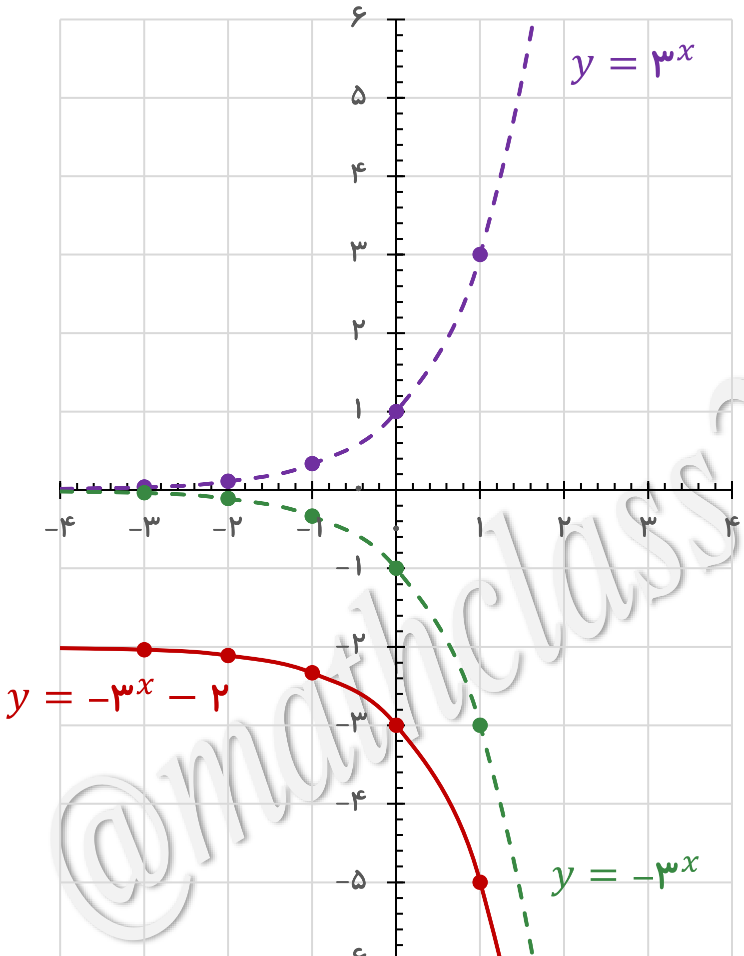
x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
$\log_۳ x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$۱ + \log_۳ x$	۰	۱	۲	۳	۴

تمرین تکمیلی

سوال ۴ : نمودار تابع $y = -۳^x - ۲$ را رسم کنید.

انتقال یافتهٔ (عرضی) تابع $y = -۳^x$

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = ۳^x$ را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم، سپس به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم.

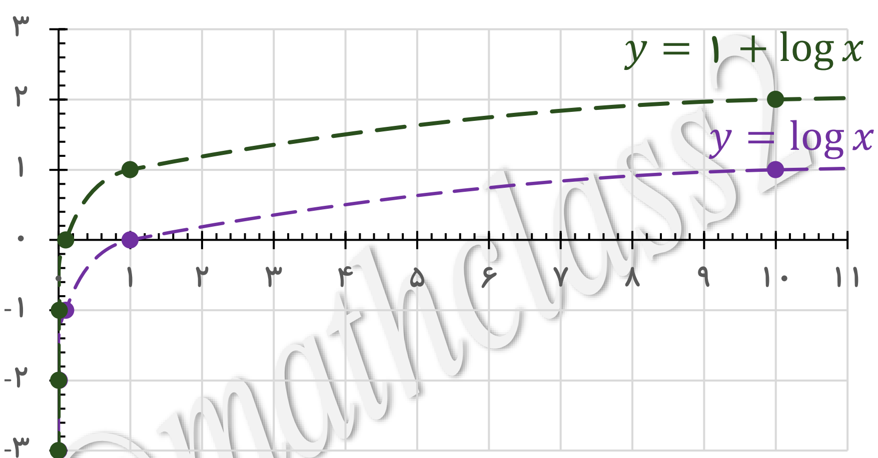


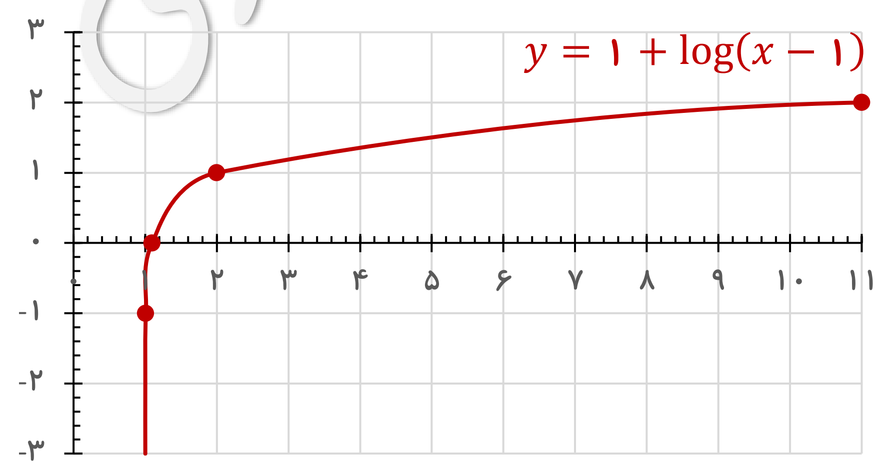
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
۳^x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
-۳^x	$\frac{-۱}{۹}$	$\frac{-۱}{۳}$	-۱	-۳	-۹
$-۳^x - ۲$	$\frac{-۱۹}{۹}$	$\frac{-۷}{۳}$	-۳	-۵	-۱۱

تمرین تکمیلی

سوال ۵ : نمودار تابع $y = ۱ + \log(x - ۱)$ را به کمک انتقال رسم کنید.

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \log x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور yها سپس یک واحد در جهت مثبت محور xها انتقال دهیم.





تمرین تکمیلی

سوال ۶ : تحت شرایط ایده آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری ها در هر ساعت دو برابر می شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

$$f(t) = ۱۰۰(۲)^t$$

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

$$f(۲۰) = ۱۰۰(۲)^{۲۰} = ۱۰۴۸۵۷۶۰۰$$

تمرین تکمیلی

سوال ۷ : در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیز کننده ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی ها را حذف می کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی ها باقی می ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه ۴۹ درصد یعنی $۰/۷ \times ۰/۷$ ناخالصی ها باقی می ماند.

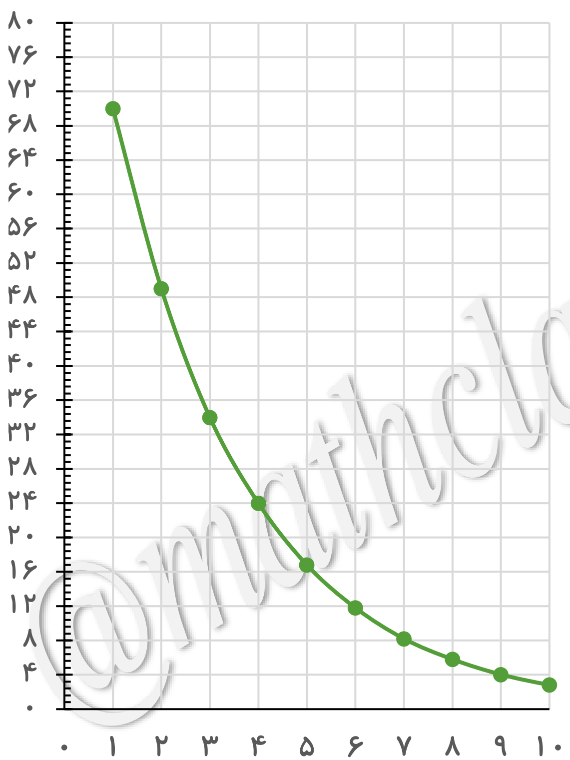
الف) درصد ناخالصی های موجود در آب از کدام رابطه به دست می آید؟

اگر n تعداد لایه های فیلتر مصرفی و $f(n)$ درصد ناخالصی های موجود در آب باشد، داریم: $f(n) = ۱۰۰\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^n$

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی های آب را از بین برد؟

$$f(n) = ۱۰۰\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^n \leq ۴$$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$	۷۰	۴۹	۳۴/۳	۲۴	۱۶/۸	۱۱/۸	۸/۲	۵/۸	۴/۰۳	۲/۸۲	۱/۹۸



$$f(۱) = ۱۰۰\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^۱ = ۷۰$$

$$f(۲) = ۱۰۰\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^۲ = ۴۹$$

$$f(۳) = ۱۰۰\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^۳ = ۳۴/۳$$

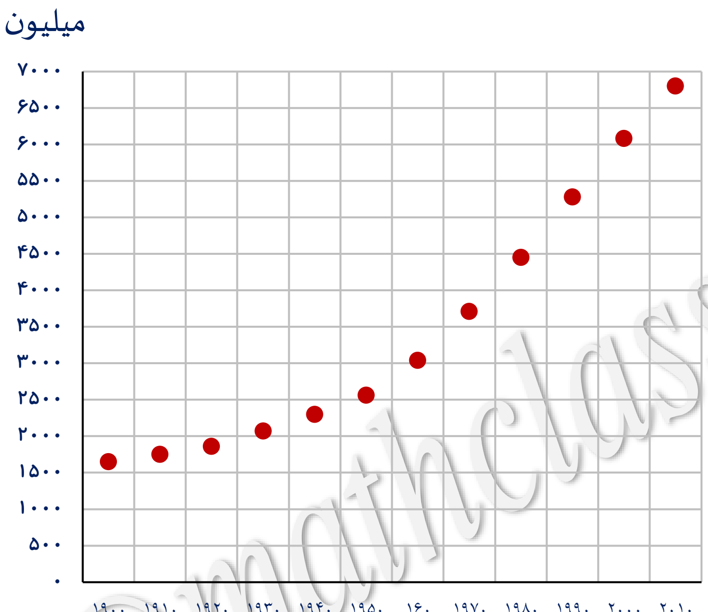
با قرار دادن ۱۰ لایه در فیلتر می توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی های آب را از بین برد.

تمرین تکمیلی

سوال ۸ : جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست و یکم نشان می دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵۰	۱۷۵۰	۱۸۶۰	۲۰۷۰	۲۳۰۰	۲۵۶۰	۳۰۴۰	۳۷۱۰	۴۴۵۰	۵۲۸۰	۶۰۸۰	۶۸۰۰

الف) باتوجه به جدول، نمودار جمعیت جهان برحسب سال به صورت زیر است:



ب) اگر محور xها بیانگر سال و محور yها بیانگر جمعیت باشد، $y = g(x)$ تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت زیر برآورد می شود.

$$g(x) = ۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^x$$

به سادگی دیده می شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با:

$$g(۲۰۱۶) = ۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^{۲۰۱۶} \cong ۷۳۸۵۰۷۴۵۱۲$$

می خواهیم حدس بزنیم که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد می رسد.

$$g(x) = ۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^x = ۸ \times ۱۰^{۹}$$

$$۸ \times ۱۰^{-۳} \times (۱/۰۱۳۷۶)^x = ۸ \times ۱۰^{۹} \rightarrow (۱/۰۱۳۷۶)^x = ۱۰^{۱۲}$$

$$\rightarrow \log(۱/۰۱۳۷۶)^x = \log ۱۰^{۱۲} \rightarrow x \log ۱/۰۱۳۷۶ = \log ۱۰^{۱۲} \rightarrow x = \frac{\log ۱۰^{۱۲}}{\log ۱/۰۱۳۷۶} = \frac{۱۲}{\log ۱/۰۱۳۷۶}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۹ : نیمه عمر یک نوع ماده هسته ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه ای از این ماده، ۲۴ میلی گرم باشد جدول زیر تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می دهد.

زمان t (سال)	جرم $m(t)$ (میلی گرم)
۰	۲۴
۲۵	$\frac{۱}{۲}(۲۴) = ۱۲$
۵۰	$\frac{۱}{۲^۲}(۲۴) = ۶$
۷۵	$\frac{۱}{۲^۳}(۲۴) = ۳$
۱۰۰	$\frac{۱}{۲^۴}(۲۴) = ۱/۵$

باتوجه به جدول جرم باقی مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$m(t) = \frac{۱}{۲^{\frac{t}{۲۵}}}(۲۴) = ۲۴ \times ۲^{\frac{-t}{۲۵}}$$

بنابراین، به عنوان مثال جرم باقی مانده پس از ۴۰ سال برابر است با:

$$m(۲۴) = ۲۴ \times ۲^{\frac{-۴۰}{۲۵}} \cong ۷/۹ \text{ میلی گرم}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۰ : نیمه عمر یک ماده هسته ای ۳۰ سال است. نمونه ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می ماند چقدر است؟

$$m(t) = \frac{۱}{۲^{\frac{t}{۳۰}}}(۱۲۸) = ۱۲۸ \times ۲^{\frac{-t}{۳۰}}$$

$$m(۳۰۰) = ۱۲۸ \times ۲^{\frac{-۳۰۰}{۳۰}} = ۱۲۸ \times ۲^{-۱۰} = ۲^{۷} \times ۲^{-۱۰} = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۸}$$ میلی گرم

پایان درس سوم