۱- اگر $f(x) = x - ۴$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ - ۱۶}{x + ۴} & x \neq -۴ \\ k & x = -۴ \end{cases}$ ، k را طوری تعیین کنید که به‌ازای هر x ، $f(x) = g(x)$.

واضح است که به ازای $k = -۸$ دو تابع کاملاً با هم برابر می‌شوند.

$$\left.\begin{array}{l} f(-۴) = -۸ \\ g(-۴) = k \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \to k = -۸$$

۲- a و b را طوری محاسبه کنید که نمودارهای دو تابع $y = ax^۲ + x + b$ و $y = x + ۳a$ همدیگر را روی محور عرض‌ها در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کنند.

طول هر نقطه روی محور عرض‌ها برابر صفر است.

نقطه تقاطع $A = (۰,-۱)$

$$A \in y = ax^۲ + x + b \to -۱ = b$$

$$A \in y = x + ۳a \to -۱ = ۳a \to a = -\frac{۱}{۳}$$

۳- مقدار a را طوری بیابید که $f = \{(a^۲ , ۳) ، (a^۲ - ۴ , ۵) ، (a + ۲ , ۵) ، (۲a , ۳)\}$ یک تابع باشد.

I) دو زوج $(a^۲ , ۳)$ و $(a + ۲ , ۵)$ را در نظر می‌گیریم. چون y ها متفاوت است پس باید:

$$a^۲ \neq a + ۲ \Rightarrow a \neq ۲ , -۱$$

II) در دو زوج $(۲a , ۳)$ و $(a^۲ - ۴ , ۵)$ هم y ها متفاوت است، پس باید:

$$a^۲ - ۴ \neq ۲a \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۴ = ۰ \Rightarrow a \neq ۱ \pm\sqrt{۵}$$

بنابراین a هر عدد حقیقی می‌تواند باشد به جز $۱\pm\sqrt{۵}$ و ۱-و ۲

۴- ضابطه‌ی تابع $y = f(x)$ جدول زیر را نوشته سپس با توجه به آن مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $f\ (x - ۳)$

ب) $f\ (۱ + a)$

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۵	۷	۹	۱۱	۱۳

$y = ۲x + ۱$ ۰/۵

الف) $f\ (x - ۳) = ۲(x - ۳) + ۱ = ۲x - ۵$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

ب) $f\ (۱ + a) = ۲(۱ +a) + ۱ = ۲a + ۳$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

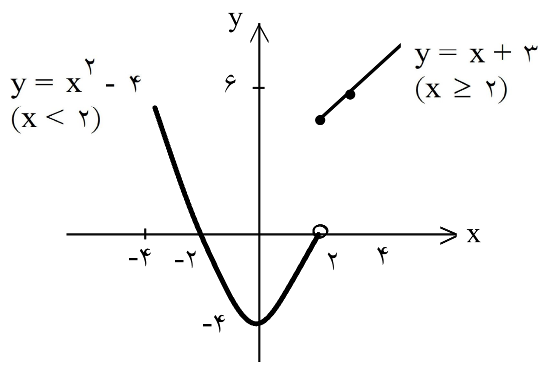
۵- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴ & x < ۲ \\ x + ۳ & x \geq ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < ۲ \Rightarrow y = x^۲ - ۴ \\ x \geq ۲ \Rightarrow y = x + ۳ \end{cases}$$

x	-۲	۰	۲
y	۰	-۴	۰

x	۲	۳
y	۵	۶



۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳ & x < ۰ \\ x - ۱ & x \geqslant ۰ \end{cases}$ داده شده است.

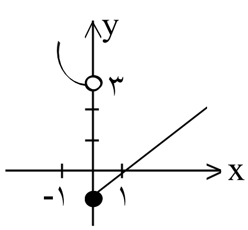
الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) حاصل $f(f(-۱))$ را به‌دست آورید.

رسم سهمی ۰/۲۵

رسم خط ۰/۲۵

الف)



ب) $f(f(-۱)) = f(۴) = ۳$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۷- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که سهمی $f(x) = ax^۲ + bx$ از نقطه‌ی $(۳,۵)$ بگذرد و تساوی $f(-۱) = ۳$ برقرار باشد.

$$\left.\begin{array}{l} (۳,۵) \Rightarrow ۵ = ۹a + ۳b \quad ۰/۲۵ \\ (-۱,۳) \Rightarrow ۳ = a - b \quad ۰/۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۷}{۶} \quad ۰/۲۵ \\ b = -\frac{۱۱}{۶} \quad ۰/۲۵ \end{cases}$$

۸- آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^۲ - ۵x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x - ۵} \end{cases}$$

مساوی نیستند. زیرا دامنه‌ها برابر نیستند. ۰/۲۵

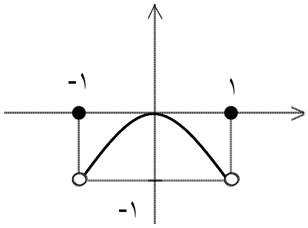
$D_f = (-\infty, ۰] \cup [۵, +\infty)$ ۰/۲۵ , $D_g = [۵, +\infty)$ ۰/۲۵

۹- اگر دو تابع $f(x) = \frac{۳x - ۱}{x + ۲}$ و $g(x) = a + \frac{b}{x + ۲}$ مساوی باشند، a , b را حساب کنید.

$$g(x) = a + \frac{b}{x + ۲} = \frac{ax + ۲a + b}{x + ۲} = f(x) \Rightarrow \frac{ax + ۲a + b}{x + ۲} = \frac{۳x - ۱}{x + ۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ ۲a + b = -۱ \Rightarrow ۶ + b = -۱ \Rightarrow b = -۷ \end{cases}$$

۱۰- نمودار تابع $y = x^۲[[x] - x]$ روی بازه‌ی $[-۱ , ۱]$ را رسم کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

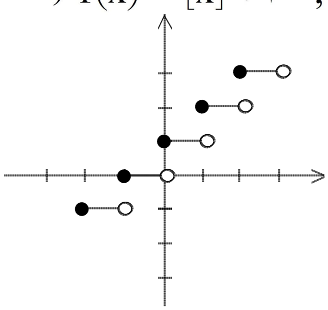


۱۱- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x] + ۱ \quad , \quad -۲ \leq x < ۳$

ب) $f(x) = \left[\frac{۱}{۲}x\right] \quad , \quad -۴ \leq x < ۴$

الف) $f(x) = [x] + ۱ \quad , \quad -۲ \leq x < ۳$



$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = -۱$

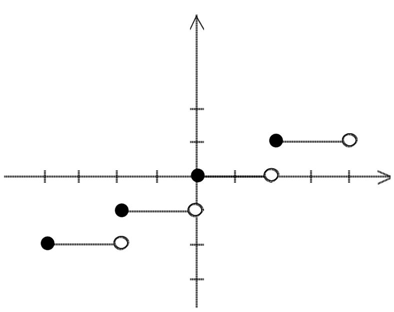
$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۰$

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۱$

$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = ۲$

$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = ۳$

ب) $f(x) = \left[\frac{۱}{۲}x\right] \quad , \quad -۴ \leq x < ۴$



$-۴ \leq x < -۲ \qquad -۲ \leq \frac{۱}{۲}x < -۱ \Rightarrow f(x) = -۸$

$-۲ \leq x < ۰ \qquad -۱ \leq \frac{۱}{۲}x < ۰ \Rightarrow f(x) = -۱$

$۰ \leq x < ۲ \qquad ۰ \leq \frac{۱}{۲}x < ۱ \Rightarrow f(x) = ۰$

$۲ \leq x < ۴ \qquad ۱ \leq \frac{۱}{۲}x < ۲ \Rightarrow f(x) = ۱$

۱۲- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x - ۱}{۲ - x}$ ب) $f(x) = \frac{-۳x}{x^۲ + ۱}$ پ) $f(x) = \frac{۲x + ۳}{x^۲ + x - ۱۲}$

ت) $f(x) = \sqrt{۳x + ۱}$ ث) $f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳$ ج) $f(x) = \sqrt{۸ - x}$

ب) $D_f = R$

پ) $(x + ۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۴ \\ x = ۳ \end{cases}$

$D_f = R - \{-۴ , ۳\}$

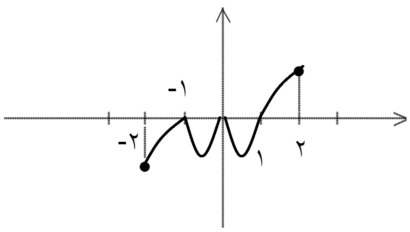
ت) $۳x + ۱ \geq ۰ \quad , \quad x \geq -\frac{۱}{۳}$

$D_f = [-\frac{۱}{۳}, \infty)$

ث) $D_f = [۰ , \infty)$

ج) $D_f = (-\infty , ۸]$

۱۳- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{x^۲ - x}}$ را بیابید.

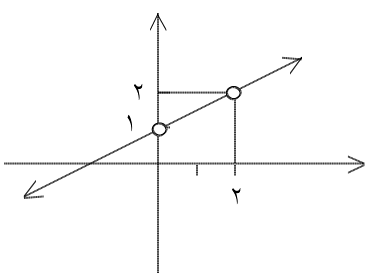


$$\frac{f(x)}{x^۲ - x} \geq ۰$$

x	-∞		-۲		-۱		۰		۱		۲		+∞
f(x)				-	۰	-		-	۰	+			
$x^۲ - x$				+		+	۰	-	۰	+			
P				-	۰	-	ت‌ن	+	ت‌ن	+			

$$D_f = (۰ , ۱) \cup (۱ , ۲] \cup \{-۱\}$$

۱۴- نمودار یک تابع گویا به صورت زیر است. ضابطه‌ی آنرا بنویسید.



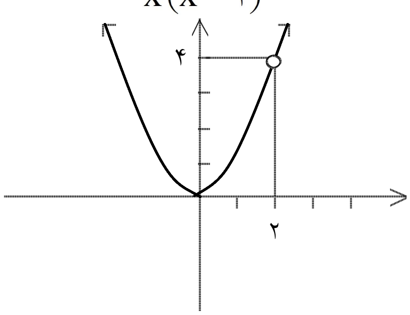
ضابطه تابع خطی که از نقاط $A(۰ , ۱)$ و $B(۲ , ۲)$ می‌گذرد را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = ax + b$$
$$A(۰ , ۱) \Rightarrow a(۰) + b = ۱ \Rightarrow b = ۱$$
$$B(۲ , ۲) \Rightarrow ۲a + b = ۲ \xrightarrow{b = ۱} ۲a + ۱ = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}x + ۱$$

چون تابع در $x = ۰$ و $x = ۲$ توخالی است، بنابراین در x و $(x - ۲)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$y = \frac{x(x - ۲)\left(\frac{۱}{۲}x + ۱\right)}{x(x - ۲)}$$

۱۵- نمودار یک تابع گویا به صورت زیر است. ضابطه‌ی آنرا بنویسید.



ضابطه‌ی یک تابع سهمی که رأس آن $S(۰ , ۰)$ و از نقطه‌ی $A(۲ , ۴)$ می‌گذرد را به دست می‌آوریم.

$f(x) = ax^{۲} + bx + c$

$S(۰ , ۰) \Rightarrow C = ۰$

راس سهمی $x_۰ = \frac{-b}{۲a} = ۰ \Rightarrow b = ۰$

$y = ax^{۲} \xrightarrow[y = ۴]{x = ۲} ۴ = a(۲)^{۲} \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow f(x) = x^{۲}$

چون تابع در $x = ۲$ توخالی است بنابراین در $(x - ۲)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$y = \frac{(x - ۲)x^{۲}}{x - ۲}$

۱۶- مقدار x را حساب کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$۴x^{۲} + [x] + [-x] = ۰$

$[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$

$x \in Z \Rightarrow ۴x^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰$ ق ق

$x \notin Z \Rightarrow ۴x^{۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲}$ ق ق

۱۷- اگر دامنه دو تابع $f(x) = \sqrt{x^{۲} - ۱۱x + ۱۰}$ و $g(x) = \sqrt{|x - a| - b}$ برابر باشند a , b را حساب کنید.

$x^{۲} - ۱۱x + ۱۰ \geq ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۱۰) \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱۰$ یا $x \leq ۱$

$|x - a| - b \geq ۰ \Rightarrow |x - a| \geq b \Rightarrow x - a \geq b$ یا $x - a \leq -b \Rightarrow x \geq a + b$ یا $x \leq a - b$

$\begin{cases} a + b = ۱۰ \\ a - b = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲a = ۱۱ \Rightarrow a = ۵/۵ \Rightarrow b = ۴/۵$

۱۸- اگر $f(x) = \sqrt{۳x - x^{۲}}$ باشد، دامنه $f(۱ - ۲x)$ را حساب کنید.

$۳x - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۳ \Rightarrow ۰ \leq ۱ - ۲x \leq ۳ \xrightarrow{-۱} -۱ \leq -۲x \leq ۲ \xrightarrow{\div(-۲)} \frac{۱}{۲} \geq x \geq -۱$

$D_{f(۱-۲x)} = \left[-۱ , \frac{۱}{۲}\right]$

۱۹- دامنه‌ی تابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{۴ - x^{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{-x}}$ ب) $g(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{۳ - |x|}}$

الف) $\begin{cases} ۴ - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \\ -x > ۰ \Rightarrow x < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [-۲ , ۰)$

ب) $\begin{cases} -x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \\ ۳ - |x| > ۰ \Rightarrow |x| < ۳ \Rightarrow -۳ < x < ۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_g = (-۳ , ۰]$

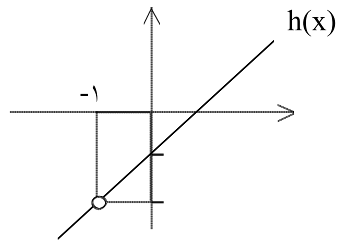
۲۰- اگر $f(x) = x^{۲} - ۱$ و $g(x) = x + ۱$ باشد، نمودار تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را رسم کنید.

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۱}{x+۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=x-۱$$

$D_h=R-\{-۱\}$

$h(x)=x-۱ \xrightarrow{x\neq -۱} y\neq -۲$

x	۰	۱
y	-۱	۰



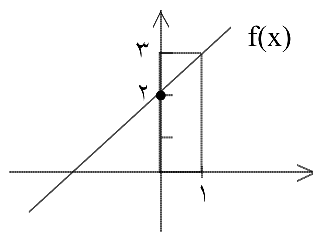
۲۱- نمودار $f(x)=\frac{x^۳+۸}{x^۲-۲x+۴}$ را رسم کنید.

$x^۲-۲x+۴=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۱۶=-۱۲<۰ \Rightarrow$ مخرج ریشه ندارد

$D=R$

$$f(x)=\frac{(x+۲)\left(x^۲-۲x+۴\right)}{x^۲-۲x+۴}\Rightarrow f(x)=x+۲$$

x	۰	۱
y	۲	۳



۲۲- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{۱-|x-۵|}$ ب) $g(x)=\frac{x+۴}{|x-۲|-۷}$

الف) $۱-|x-۵|\geq ۰ \Rightarrow |x-۵|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x-۵\leq ۱ \Rightarrow ۴\leq x\leq ۶$
$D_f=[۴\,,\,۶]$

ب) $|x-۲|-۷=۰ \Rightarrow |x-۲|=۷ \Rightarrow x-۲=\pm ۷ \Rightarrow x=۹\,,\,-۵$
$D_g=R-\{۹\,,\,-۵\}$

۲۳- دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{۵+|x-۲|}{۳-|x+۳|}}$

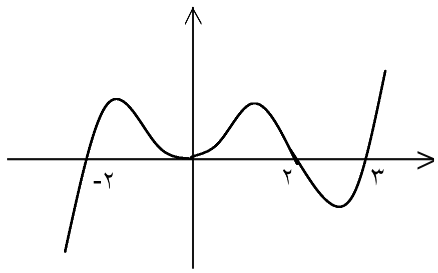
ب) $g(x)=\sqrt{x-|x|}$

الف) $\frac{۵+|x-۲|}{۳-|x+۳|}\geq ۰ \xrightarrow{۵+|x-۲| \text{ همواره مثبت است}} ۳-|x+۳|>۰ \Rightarrow |x+۳|<۳$

$\Rightarrow -۳<x+۳<۳ \xrightarrow{-۳} -۶<x<۰ \Rightarrow D_f=(-۶\,,\,۰)$

ب) $x - |x| \geq ۰ \Rightarrow x \geq |x| \xrightarrow{\text{غیرممکن است } x > |x|} x = |x| \Rightarrow x \geq ۰ \Rightarrow D_g = [۰\ ,\ +\infty)$

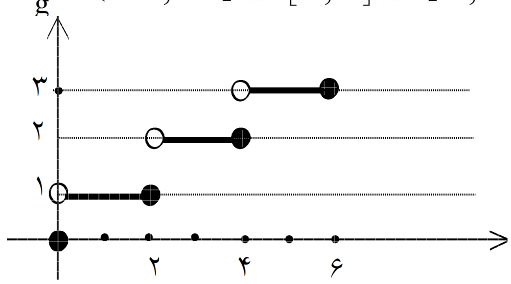
۲۴- با توجه به نمودار $f(x)$ دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ را حساب کنید.



x		-۲		۰		۲		۳	
f(x)	-	•	+	•	+	•	-	•	+
x	-		-	•	+		+		+
xf(x)	+	•	-	•	+	•	-	•	+
$xf(x) \geq ۰$	ج	ج		ج	ج	ج		ج	ج

$xf(x) \geq ۰$

$D_g = (-\infty\ ,\ -۲] \cup [۰\ ,\ ۲] \cup [۳\ ,\ +\infty)$



۲۵- ضابطه‌ی تابعی را بیابید که نمودار آن به‌صورت مقابل باشد.

اولاً چون محور x ها دو واحد، دو واحد تقسیم‌بندی شده است، پس باید داخل براکت $\frac{x}{۲}$ داشته باشیم. از طرفی چون نقاط توپر سمت راست پاره‌خطهاست. پس باید $-\frac{x}{۲}$ داخل براکت داشته باشیم. حال اگر $y = \left[-\frac{x}{۲}\right]$ را در نظر بگیریم. در بازه‌ی $۰ \leqslant x < ۲$ به‌صورت $y = -۱$ در می‌آید. در حالی‌که نمودار به‌صورت $y = ۱$ است پس کافی است $y = -\left[\frac{-x}{۲}\right]$ را در نظر بگیریم. این تابع تمام شرایط نمودار را دارد.

۲۶- با توجه به تساوی‌های زیر حدود x را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $[x + ۳] = ۵$ ب) $[۳x] = ۹$ ج) $[x + [x]] = ۸$ د) $[x + ۵[x]] = ۱۸$

الف) $[x + ۳] = ۵ \Rightarrow ۵ \leq x + ۳ < ۶ \xrightarrow{-۳} ۲ \leq x < ۳$

ب) $[۳x] = ۹ \Rightarrow ۹ \leq ۳x < ۱۰ \xrightarrow{\div ۳} ۳ \leq x < \frac{۱۰}{۳}$

ج) $[x] + [x] = ۸ \Rightarrow ۲[x] = ۸ \Rightarrow [x] = ۴ \Rightarrow ۴ \leq x < ۵$

د) $[x] + ۵[x] = ۱۸ \Rightarrow ۶[x] = ۱۸ \Rightarrow [x] = ۳ \Rightarrow ۳ \leq x < ۵$

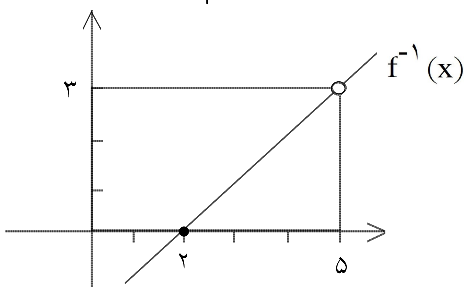
۲۷- وارون تابع $f(x)=\frac{x^۲-x-۶}{x-۳}$ را رسم کنید.

$$D_f=R-\{۳\}\Rightarrow f(x)=\frac{(x-۳)(x+۲)}{(x-۳)}=x+۲$$

x	۰	۳
y	۲	۵

$\xrightarrow{\text{در تابع وارون}}$

x	۲	۵
y	۰	۳



۲۸- اگر $f(x)=۳x-۹$، دامنه‌ی $g(x)=\frac{f(x)}{f^{-۱}(۳x)}$ را حساب کنید.

$$y=۳x-۹\Rightarrow y+۹=۳x\xrightarrow{\div ۳}\frac{y+۹}{۳}=x\Rightarrow\frac{y}{۳}+۳=x\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\frac{x}{۳}+۳$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۳}+۳$$

$$f^{-۱}(۳x)=\frac{۳x}{۳}+۳=x+۳$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{f^{-۱}(۳x)}=\frac{۳x-۹}{x+۳}\Rightarrow D_g=R-\{-۳\}$$

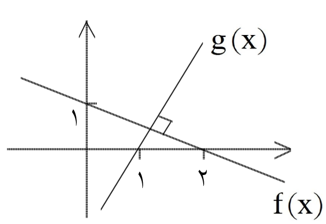
۲۹- اگر $f(x)+f^{-۱}(۲)=۷x+۱۴$ باشد، وارون تابع f را بنویسید.

$$\left(۲\,,\,f^{-۱}(۲)\right)\in f^{-۱}\Rightarrow\left(f^{-۱}(۲)\,,\,۲\right)\in f\Rightarrow\begin{cases}x=f^{-۱}(۲)\\ f(x)=۲\end{cases}\Rightarrow ۲+f^{-۱}(۲)=۷f^{-۱}(۲)+۱۴$$

$$\Rightarrow ۶f^{-۱}(۲)=-۱۲\Rightarrow f^{-۱}(۲)=-۲\xrightarrow{f^{-۱}(۲)=-۲}f(x)-۲=۷x+۱۴\Rightarrow f(x)=۷x+۱۶$$

$$y=۷x+۱۶\Rightarrow y-۱۶=۷x\Rightarrow\frac{y-۱۶}{۷}=x\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\frac{x-۱۶}{۷}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱۶}{۷}$$

۳۰- ضابطه‌ی وارون تابع $g(x)$ را بنویسید.



شیب تابع f را حساب می‌کنیم.

$$\begin{matrix}A(۲\,,\,۰)\\B(۰\,,\,۱)\end{matrix}\Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱-۰}{۰-۲}=-\frac{۱}{۲}$$

از آن‌جا که f و g عمود برهم هستند شیب g قرینه و معکوس شیب f است.

$m' = ۲ \Rightarrow y - y_۱ = m'(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = ۲(x - ۱) \Rightarrow y = ۲x - ۲ \Rightarrow g(x) = ۲x - ۲$

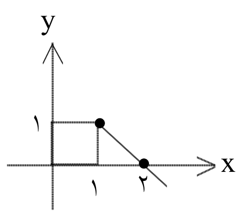
$y = ۲x - ۲ \Rightarrow y + ۲ = ۲x \xrightarrow{\div ۲} \frac{y+۲}{۲} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x+۲}{۲} \Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{x+۲}{۲}$

۳۱- وارون‌پذیری تابع $f(x) = -|x - ۱| + ۱$ را با شرط $x \geq ۱$ بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیر بودن، دامنه و ضابطه‌ی وارون آن‌را به دست آورید.

چون $x \geq ۱$ است، پس حاصل $(x - ۱)$ نامنفی بوده و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود:

$f(x) = -(x - ۱) + ۱ = -x + ۱ + ۱ = -x + ۲$

با رسم نمودار، معلوم می‌شود که تابع f یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.



$y = -x + ۲ \Rightarrow x = ۲ - y \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۲ - x$

ضمناً از روی نمودار متوجه می‌شوید که برد آن $(-\infty , ۱]$ است، پس دامنه‌ی $f^{-۱}$ هم برابر همین بازه است.

۳۲- یک به یک بودن تابع $y = (x + ۲)^۳ - ۲$ را بررسی کرده و وارون آن‌را به دست آورید.

$f(x_۱) = f(x_۲) \leftrightarrow x_۱ = x_۲$

$(x_۱ + ۲)^۳ - ۲ = (x_۲ + ۲)^۳ - ۲ \quad (۰/۲۵)$

$x_۱ + ۲ = x_۲ + ۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲ \quad (۰/۲۵)$ تابع یک به یک است

$\Rightarrow y = (x + ۲)^۳ - ۲ \Rightarrow y + ۲ = (x + ۲)^۳ \; (۰/۲۵) \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y + ۲} - ۲ \quad (۰/۲۵)$

تابع وارون $\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x + ۲} - ۲ \quad (۰/۲۵)$

۳۳- تابع معکوس تابع مقابل را بدست آورید. $y = ۸x^۳ + ۱۲x^۲ + ۶x + ۵$

$y = (۲x + ۱)^۳ + ۴ \Rightarrow y - ۴ = (۲x + ۱)^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y - ۴} = ۲x + ۱$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt[۳]{y - ۴} - ۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{\sqrt[۳]{x - ۴} - ۱}{۲}$

۳۴- معکوس‌پذیری هر یک از توابع زیر را بررسی، ضابطه‌ی تابع معکوس آن‌ها را (در صورت وجود) بیابید.

الف : $f(x) = x^۴ - ۲x^۲$ و $x \in [۰ , ۱]$

ب : $f(x) = |x - ۱|$ و $x \in [۱ , +\infty)$

ج : $f(x) = x^۲ - ۲x$ و $x \in [۱ , +\infty)$

د : $f(x) = ۳x + |x|$ و $x \in [۰ , +\infty)$

الف)
$$y = (x^۲ - ۱)^۲ - ۱ \Rightarrow (x^۲ - ۱)^۲ = y + ۱ \Rightarrow |x^۲ - ۱| = \sqrt{y + ۱} \xrightarrow{۰ \leqslant x \leqslant ۱}$$
$$۱ - x^۲ = \sqrt{y + ۱} \Rightarrow x^۲ = ۱ - \sqrt{y + ۱} \Rightarrow |x| = \sqrt{۱ - \sqrt{y + ۱}} \xrightarrow{۰ < x < ۱}$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{۱ - \sqrt{y + ۱}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{x + ۱}}$$

ب)
$$x \geqslant ۱ \Rightarrow f(x) = x - ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x + ۱ \text{ و } x \geqslant ۰$$

ج)
$$y = (x - ۱)^۲ - ۱ \Rightarrow y + ۱ = (x - ۱)^۲ \Rightarrow |x - ۱| = \sqrt{y + ۱} \xrightarrow{x \geqslant ۱} x = ۱ + \sqrt{y + ۱} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{x + ۱}$$

د)
$$x \geqslant ۰ \Rightarrow f(x) = ۴x \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{۴} \text{ و } D_{f^{-۱}} = [۰ , +\infty)$$

۳۵- ابتدا یک‌به‌یک بودن تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x < ۰ \\ x^۲ + ۱ & x \geqslant ۰ \end{cases}$ را بررسی کنید، سپس در صورت وجود، معکوس تابع f را تعیین کنید.

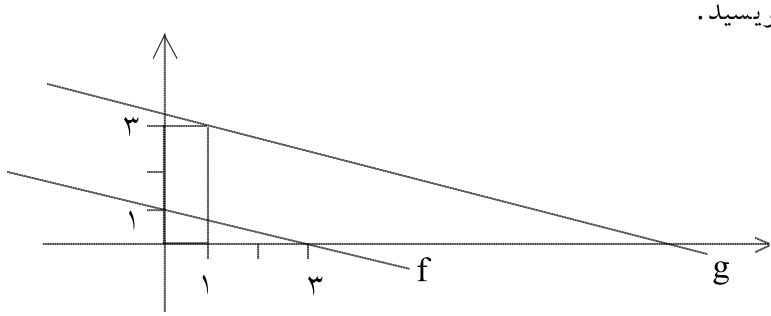
با بررسی یک به یک بودن شاخه‌ها و $R_۱ \cap R_۲ = \varnothing$ پس تابع یک به یک است و

$$y_۱ = x + ۱ \Rightarrow x = y_۱ - ۱$$

$$y_۲ = x^۲ + ۱ \Rightarrow |x| = \sqrt{y_۲ - ۱} \xrightarrow{x \geqslant ۰} x = \sqrt{y_۲ - ۱} \qquad R_۲ = [۱ , +\infty)$$

$$f^{-۱}(x) = \begin{cases} x - ۱ & x < ۱ \\ \sqrt{x - ۱} & x \geqslant ۱ \end{cases}$$

۳۶- اگر دو تابع f و g موازی باشند، ضابطه‌ی $g^{-۱}$ را بنویسید.



$$\left.\begin{matrix} A(۰ , ۱) \\ B(۳ , ۰) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۱ - ۰}{۰ - ۳} = -\frac{۱}{۳}$$

چون دو خط موازی هستند بنابراین شیب g نیز برابر $-\frac{۱}{۳}$ است.

$$C(۱ , ۳) \Rightarrow y - ۳ = -\frac{۱}{۳}(x - ۱) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} + ۳ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱۰}{۳}$$
$$\Rightarrow g(x) = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱۰}{۳}$$

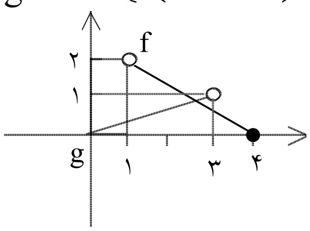
$$y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۳}x = \frac{۱۰}{۳} - y \xrightarrow{\times ۳} x = ۱۰ - ۳y \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = ۱۰ - ۳x$$

$\Rightarrow g^{-1}(x) = ۱۰ - ۳x$

۳۷- اگر $f = \left\{(-۴ , ۱۳),(-۱ , ۷),(۰ , ۵),\left(\frac{۵}{۲} , ۰\right),(۳ , -۵)\right\}$ و $g = \{(-۴ , -۷),(-۲ , -۵),(۰ , -۳),(۳ , ۰),(۵ , ۲),(۹ , ۶)\}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$(f+g)(x) = \{(-۴ , ۶),(۰ , ۲),(۳ , -۵)\}$
$(f-g)(x) = \{(-۴ , ۲۰),(۰ , ۸),(۳ , -۵)\}$

$\frac{f}{g}(x) = \left\{\left(-۴ , -\frac{۱۳}{۷}\right),\left(۰ , -\frac{۵}{۳}\right)\right\}$



۳۸- با توجه به نمودار f و g نمودار و ضابطه $f + g$ را بنویسید.

دامنه‌ی $f + g$:

$$\begin{rcases} D_f = (۱ , ۴] \\ D_g = [۰ , ۳) \end{rcases} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = (۱ , ۴] \cap [۰ , ۳) = (۱ , ۳)$$

ضابطه $f + g$:

$$g: \begin{cases} A(۰ , ۰) \\ B(۳ , ۱) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۱ - ۰}{۳ - ۰} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{۱}{۳}x$$

$$f: \begin{cases} C(۱ , ۲) \\ D(۴ , ۰) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰ - ۲}{۴ - ۱} = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = -\frac{۲}{۳}(x - ۴)$$

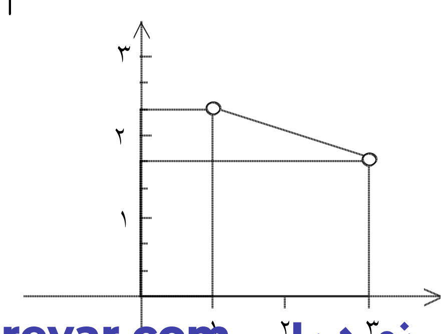
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۸}{۳}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳}x + \frac{۸}{۳} = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۸}{۳}$$

نمودار $f + g$:

$(f + g)(x) = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۸}{۳}$

x	۱	۳
y	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$



۳۹- اگر $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 1\\ 3x-2 & x<1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}3-2x & x\geq 1\\ 5x+3 & x<1\end{cases}$ باشد توابع $f\pm g$ را محاسبه نمایید.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}2x+1+3-2x & x\geqslant 1\\ 3x-2+5x+3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f(x)+g(x)=\begin{cases}4 & x\geqslant 1\\ 8x+1 & x<1\end{cases}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}2x+1-3+2x & x\geqslant 1\\ 3x-2-5x-3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f(x)-g(x)=\begin{cases}4x-2 & x\geqslant 1\\ -2x-5 & x<1\end{cases}$$

۴۰- برای توابع f و g داده شده در زیر، تابع‌های fog و gof و دامنه‌ی آن‌ها را مشخص نمایید.

$$f(x)=x+2 \quad , \quad g(x)=x^2-3$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(x^2-3\right)=x^2-3+2=x^2-1$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x+2)=(x+2)^2-3=x^2+4x+1$$

$$D_f=R \qquad\qquad D_g=R$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid x^2-3\in R\}=R$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in R \mid x+2\in R\}=R$$