حسابان ۱

پایه ی یازدهم « رشته ی ریاضی فیزیک »

فصل ۱ : جبر و معادله

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@amerimath

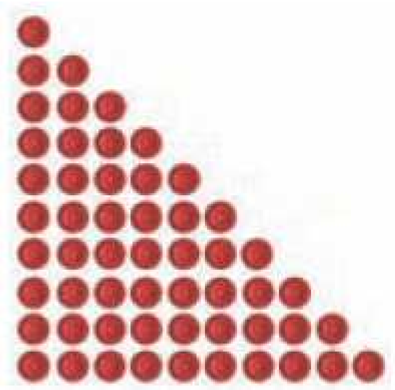
مهر ۱۴۰۱

درس اوّل : مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

در سال گذشته با مفهوم دنباله و به ویژه دنباله های حسابی و هندسی آشنا شده اید. در این درس می خواهیم الگوهایی برای محاسبه‌ی مجموع تعداد متناهی از جملات دنباله های حسابی و هندسی ارائه کنیم.

قسمت اوّل : مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

محسن در کلاس درس پرسید ، به نظر شما در شکل زیر چه تعداد دکمه وجود دارد؟



علی جواب داد: چون دکمه ها به صورت منظمی آرایش داده شده اند، به راحتی می توان تعداد آنها را (با شمارش تعداد دکمه های هر ردیف) به دست آورد.

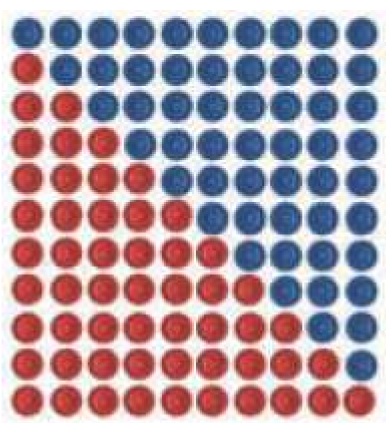
سپس او جدول زیر را تشکیل داد.

تعداد دکمه های ردیف ۱	۱
تعداد دکمه های ردیف ۲	۲
تعداد دکمه های ردیف ۳	۳
.....	......
تعداد دکمه های ردیف ۱۰	۱۰

پس تعداد کل دکمه ها می شود :

$$۱+۲+۳+۴+...+۱۰=۵۵$$

محسن گفت : این درست، امّا اگر بخواهیم تعداد دکمه ها را بدون شمارش آنها به دست آوریم، باید چه کنیم؟



حمید گفت: این که خیلی ساده است. می توان تجسم کرد که دکمه ها را به صورت زیر آرایش داده شده اند.

در این شکل اگر بخواهیم تعداد دکمه های قرمز را تعیین کنیم، ابتدا باید تعداد کل دکمه ها را به دست آوریم و سپس نصف کنیم.

$$\text{تعداد دکمه های قرمز} = \frac{\text{تعداد کل دکمه ها}}{۲} = \frac{۱۰\times ۱۱}{۲} = ۵۵$$

علی گفت : خیلی جالبه ، این فکر شما مرا به یاد گاوس انداخت ، او روش زیر را بکار می برد.

$$S = ۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰$$

$$S = ۱۰+۹+۸+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱$$

$$\xrightarrow{+} ۲S = (۱+۱۰)+(۲+۹)+(۳+۸)+....+(۱۰+۱)$$

$$\rightarrow ۲S = \underbrace{۱۱+۱۱+۱۱+....+۱۱}_{\text{۱۰ تا}}$$

$$\rightarrow ۲S = ۱۰\times ۱۱ \rightarrow S = \frac{۱۰\times ۱۱}{۲} = ۵۵$$

محسن گفت : آفرین، به نظرم این روش، خیلی راحت قابل تعمیم است. به همین شکل می توانم مجموع n عدد طبیعی متوالی ابتدا از یک را محاسبه کنم. نگاه کنید.

$$S = ۱+۲+۳+....+(n-۲)+(n-۱)+n$$

$$S = n+(n-۱)+(n-۲)+...+۳+۲+۱$$

$$\xrightarrow{+} ۲S = (n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+....+(n+۱)$$

$$\rightarrow ۲S = \underbrace{(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+....+(n+۱)}_{n \text{ تا}}$$

$$\rightarrow ۲S = n(n+۱) \rightarrow S = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

علی گفت : اجازه دهید، نتیجه ی این بحث را به صورت زیر بنویسیم.

نتیجه : حاصل جمع n عدد طبیعی متوالی ابتدا از یک

$$۱+۲+۳+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

حمید گفت : بچه ها مسئله‌ی زیر را ببینید،

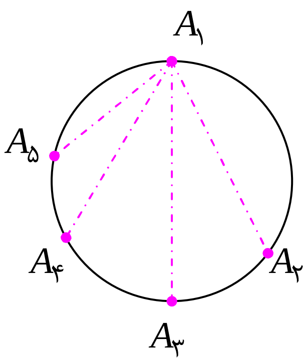
مثال: روی محیط دایره ای۲۰ نقطه‌ی متمایز قرار دارد. چند وتر از وصل این نقطه ها تشکیل می شود؟

این مسئله را پارسال به کمک مفهوم ترکیبیات به صورت زیر حل کردیم.

$$\binom{۲۰}{۲}=\frac{۲۰!}{۲!\times(۲۰-۲)!}=\frac{۲۰\times ۱۹}{۲}=۱۹۰$$

به نظر شما با این روش هم می توانیم؟

محسن گفت: بله خیلی راحت، از بین این ۲۰ نقطه ، اگر نقطه‌ی اوّل را به نقاط دیگر وصل کنیم، ۱۹ پاره خط (که در این جا وتر نامیده می شوند.) به دست می آیند. با وصل کردن نقطه‌ی دوّم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه ی اوّل) ۱۸ پاره خط به دست می آیند. همچنین اگر نقطه‌ی سوّم را به نقاط دیگر (به جز نقاط اوّل و دوّم) وصل کنیم، ۱۷ پاره خط حاصل می شود. با ادامه‌ی این روند معلوم است که با وصل کردن نقطه‌ی نوزدهم به نقاط دیگر (به جز نقاط اوّل تا ۱۸ ام) یک پاره خط تشکیل می شود. تعداد کل وترها برابر تعداد کل این پاره خط ها است. پس داریم:



$$۱۹+۱۸+۱۷+...+۲+۱=\frac{۱۹}{۲}(۱+۱۹)=۱۹۰$$

علی : گفت آفرین، بیاییم، بطور مرتب از این بحث ها داشته باشیم، فعلاً کافیه، تمرین های معلم را حل کنیم.

تمرین برای حل :

۱ : حاصل جمع اعداد طبیعی از یک تا ۱۰۰ را به دست آورید.

۲ : حاصل ضرب زیر را به صورت تواندار بنویسید.

$$A=۳\times ۳^۲\times ۳^۳\times ...\times ۳^{۱۵}$$

۳ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$B=۱۰۰^۲-۹۹^۲+۹۸^۲-۹۷^۲+...+۲^۲-۱^۲$$

***

یادآوری دنباله‌ی حسابی

هر دنباله که در آن با اضافه شدن مقداری ثابت به هر جمله، جمله‌ی بعدی به دست آید را *دنباله‌ی حسابی* می نامند. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله (اختلاف مشترک) می نامند و آن را با d نمایش می دهند.

مثال : دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی حسابی است، زیرا با اضافه کردن عدد ۴ به هر جمله ، جمله‌ی بعدی به دست می آید.

۵ و ۹ و ۱۳ و ۱۷ و ....

جمله ی اوّل $a = t_۱ = ۵$ قدر نسبت $d = ۴$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

اگر a جمله‌ی اوّل و d قدرنسبت و n شماره‌ی جمله در دنباله‌ی حسابی باشند، در این صورت جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت زیر می آید :

$$t_n = a + (n - ۱)d$$

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

اگر a جمله‌ی اوّل و d قدرنسبت و n تعداد جملات دنباله‌ی حسابی باشد، مجموع جملات را می توان به صورت زیر تعیین کرد.

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a + (n - ۱)d]$$

تمرین۴ : مجموع نه جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را تعیین کنید.

$$۵, ۸, ۱۱, ۱۴, \ldots$$

حل:

$a = ۵$ و $d = ۳$ و $n = ۹$

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a + (n - ۱)d] = \frac{۹}{۲}[۲(۵) + (۹ - ۱)(۳)]$$

$$= \frac{۹}{۲}[۱۰ + (۸)(۳)] = \frac{۹}{۲}(۱۰ + ۲۴) = \frac{۹}{۲}(۳۴) = ۱۵۳$$

تمرین ۵ : مجموع صد جمله‌ی اوّل دنباله‌ی حسابی زیر را به دست آورید.

... و ۱۵ و ۱۱ و ۷ و ۳

برای مطالعه : اثباتی که برای اثبات فرمول فوق می توان ارائه کرد، بر اساس روش گاوس می باشد.

$$S=t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{n-2}+t_{n-1}+t_n$$

$$S=t_n+t_{n-1}+t_{n-2}+\ldots+t_3+t_2+t_1$$

$$\xrightarrow{+} 2S=(t_1+t_n)+(t_2+t_{n-1})+(t_3+t_{n-2})+\ldots+(t_n+t_1)$$

$$\longrightarrow 2S=\underbrace{(t_1+t_n)+(t_1+t_n)+(t_1+t_n)+\ldots+(t_1+t_n)}_{n \text{ تا}}$$

$$\longrightarrow 2S=n(t_1+t_n)\rightarrow S=\frac{n}{2}(t_1+t_n)$$

و چون $t_n=a+(n-1)d$ پس :

$$S=\frac{n}{2}(a+a+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

نتیجه : اگر a جمله‌ی اوّل و b جمله‌ی آخر و n تعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی که باشند، مجموع جملات این دنباله را می توان به صورت زیر تعیین کرد.

$$S_n=\frac{n}{2}(a+b)$$

تمرین۶ : در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی اوّل ۵ و جمله‌ی ششم ۲۰ می باشد، مجموع شش جمله‌ی اوّل این دنباله را بنویسید.

حل:

$$S_n=\frac{n}{2}(a+b)=\frac{6}{2}(5+20)=(3)(25)=75$$

تمرین ۷ : مجموع چند جمله از دنباله‌ی زیر برابر صفر است؟

۱۲ , ۱۰ , ۸ , ...

حل : این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است و در آن $d=-2$ و $a=12$ می باشد.

$$S_n = \cdot \rightarrow \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d) = \cdot$$

$$\rightarrow \frac{n}{۲}(۲(۱۲) + (n-۱)(-۲)) = \cdot \rightarrow \frac{n}{۲}(۲۴ - ۲n + ۲) = \cdot$$

$$\rightarrow \frac{n}{۲}(-۲n + ۲۶) = \cdot \rightarrow \begin{cases} \frac{n}{۲} = \cdot \rightarrow n = \cdot & \text{غ ق ق} \\ -۲n + ۲۶ = \cdot \rightarrow n = ۱۳ \end{cases}$$

***

تمرین برای حل :

۸ : تعداد و مجموع اعداد طبیعی فرد و مضرب ۳ کمتر از ۱۰۱ را تعیین کنید.

۹ : ثابت کنید که $۱ + ۳ + ۵ + ... + (۲n - ۱) = n^۲$

۱۰ : مجموع ۲۵ جمله‌ی اوّل از دنباله‌ی مقابل را به دست آورید. $\frac{۶}{\sqrt{۳}}$ و $۳\sqrt{۳}$ و $\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$ و ....

۱۱ : مجموع همه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی را بیابید که رقم یکان آنها ۹ باشد.

۱۲ : تعداد و مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۷ را به دست آورید.

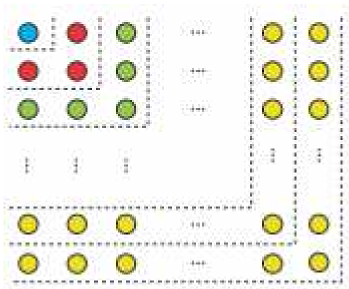
۱۳ : حداقل چند جمله‌ی اوّلیه از دنباله‌ی زیر را جمع کنیم تا حاصل جمع از ۶۰ بیشتر شود.

۳ و ۹ و ۱۵ و ۲۱ و .....

***

حل چند مسئله‌ی کاربردی

۱۴ : به کمک شکل زیرحاصل عبارت $۱ + ۳ + ۵ + ... + (۲n - ۱)$ را به دست آورید.



حل : با مشاهده‌ی این شکل معلوم است که مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی ابتدا از یک ، مربع کامل است.

حاصل جمع برابر توان دوّم تعداد اعداد فرد می باشد. مثلاً :

$$۱+۳+۵=(۳)^۲=۹$$

لذا $۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^۲$ که این نتیجه را پیش از این به کمک مجموع جملات دنباله‌ی حسابی نیز به دست آوردیم.

۱۵ : در ۲۰ جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی حسابی ، مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد. جمله‌ی اوّل و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

حل :

مجموع کل جملات دنباله $a_۱+a_۲+a_۳+...+a_{۲۰}=۱۳۵+۱۵۰$

مجموع کل جملات دنباله $\frac{۲۰}{۲}(۲a+۱۹d)=۲۸۵ \to ۱۰(۲a+۱۹d)=۲۸۵$

$$\xrightarrow{\div ۵} ۲(۲a+۱۹d)=۵۷ \to ۴a+۳۸d=۵۷ \qquad (۱)$$

مجموع جملات شماره های فرد[1] $a_۱+a_۳+a_۵+...+a_{۱۹}=۱۳۵$

$$\to \frac{۱۰}{۲}(۲a+(۱۰-۱)(۲d))=۱۳۵ \to ۵(۲a+۱۸d)=۱۳۵ \xrightarrow{\div ۵} ۲a+۱۸d=۲۷ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} ۴a+۳۸d=۵۷ \\ ۲a+۱۸d=۲۷ \end{cases} \to \begin{matrix} \\ (-۲)\times \end{matrix}\begin{cases} ۴a+۳۸d=۵۷ \\ ۲a+۱۸d=۲۷ \end{cases}$$

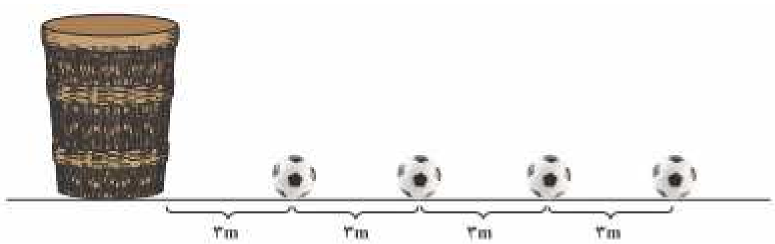
$$\to \begin{cases} ۴a+۳۸d=۵۷ \\ -۴a-۳۶d=-۵۴ \end{cases} \to d=\frac{۳}{۲}$$

$$۲a+۱۸d=۲۷ \xrightarrow{d=\frac{۳}{۲}} ۲a+۱۸(\frac{۳}{۲})=۲۷ \to ۲a+۲۷=۲۷ \to a=۰$$

***

[1] . توجه : در یک دنباله‌ی حسابی که جمله‌ی اوّل آن a و قدر نسبت آن d باشد، اگر جملات با شماره‌ی فرد را جدا کنیم، دنباله‌ی حسابی جدیدی بدست می آید که جمله‌ی اوّل a و قدرنسبت آن $۲d$ می باشد. همچنین اگر جملات با شماره‌ی زوج را جدا کنیم، دنباله‌ی حسابی جدیدی بدست می آید که جمله‌ی اوّل $a+d$ و قدرنسبت آن $۲d$ می باشد.

۱۶: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله‌ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اوّل تا سبد نیز ۳ متر است(شکل زیر).دونده ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اوّل را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد، حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



حل : دونده برای برداشتن توپ اوّل و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $۳ + ۳ = ۶$ متر را طی کند. برای توپ دوّم نیز باید ۱۲متر برای توپ سوّم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اوّل ۶ و قدرنسبت ۶ می دهد. اگر n تعداد توپ های انداخته شده در سبد باشد، از فرمول مجموع جملات دنباله‌ی حسابی داریم :

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d) \rightarrow ۹۱۸ = \frac{n}{۲}(۲(۶) + (n-۱)(۶)) \rightarrow ۳۰۶ = n(n+۱)$$

$$\rightarrow ۱۷ \times ۱۸ = n(n+۱) \rightarrow n = ۱۷$$

***

قسمت دوّم : مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

در این قسمت می خواهیم، فرمولی برای محاسبه‌ی مجموع جملات دنباله‌ی هندسی بیان کنیم. امّا در ابتدا تعریف دنباله‌ی هندسی را یادآوری می کنیم.

یادآوری دنباله‌ی هندسی

هر دنباله که در آن با ضرب هر جمله‌ی آن در مقداری ثابت و غیر صفر ، جمله‌ی بعدی به دست آید را دنباله‌ی هندسی می نامند. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله (خارج قسمت مشترک) می نامند و آن را با r یا q نمایش می دهند.

مثال : دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی هندسی است، زیرا از ضرب هر جمله در عدد ۲− جمله‌ی بعدی به دست می آید.

۳ و ۶− و ۱۲ و ۲۴− و ....

جمله‌ی اوّل $a=t_۱=۳$ قدر نسبت $r=-۲$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

اگر a جمله‌ی اوّل و r قدرنسبت و n شماره‌ی جمله در دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت می توان نوشت :

$$t_n=ar^{n-۱}$$

روش تعیین مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی

اگر a جمله‌ی اوّل و r قدر نسبت و n تعداد جملات دنباله‌ی هندسی باشد، مجموع جملات را می توان به صورت زیر تعیین کرد. $(r\neq ۱)$

$$S_n=\frac{a(۱-r^n)}{۱-r}$$

تمرین۱۷ : مجموع پنج جمله‌ی اوّل دنباله‌ی هندسی زیر را تعیین کنید.

$۲,۶,۱۸,\dots$

حل:

$a=۲$ و $r=۳$ و $n=۵$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{2(1-3^5)}{1-3} = \frac{2(1-243)}{-2} = \frac{2(-242)}{-2} = 242$$

برای مطالعه : اثباتی که برای از فرمول فوق بیان می شود، به صورت زیر است.

اگر t_n و.... و t_4 و t_3 و t_2 و t_1 جملات یک دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت این دنباله را نیز می توان به شکل زیر نوشت:

$$a \text{ و } ar \text{ و } ar^2 \text{ و } ar^3 \text{ و.... } ar^{n-1}$$

مجموع جملات دنباله را برابر S قرار می دهیم. لذا

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$$

دو طرف این تساوی را در r (که طبق تعریف غیر صفر است.) ضرب می کنیم.

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^n$$

حال جملات دو تساوی فوق را نظیر به نظیر از هم کم می کنیم.

$$S - rS$$
$$= (a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^n)$$
$$\to S(1-r) = a - ar^n \to S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

توجه: اگر در یک دنباله‌ی هندسی $r = 1$ باشد. در این صورت تمام جملات آن مساوی خواهند بود. چنین اگر جمله‌ی اوّل دنباله برابر a باشد ، چنین دنباله ای به صورت زیر است.

$$a \text{ و } a \text{ و } a \text{ و .... } a$$

در این صورت، مجموع n جمله از این دنباله به شکل زیر است.

$$S = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n \text{ تا}} = na$$

تمرین برای حل :

۱۸ : تعیین کنید که حاصل جمع چند جمله‌ی اوّل از دنباله‌ی زیر برابر ۴۸۴ می شود.

۴ و ۱۲ و ۳۶و .....

۱۹ : حاصل عبارت زیر را به ازای $x=\sqrt{۲}$ را به دست آورید.

$$A=(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+...+x^{۸})(۱-x+x^{۲}-x^{۳}+...+x^{۸})$$

***

حل چند مسئله‌ی کاربردی

تمرین ۲۰ : برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آنها نصف می شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷ درصد کاهش بیابد؟

حل:

لایه‌ی محافظتی (n)	۱	۲	۳	....	n
شدت تابش (a_n)	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	....	$(\frac{۱}{۲})^n$

این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی نزولی است و در آن $a=\frac{۱}{۲}$ و $r=\frac{۱}{۲}$ می باشد. و حداقل تعداد لایه‌ی محافظتی برابر مجموع تعدادی از جملات آن می باشد. می خواهیم تعداد این جملات را تعیین کنیم.

$$S_n \geq ۰/۹۷ \rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(۱-(\frac{۱}{۲})^n)}{۱-\frac{۱}{۲}} \geq \frac{۹۷}{۱۰۰} \rightarrow ۱-(\frac{۱}{۲})^n \geq \frac{۹۷}{۱۰۰} \rightarrow (\frac{۱}{۲})^n \leq \frac{۳}{۱۰۰}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲^n} \leq \frac{۳}{۱۰۰} \rightarrow ۲^n \geq \frac{۱۰۰}{۳} \rightarrow n \geq ۶$$

تمرین ۲۱ : می گویند، یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه ای بدهد و از او خواست خودش جایزه ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه‌ی اوّل یک دانه گندم بگذارید و در خانه‌ی دوّم ۲ گندم بگذارید و در خانه‌ی سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه‌ی قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندم ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد.

الف : جایزه‌ی شطرنج چند گرم خواهد شد.

ب : نشان دهید که این جایزه بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

حل : ابتدا جدول زیر را تشکیل می دهیم.

خانه (n)	۱	۲	۳	۴	....	۶۴
تعداد گندم خانه (a_n)	۱	۲	۴	۸	....	$۲^{۶۳}$

لذا دنباله‌ی زیر را خواهیم داشت.

$۲^{۰}$ و $۲^{۱}$ و $۲^{۲}$ و $۲^{۳}$ و .... و $۲^{۶۳}$

این دنباله یک دنباله‌ی هندسی است و قدر نسبت آن ۲ می باشد. مجموع ۶۴ جمله‌ی آن به شکل زیر است.

جمله‌ی عمومی $a_n = ۲^{n-۱}$

مجموع ۶۴ جمله $S_{۶۴} = \frac{۱(۱-۲^{۶۴})}{۱-۲} = \frac{۲^{۶۴}-۱}{۲-۱} = ۲^{۶۴}-۱ \qquad gr$

حال می دانیم که یک تن برابر $۱۰^{۶}$ گرم است. $۱\,t = ۱۰^{۶}\,gr$

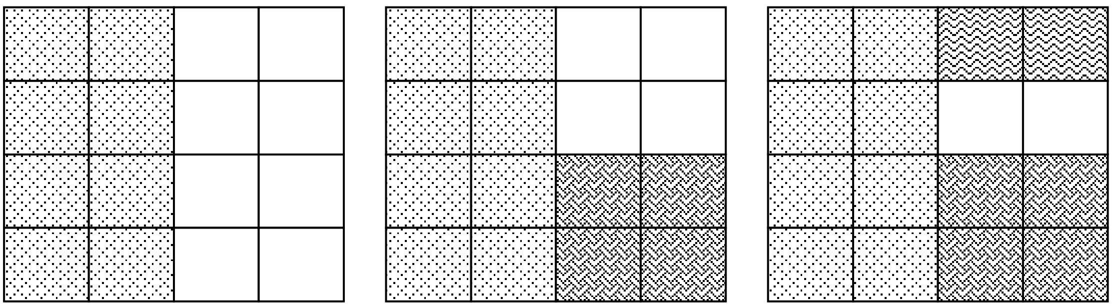
پس هزار میلیارد تن به شکل زیر نوشته می شود. $۱۰۰۰ \times ۱۰^{۹} \times ۱۰^{۶} = ۱۰^{۱۸}$

$$S_{۶۴} = ۲^{۶۴} - ۱ > ۲^{۶۳} = (۲^{۷})^{۹} = ۱۲۸^{۹} > ۱۰۰^{۹} = (۱۰^{۲})^{۹} = ۱۰^{۱۸}$$

$$\Rightarrow S_{۶۴} > ۱۰^{۱۸}$$

تمرین ۲۲ : طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از مرحله‌ی قبل را رنگ می زنیم. حساب کنید که پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ می شود؟

حل : به شکل زیر و دنباله‌ی بدست آمده توجه کنید.



مرحله (n)	۱	۲	۳	....	n
مساحت رنگ شده (a_n)	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	....	$(\frac{۱}{۲})^n$

این دنباله یک دنباله‌ی هندسی نزولی است و در آن $a=\frac{۱}{۲}$ و $q=\frac{۱}{۲}$ می باشد.

$$S_n \geq \frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\to \frac{\frac{۱}{۲}(۱-(\frac{۱}{۲})^n)}{۱-\frac{۱}{۲}} \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \to ۱-\frac{۱}{۲^n} \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \to ۱-\frac{۹۹}{۱۰۰} \geq \frac{۱}{۲^n} \to \frac{۱}{۱۰۰} \geq \frac{۱}{۲^n}$$

$$\to ۲^n \geq ۱۰۰ \to n \geq ۷$$

تمرین ۲۳ : اگر a عددی حقیقی نامساوی یک و n یک عدد طبیعی باشد.

الف : حاصل عبارت $۱+a+a^۲+a^۳+...+a^{n-۱}$ را به دست آورید.

ب : ثابت کنید که :

$$a^n-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+a^{n-۲}+a^{n-۳}+a^{n-۴}+....+a^۲+a+۱)$$

حل : اگر داشته باشیم $S=۱+a+a^۲+a^۳+...+a^{n-۱}$

می توان گفت که S جمع جملات یک دنباله‌ی هندسی به جمله‌ی اوّل یک و قدرنسبت a می باشد. لذا :

$$S=\frac{۱(۱-a^n)}{۱-a} \to (۱-a)S=۱-a^n$$

$$\xrightarrow{S=۱+a+a^۲+a^۳+...+a^{n-۱}} (۱-a)(۱+a+a^۲+a^۳+...+a^{n-۱})=۱-a^n$$

$$\to (a-۱)(۱+a+a^۲+a^۳+...+a^{n-۱})=a^n-۱$$

تمرین ۲۴ : عبارت $x^۷-x^۳$ را تجزیه کنید.

حل :

$$A=x^۷-x^۳=x^۳(x^۴-۱)=x^۳(x-۱)(x^۳+x^۲+x+۱)$$

***

تمرین برای حل :

۲۵ : جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $t_n = ۲^{n-۱}$ است. حساب کنید که چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود.

۲۶ : در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع سه جمله‌ی اوّل ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اوّل آن ۱۵۳ می باشد. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

۲۷: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۱ + x + x^{۲} + x^{۳} + \ldots + x^{۱۱} = x + ۳ + \frac{x^{۱۲}}{x-۱}$$

۲۸ : عبارت $x^{۵} - ۱$ را تجزیه کنید.

***

روش تعیین حد مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی نزولی

اگر قدر مطلق قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی عددی بین صفر و یک $(۰ < |r| < ۱)$ باشد، در این صورت جملات این دنباله کوچک و کوچکتر می شوند، لذا این دنباله را نزولی می نامند. چون جملات چنین دنباله هایی به طور مرتب کوچک می شوند، می توان جملات آخر را خیلی ناچیز در نظر گرفت و در محاسبه‌ی مجموع جملات برابر صفر قرار داد. بنابراین حد مجموع نامتناهی از جملات دنباله های هندسی نزولی را به صورت زیر می توان تعیین کرد.

$$S = \frac{a}{۱-r}$$

تمرین۲۹ : کدام یک از دنباله های هندسی زیر نزولی است.

ب) $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \ldots$

الف) $۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$

تمرین ۳۰ : حاصل تساوی زیر را بدست آورید.

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱}{۸۱} + \ldots$$

حل :

روش اوّل

$$S=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۸۱}+\dots \xrightarrow{\times ۳} ۳S=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۸۱}+\dots$$

$$\to ۳S=۱+S \to ۲S=۱ \to S=\frac{۱}{۲}$$

روش دوّم

$$S=\frac{a}{۱-r}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین ۳۱ : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A=(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})+(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹})+(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲۷})+\dots$$

حل :

$$A=(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})+(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹})+(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲۷})+\dots=\underbrace{(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots)}_{S_۱}+\underbrace{(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\dots)}_{S_۲}$$

لذا کافی است حد مجموع دو دنباله‌ی هندسی نزولی را جداگانه تعیین و سپس جمع کنیم.

$$S_۱=\frac{a}{۱-r}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۲}=۱ \qquad \text{و} \qquad S_۲=\frac{a}{۱-r}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow A=S_۱+S_۲=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

***

تهیه کننده : **جابر عامری** دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس دوّم : معادلات و توابع درجه ی دوّم

در این درس ابتدا با بحث های تکمیلی پیرامون معادله و تابع درجه‌ی ۲ و آشنا و سپس با معرفی نقطه‌ی ماکزیمم و مینیمم و مفهوم صفر تابع درجه‌ی دوّم، می توان بسیاری از مسائل ریاضیات را بررسی و حل کرد.

قسمت اوّل : یادآوری معادله‌ی درجه‌ی ۲

در سال گذشته با معادله‌ی درجه‌ی ۲ آشنا شده اید. حتماً به یاد دارید که برای حل این معادله روش های متفاوتی وجود دارد. روش تجزیه و روش کلاسیک (کلی) را به خاطر دارید. بهتر است قبل از ورود به بحث این دو روش را در قالب مثال یادآوری کنیم.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲x^۲ + ۵x - ۳ = ۰$$

حل به روش تجزیه :

$$۲x^۲ + ۵x - ۳ = ۰ \to \frac{۱}{۲}(۲x - ۱)(۲x + ۶) = ۰ \to (۲x - ۱)(x + ۳) = ۰$$

$$\to \begin{cases} ۲x - ۱ = ۰ \to x = \frac{۱}{۲} \\ x + ۳ = ۰ \to x = -۳ \end{cases}$$

حل به روش کلاسیک : $c = -۳$ و $b = ۵$ و $a = ۲$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۵)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$ معادله دوریشه‌ی حقیقی دارد.

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(۵) + \sqrt{۴۹}}{۲(۲)} = \frac{-۵ + ۷}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(۵) - \sqrt{۴۹}}{۲(۲)} = \frac{-۵ - ۷}{۴} = \frac{-۱۲}{۴} = -۳$$

یادآوری : هر معادله به صورت $ax^۲ + bx + c = ۰$ که در آن $a \neq ۰$ ، یک معادله‌ی درجه‌ی دوّم است.

یک روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم به صورت زیر است. این روش را روش کلی یا روش کلاسیک می نامند.

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم به این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱) با نوشتن معادله به صورت استاندارد ، ضرایب معادله یعنی c و b و a را مشخص می کنیم. (ضریب x^2 را a، ضریب x را b و عدد ثابت را c می گیریم.)

۲) مبین معادله یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه می کنیم.

۳) با توجه به علامت Δ تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف[1]) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

تمرین ۱ : معادله های زیر را حل کنید.

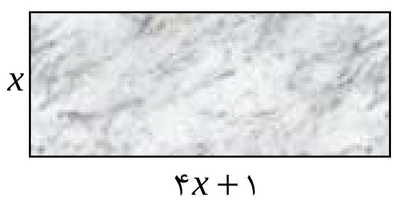
الف) $3k^2 = 13k + 10$ ب) $r^2 + 2r + 5 = 0$ ج) $9u^2 + 12u + 4 = 0$

تمرین ۲ : اگر $x = -1$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه‌ی دیگر را تعیین کنید.

تمرین ۳ : معادله‌ی درجه‌ی دوّمی تشکیل دهید که ریشه های آن ۲ و ۳- باشند.

تمرین ۴ : طول یک نوع کاشی، یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۵۲/۸ متر مربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی متر است؟

حل : اگر عرض کاشی را x در نظر بگیریم. پس طول آن می شود $4x + 1$ ، در نتیجه مساحت هر کاشی برابر



1. ریشه ی مکرر مرتبه ی دوّم.

$$x(۴x+۱)=۴x^{۲}+x$$

مساحت کل کاشی های استفاده شده ، بر حسب سانتی متر مربع می شود.

$$S=۲۰۰۰(۴x^{۲}+x)$$

همچنین با توجه به صورت مسئله مساحت کاشی های استفاده شده برابر $۵۲/۸\times ۱۰۰۰۰=۵۲۸۰۰۰$ سانتی متر مربع است. لذا

$$۲۰۰۰(۴x^{۲}+x)=۵۲۸۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲۰۰۰} ۴x^{۲}+x=۲۶۴ \rightarrow ۴x^{۲}+x-۲۶۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۴۲۲۵} \begin{cases} x=۸ \\ x=\dfrac{-۳۳}{۴} \end{cases}$$

که جواب $x=\dfrac{-۳۳}{۴}$ بنا به ماهیت مسئله قابل قبول نیست. چون عرض کاشی برابر ۸ سانتی متر می باشد، لذا طول کاشی برابر $۴(۸)+۱=۳۳$ سانتی متر است.

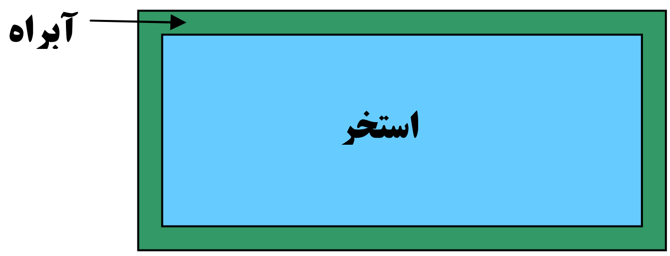
***

تمرین ۵ : در اطراف یک استخر بتونی، یک آبراه به پنهای یکسان مطابق شکل مقابل ساخته شده است. مشخصات یک استخر به صورت زیر یادداشت شده است.

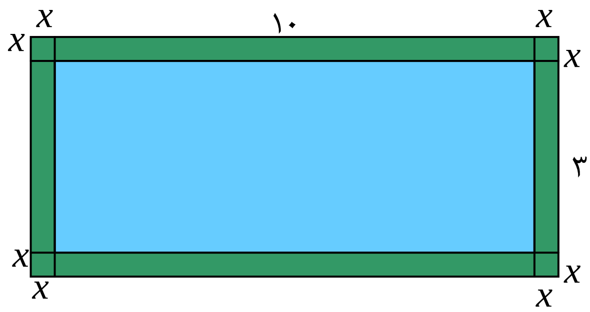
۳ متر = عرض استخر   ۱۰متر = طول استخر

۱۴متر = مساحت آبراه   متر = پهنای آبراه   ؟ = طول آبراه

بر اثر ریخته شدن جوهر روی کاغذ، پنهای آبراه قابل مشاهده نیست. آیا با دیگر اطلاعات موجود، می توانید پنهای آبراه را تعیین کنید؟ چطور؟



حل : پنهای(عرض) آبراه را x می گیریم. مطابق شکل زیر می توان نوشت :



$$۴x^۲ + ۲(۱۰x) + ۲(۳x) = ۱۴ \xrightarrow{\div ۲} ۲x^۲ + ۱۰x + ۳x = ۷ \to ۲x^۲ + ۱۳x + ۷ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = ۱۶۹ + ۵۶ = ۲۲۵} \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-۱۳ + ۱۵}{۴} = \dfrac{۱}{۲} \\ x_۲ = \dfrac{-۱۳ - ۱۵}{۴} = -۷ \end{cases}$$

جواب $x = -۷$ قابل قبول نیست.

***

قسمت دوّم : مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی درجه‌ی ۲

گاهی به جای تعیین مقدار ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ ، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه هـای آن اهمیت دارد. مجموع و حاصل ضرب ریشه های هر معادله‌ی درجه‌ی ۲ بـه شـکل $ax^۲ + bx + c = ۰$ از رابطه های زیر به دست می آید.

حاصل ضرب ریشه ها $P = x_۱ \times x_۲ = \dfrac{c}{a}$ مجموع ریشه ها $S = x_۱ + x_۲ = \dfrac{-b}{a}$

تمرین۶ : بدون حل معادله ، مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$۳x^۲ + ۵x - ۱ = ۰$$

تمرین۷ : اگر $x = -۱$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $۴x^۲ - mx - ۷ = ۰$ باشد، ریشه‌ی دیگر و مقدار m را تعیین کنید.

حل :

$$P = x_۱ \times x_۲ = \frac{c}{a} \to (-۱) \times x_۲ = \frac{-۷}{۴} \to x_۲ = \frac{۷}{۴}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \to -1 + \frac{7}{4} = \frac{-(-m)}{4} \to \frac{3}{4} = \frac{m}{4} \to m = 3$$

برای مطالعه : روابط به مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی درجه‌ی ۲ را می توان به صورت زیر اثبات کرد.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

تمرین۸ : اگر x_2 و x_1 ریشه های معادله‌ی درجه‌ی دوّم زیر باشند، مقدار عبارت $x_1^2 + x_2^2$ را تعیین کنید.

$$-x^2 + 5x + 3 = 0$$

تمرین برای حل :

۹ : بدون حل معادله و فقط با استفاده از S و P و Δ در مورد وجود و علامت ریشه های معادله‌ی زیر بحث کنید.

$$5x^2 - 7x - 5 = 0$$

۱۰ : مقدار m را چنان بیابید که مجموع ریشه های معادله‌ی درجه $2x^2 + (m-1)x = 3$ برابر ۵ باشد.

۱۱ : اگر x_2 و x_1 ریشه های معادله‌ی درجه‌ی دوّم $-2x^2 + 4x + 9 = 0$ باشند، مقدار عبارت های زیر را تعیین کنید.

۱. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	۳. $\frac{x_1^2 + x_2^2}{3x_1x_2}$	۵. $x_1^3 + x_2^3$
۲. $x_1^2 + x_2^2$	۴. $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$	۶. $x_1^4 + x_2^4$

***

قسمت سوّم : تشکیل معادله‌ی درجه‌ی ۲

با معلوم بودن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ می توان آن معادله را تعیین کرد.

اگر S مجموع و P حاصل ضرب ریشه های این معادله باشند. می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$x^{۲} - S\,x + P = ۰$$

تمرین ۱۲ : معادله‌ی درجه‌ی دوّمی بنویسید که مجموع ریشه های آن ۱/۵− و حاصل ضربشان ۷− باشد.

برای مطالعه : اثبات این معادله به صورت زیر است.

$$ax^{۲} + bx + c = ۰ \xrightarrow{\div a} x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \rightarrow x^{۲} - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = ۰$$

$$\rightarrow x^{۲} - S\,x + P = ۰$$

تمرین برای حل :

۱۳ : معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ ریشه های آن باشند.

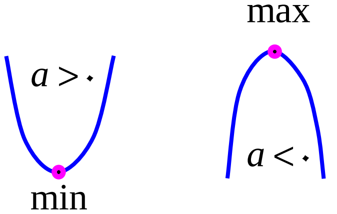
۱۴ : معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ و $\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$ ریشه های آن باشند.

۱۵ : اندازه‌ی ابعاد مستطیلی را به دست آورید که محیط آن ۳۳ سانتی متر و مساحت آن ۶۵ سانتی متر مربع باشد.

۱۶ : معادله‌ی درجه‌ی دوّمی بنویسید که یکی از ریشه های آن دو برابر دیگری باشد.(مسئله چند جواب دارد؟)

قسمت چهارم : یاد آوری تابع درجه ۲ (سهمی)

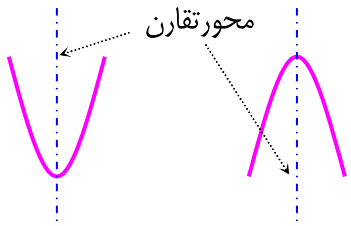
در سال گذشته به یاد دارید که هر تابع درجه‌ی ۲ دارای معادله ای به صورت $y = ax^{۲} + bx + c$ (که در آن $a \neq ۰$ است.) می باشد. نمودار چنین توابعی یک منحنی رو به بالا یا رو به پایین می باشد. این منحنی را سهمی می نامند. نمودار هر سهمی دارای بالاترین یا پایین ترین نقطه می باشد که آن را رأس سهمی می نامند.



الف : اگر $a > ۰$ باشد نمودار سهمی رو به بالا (دارای می نیمم) و

اگر $a<۰$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین (دارای ماکزیمم)است.

ب : نمودار سهمی دارای یک محور تقارن است که معادله‌ی آن بصورت $x=\frac{-b}{۲a}$ می باشد و همواره موازی محور y ها است.



همچنین معادله‌ی محور تقارن سهمی نیز بصورت $x=\frac{-b}{۲a}$ می باشد.

برای رسم نمودار سهمی کافی است که علاوه بر رأس سهمی دو نقطه را چنان انتخاب کنیم که طـول یکـی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول رأس سهمی باشد.

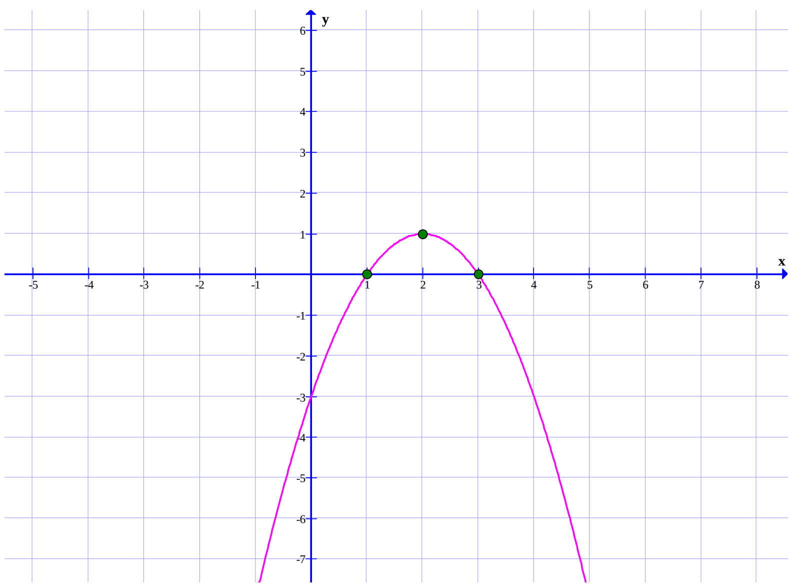
مثال : نمودار سهمی به معادله‌ی $y=-x^۲+۴x-۳$ را رسم کنید.

حل : ابتدا طول رأس سهمی را تعیین می کنیم.

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲$$

حال جدول زیر را تکمیل می کنیم.

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰



تمرین۱۷: نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y = x^{۲} - ۲x - ۳$

ب) $y = -(x-۳)^{۲} + ۱$

ج) $y = -۴x^{۲} + ۸x + ۱$

تمرین۱۸: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^{۲} + ۲x + ۳$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل : چون $a = -۱$ منفی است. پس سهمی رو به پایین است. لذا سهمی دارای نقطه‌ی ماکزیمم است.

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(-۱)} = ۱$$

همچنین بیشترین مقدار تابع به ازای $x = ۱$ می باشد.

$$f(۱) = -(۱)^{۲} + ۲(۱) + ۳ = ۴$$

تذکر : در این تمرین نقطه‌ی $(۱,۴)$ رأس سهمی و مقدار ماکزیمم نمودار سهمی برابر ۴ می باشد.

تمرین برای حل :

۱۹ : مقدار m را چنان بیابید که $x = ۲$ طول رأس سهمی به معادله‌ی $y = mx^{۲} + (m-۱)x + ۱$ باشد.

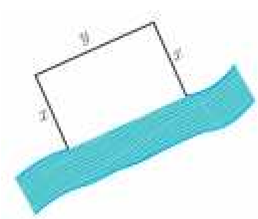
۲۰ : کمترین مقدار تابع $f(x) = ۳x^{۲} - ۱۲x + ۵$ را تعیین کنید.

۲۱ : بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^{۲} + ۴x + ۱$ را محاسبه کنید.

۲۲ : اگر $۳x + ۵y = ۱۵۰$ مقدار y و x را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

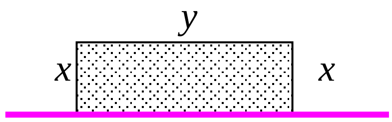
حل چند تمرین کاربردی :

۲۳ : قرار است در کنار یک رودخانه ، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه‌ی نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم. بیشترین مساحت ممکن این



محوطه را تعیین کنید.

حل :



$y + ۲x = ۱۲۰ \rightarrow y = ۱۲۰ - ۲x$

مساحت مستطیل $S = xy$

$S(x) = x(۱۲۰ - ۲x) \rightarrow S(x) = ۱۲۰x - ۲x^۲$

تابع به دست آمده ، یک تابع درجه‌ی دوّم است و در آن $a = -۲ < ۰$ می باشد. پس تابع دارای بیشترین مقدار است. بیشترین مقدار را به روش زیر تعیین می کنیم.

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۲۰}{۲(-۲)} = ۳۰$$

$$S(۳۰) = ۱۲۰(۳۰) - ۲(۳۰)^۲ = ۳۶۰۰ - ۱۸۰۰ = ۱۸۰۰\ m^۲$$

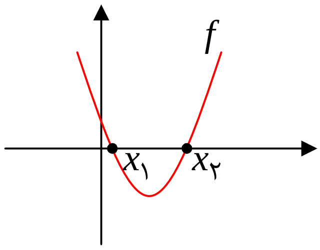
توجه : مقدار مساحت را پس از تعیین مقدار x نیز می توان به شکل زیر به دست آورد.

$$y = ۱۲۰ - ۲(۳۰) = ۶۰$$

$$S = xy = (۳۰)(۶۰) = ۱۸۰۰\ m^۲$$

***

قسمت پنجم : صفرهای تابع درجه ۲ (سهمی)

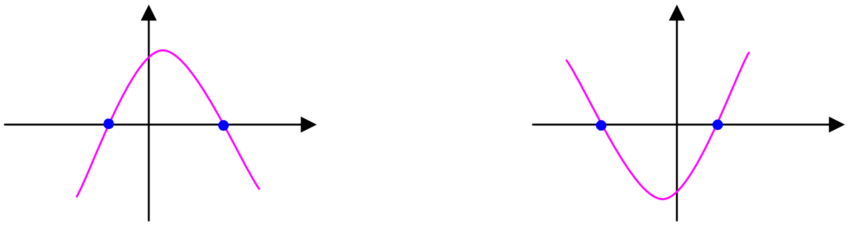


$f(x_1)=f(x_2)=0$

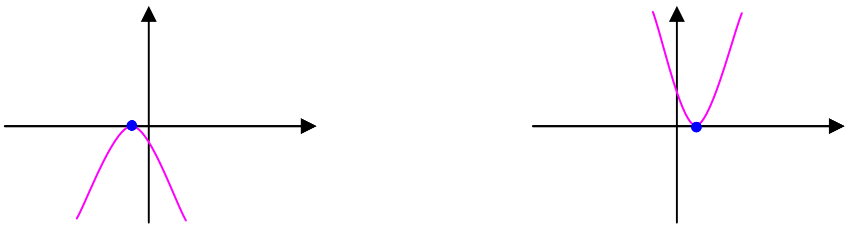
همانطور که می دانیم ، نمودار هر تابع درجه‌ی ۲ ، یک سهمی است و دارای معادله ای به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ است. بنابراین ممکن است محور طول ها را در یک یا دو نقطه قطع کند و یا اینکه محور طولها را هیچ قطع نکند. طول نقطه‌ی تقاطع نمودار سهمی با محور طول ها را صفر تابع می نامند. بدیهی است کـه در ایـن نقطـه مقدار تابع (عرض نقطه) برابر صفر است. بنابر این، صفر تابع f همان ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ است.[2]

نتیجه : بر اساس مفهوم فوق می توان نتیجه گرفت که :

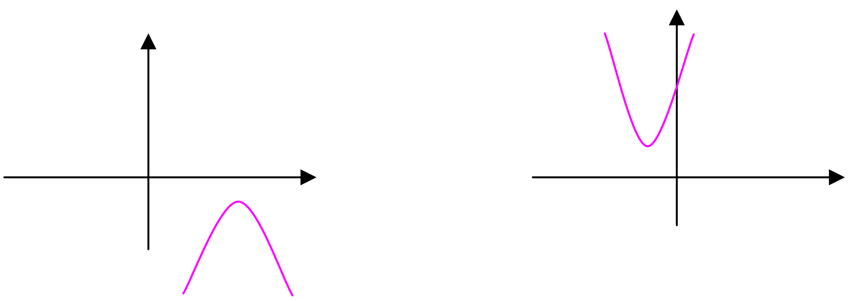
الف : نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع می کند. بنابراین معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.



ب : نمودار سهمی بر محور طولها ممـاس اسـت. بنـابراین معادلـه‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای ریـشه‌ی مضاعف است.



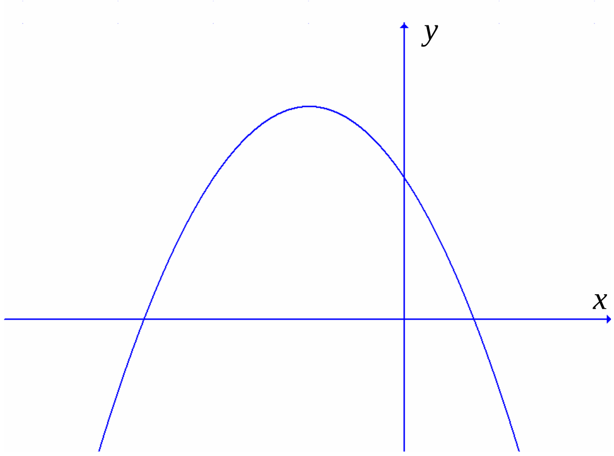
ج : نمودار سهمی محور طولها را قطع نمی کند. بنابراین معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.



2. این مفهوم برای توابع دیگر نیز قابل تعمیم است.

حل چند تمرین :

۲۴ : نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله‌ی $f(x)=۰$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه‌ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله‌ی $f(x)=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به پایین است، لذا $a<۰$

دو ریشه مختلف العلامه اند و قدر مطلق ریشه‌ی منفی از ریشه ی مثبت بیشتر است. لذا مجموع ریشه ها منفی است. پس :

$$S<۰ \to \frac{-b}{a}<۰ \to \frac{b}{a}>۰ \xrightarrow{a<۰} b<۰$$

چون دو ریشه مختلف العلامه اند. لذا حاصل ضرب آنها منفی است. پس :

$$P<۰ \to \frac{c}{a}<۰ \xrightarrow{a<۰} c>۰$$

توجه :

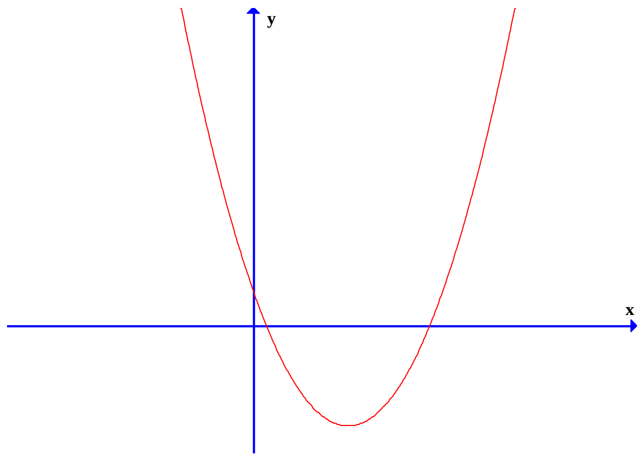
الف : به روش دیگری می توان علامت b را نیز تعیین کرد. در این روش طول رأس سهمی را در نظر می گیریم. مثلاً در این تمرین با توجه به نمودار معلوم است که طول رأس سهمی منفی است. لذا :

$$\frac{-b}{۲a}<۰ \to \frac{b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a<۰} b<۰$$

ب : به روش دیگری نیز می توان علامت c را تعیین کرد. با توجه به اینکه تـابع محـور y هـا را در نقطـه-ی $(۰,c)$ قطع می کند، لذا می توان به توجه به نقطه ی تقاطع نمودار با محور y هـا ، علامـت c را تعیـین کرد. در تمرین فوق ، از روی نمودار واضح است که محل تقاطع نمودار با محور عرض هـا (مقـدار c) بـالای محور x ها است. پس $c>۰$

***

۲۵ : نمودار زیر، نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله‌ی $f(x)=۰$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه‌ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله‌ی $f(x)=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به بالا است، لذا $a>۰$

دو ریشه هم علامت و مثبت می باشند. لذا مجموع آنها مثبت است. پس

$$S>۰ \rightarrow \frac{-b}{a}>۰ \rightarrow \frac{b}{a}<۰ \xrightarrow{a>۰} b<۰$$

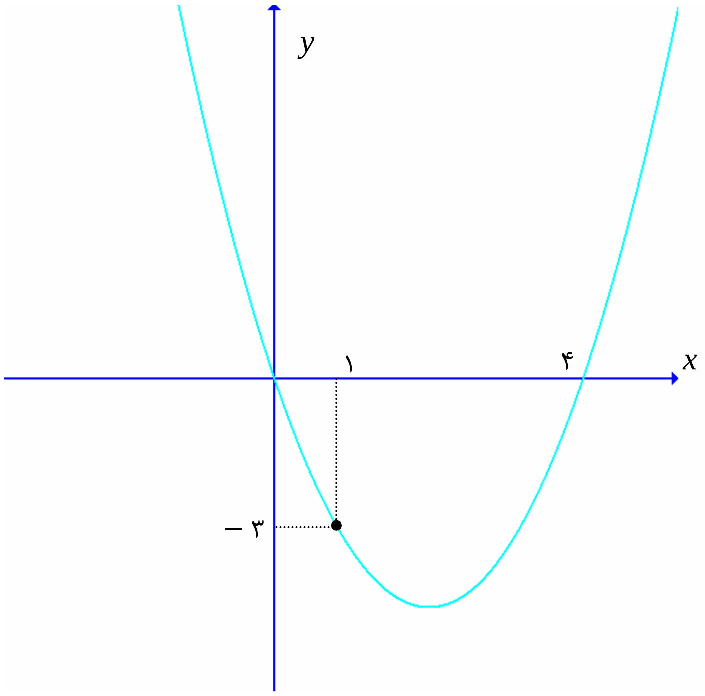
چون دو ریشه مثبت هستند، لذا حاصل ضرب آنها نیز مثبت است. پس

$$P>۰ \rightarrow \frac{c}{a}>۰ \xrightarrow{a>۰} c>۰$$

***

۲۶ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید. ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : سه نقطه از نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix}\cdot\\\cdot\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}\cdot=a(\cdot)^{۲}+b(\cdot)+c\to c=\cdot$$

$$B\left|\begin{matrix}۱\\-۳\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}-۳=a(۱)^{۲}+b(۱)+c\to a+b+c=-۳$$

$$\xrightarrow{c=\cdot}a+b=-۳$$

$$C\left|\begin{matrix}۴\\\cdot\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}\cdot=a(۴)^{۲}+b(۴)+c\to ۱۶a+۴b+c=\cdot$$

$$\xrightarrow{c=\cdot}۱۶a+۴b=\cdot\xrightarrow{\div۴}۴a+b=\cdot$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

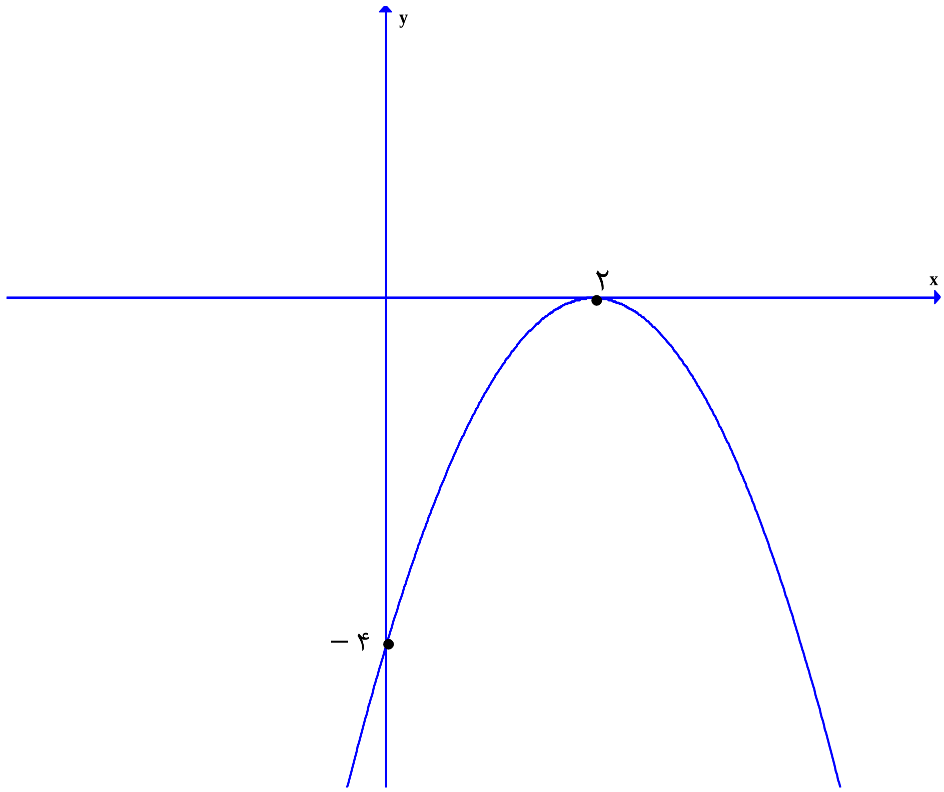
$$\begin{cases}a+b=-۳\\۴a+b=\cdot\end{cases}\to a=۱\,,\,b=-۴$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
y		+	۰	-	۰	+	

۲۷ : در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید.   ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : دو نقطه از نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\Big|_{-۴}^{\cdot} \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} -۴=a(\cdot)^{۲}+b(\cdot)+c \rightarrow c=-۴$$

$$B\Big|_{\cdot}^{۲} \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} \cdot=a(۲)^{۲}+b(۲)+c \rightarrow ۴a+۲b+c=\cdot$$

$$\xrightarrow{c=-۴} ۴a+۲b=۴ \rightarrow ۲a+b=۲$$

نقطه‌ی B ماگزیمم تابع نیز می باشد. پس:

$$B\Big|_{\cdot}^{۲} \xrightarrow{x_{\circ}=\frac{-b}{۲a}} ۲=\frac{-b}{۲a} \rightarrow ۴a+b=\cdot$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

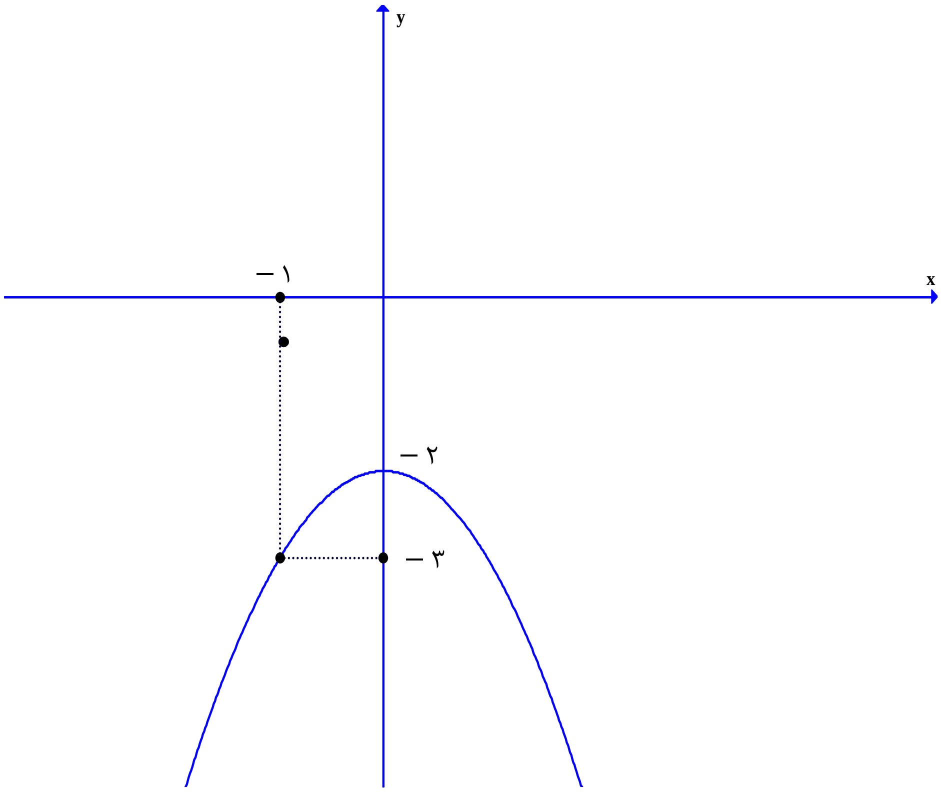
$$\begin{cases} ۲a+b=۲ \\ ۴a+b=\cdot \end{cases} \rightarrow a=-۱\,,\, b=۴$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y		-	۰	-	

۲۸ : در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید. ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : دو نقطه از نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}-۲=a(۰)^{۲}+b(۰)+c\rightarrow c=-۲$$

نقطه‌ی A ماگزیمم تابع نیز می باشد. پس:

$$A\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right.\xrightarrow{x_{\circ}=\frac{-b}{۲a}}۰=\frac{-b}{۲a}\rightarrow b=۰$$

$$B\left|\begin{matrix}-۱\\-۳\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}-۳=a(-۱)^{۲}+b(-۱)+c\rightarrow a-b+c=-۳$$

$$\xrightarrow{c=-۲}a-b=-۱$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

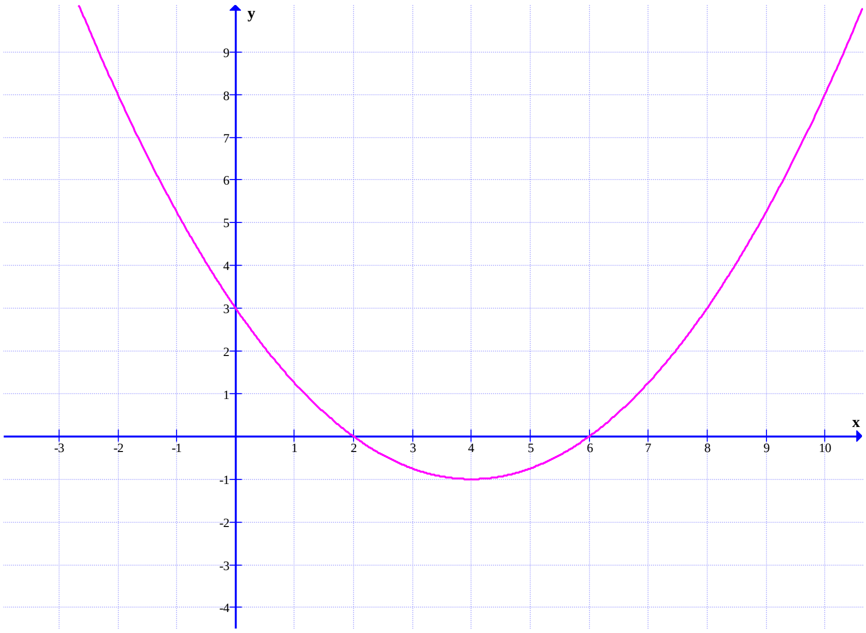
$$\begin{cases}a-b=-۱\\b=۰\end{cases}\rightarrow a=-۱$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم. (چون محور طولها را قطع نمی کند پس تابع ریشه ندارد.)

x	$-\infty$	$+\infty$
y	−	−

***

۲۹ : معادله‌ی سهمی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.



حل : **روش اوّل :** معادله‌ی سهمی به صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشد.برای تعیین مقدار a و b و c به شکل زیر عمل می کنیم.

نمودار تابع محور عرض ها را در نقطه‌ی $(۰,۳)$ قطع می کند. لذا:

$$f(۰)=۳\rightarrow ۰+۰+c=۳\rightarrow c=۳$$

نقاط $x=۲$ و $x=۶$ صفر های تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشند. لذا:

$$f(۲)=۰\rightarrow ۴a+۲b+۳=۰\rightarrow ۴a+۲b=-۳$$

$$f(۶)=۰\rightarrow ۳۶a+۶b+۳=۰\rightarrow ۱۲a+۲b=-۱$$

اکنون از حل دستگاه

$$\begin{cases}۴a+۲b=-۳\\ ۱۲a+۲b=-۱\end{cases}$$

خواهیم داشت، $a=\frac{۱}{۴}$ و $b=-۲$ و در نهایت معادله‌ی سهمی به شکل $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۲}-۲x+۳$ می شود.

روش دوّم : معادله‌ی سهمی به صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشد. برای تعیین مقدار a و b و c به شکل زیر عمل می کنیم.

نمودار تابع محور عرض ها را در نقطه‌ی $(۰,۳)$ قطع می کند. لذا:

$$f(۰)=۳\rightarrow ۰+۰+c=۳\rightarrow c=۳$$

نقاط $x=۲$ و $x=۶$ صفر های تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشند. لذا:

$$P=۲\times ۶=۸\rightarrow \frac{c}{a}=۱۲\rightarrow \frac{۳}{a}=۱۲\rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$S=۲+۶=۸\rightarrow \frac{-b}{a}=۸\xrightarrow{a=\frac{۱}{۴}}-۴b=۸\rightarrow b=-۲$$

در نهایت معادله‌ی سهمی به شکل $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۲}-۲x+۳$ می شود.

روش سوّم : چون نقاط $x=۲$ و $x=۴$ صفر های تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشند. پس :

$$f(x)=a(x-۲)(x-۶)$$

نمودار تابع محور عرض ها را در نقطه‌ی $(۰,۳)$ قطع می کند. لذا:

$$f(۰)=۳\rightarrow a(۰-۲)(۰-۶)=۳\rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

در نهایت معادله‌ی سهمی به شکل زیر می شود.

$$f(x)=\rightarrow \frac{۱}{۴}(x-۲)(x-۶)=\frac{۱}{۴}x^{۲}-۲x+۳$$

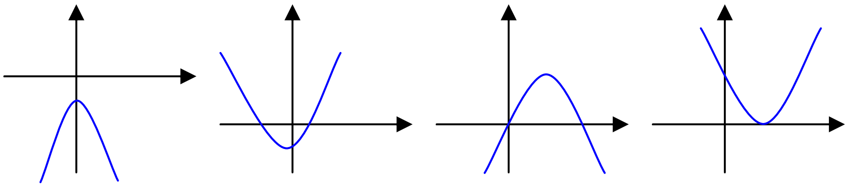
***

توجه ۱ : محل تقاطع نمودار سهمی به معادله‌ی $y=ax^{۲}+bx+c$ با محور عرضها مقدار c را نشان می دهد. لذا در هر سهمی که نمودار آن از مبدأ مختصات می گذرد ، $c=۰$ است.

توجه۲ : اگر نمودار سهمی نسبت به محور y ها متقارن باشد، محور تقارن آن یعنی خط $x=\frac{-b}{۲a}$ روی محور y ها منطبق است. پس $x=۰$ می باشد و در نتیجه $b=۰$ است.

تمرین برای حل :

۳۰ : جدول زیر را با توجه به نمودار های داده شده کامل کنید. ($y=ax^۲+bx+c$)



	الف	ب	ج	د
علامت Δ				
علامت a				
علامت b				
علامت c				
تعداد صفر های تابع				

۳۱ : معادله‌ی یک سهمی به صورت $y=a(x-۱)(x-۲)$ است، مقدار a را چنان تعیین کنید که این سهمی محور عرض ها را در نقطه ای به عرض۴ قطع کند.

***

قسمت ششم : استفاده از تقسیم برای تعیین صفرهای تابع

اگر $x = a$ صفر تابع $y = p(x)$ باشد. نتیجه می شود $p(a) = ۰$ لذا عبارت $p(x)$ بـر $x - a$ بخش پذیر است. با این مفهوم و با معلوم بودن یک صفر تابع می توان به کمک تقسیم در مورد وجود یا عدم وجود صفر های دیگر قضاوت کرد و ممکن است صفر دیگر را نیز تعیین کرد.

تمرین ۳۲ : اگر $x = ۲$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^۳ - x^۲ - ۴x + ۴$ باشد. سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل : عبارت $p(x)$ را بر $x - ۲$ تقسیم می کنیم. لذا داریم.

$$
\begin{array}{l|l}
x^۳ - x^۲ - ۴x + ۴ & x - ۲ \\ \cline{2-2}
- \quad - & x^۲ + x - ۲ \\
x^۳ - ۲x^۲ & \\ \cline{1-1}
x^۲ - ۴x & \\
- \quad - & \\
x^۲ - ۲x & \\ \cline{1-1}
-۲x + ۴ & \\
- \quad - & \\
-۲x + ۴ & \\ \cline{1-1}
۰ &
\end{array}
$$

$$\rightarrow p(x) = (x - ۲)(x^۲ + x - ۲)$$

$$\xrightarrow{P(x)=۰} (x - ۲)(x^۲ + x - ۲) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \\ x^۲ + x - ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \;,\; x = ۱ \end{cases}$$

تمرین۳۳ : نشان دهید که عبارت $x - ۲$ یـک فـاکتور(عامـل) $f(x) = x^۳ + ۲x^۲ - ۵x - ۶$ اسـت. سپس معادله‌ی $f(x) = ۰$ را حل کنید.

حل : کافی است که نشان دهیم که عبارت $f(x) = x^۳ + ۲x^۲ - ۵x - ۶$ بر $x - ۲$ بخش پذیر است.

$$
\begin{array}{r|l}
x^۳ + ۲x^۲ - ۵x - ۶ & x - ۲ \\
-x^۳ \underset{+}{-} ۲x^۲ & \\ \cline{1-2}
۴x^۲ - ۵x - ۶ & x^۲ + ۴x + ۳ \\
-۴x^۲ \underset{+}{-} ۸x & \\ \cline{1-1}
۳x - ۶ & \\
-۳x \underset{+}{-} ۶ & \\ \cline{1-1}
۰ &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\dfrac{x^۳}{x} = x^۲ \\[2ex]
\dfrac{۴x^۲}{x} = ۴x \\[2ex]
\dfrac{۳x}{x} = ۳
\end{array}
$$

$$\underbrace{x^3+2x^2-5x-6}_{f(x)}=(x-2)(x^2+4x+3)$$

$$f(x)=0 \rightarrow x^3+2x^2-5x-6=0 \rightarrow (x-2)(x^2+4x+3)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x^2+4x+3=0 \rightarrow (x+1)(x+3)=0 \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

تمرین۳۴ : مقدار a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3-2x^2+ax+2=0$ برابر ۲ باشد.

سپس جواب های دیگر معادله را به دست آورید.

حل :

$$x^3-2x^2+ax+2=0 \xrightarrow{x=2} 8-8+a(2)+2=0 \rightarrow 2a+2=0 \rightarrow a=-1$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-x+2 & x-2 \\ \hline {}_{-}x^3 {}_{+}{-}2x^2 & x^2-1 \\ \hline -x+2 & \\ {}_{+}x {}_{-}{+}2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x}=x^2$$

$$\frac{-x}{x}=-1$$

$$x^3-2x^2-x+2=0 \rightarrow (x-2)(x^2-1)=0 \rightarrow x=2 \ , \ x=\pm 1$$

تمرین برای حل :

۳۵ : مقدار k را چنان بیابید که یکی صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ برابر ‎-۲‎ باشد. سپس صفر های دیگر تابع را به دست آورید.

۳۶ : نقاط تقاطع نمودار تابع $f(x)=x^3-4x$ با محور طول ها را در صورت وجود به دست آورید.

***

قسمت هفتم : حل معادلات به کمک تغییر متغیر

گاهی لازم می شود برای حل یک معادله از روش تغییر متغیر استفاده کرد. در این روش متغیر جدید را طوری در نظر می گیریم که روش حل معادله‌ی به دست آمده را می دانیم. با حل این معادله می توان ریشه های معادله‌ی اوّلیه را نیز به دست آورد.

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^۴ - ۳x^۲ - ۱۰ = ۰$$

حل : کافی است قرار دهیم، $x^۲ = t$. لذا خواهیم داشت:

$$t^۲ - ۳t - ۱۰ = ۰$$

$$(t-۵)(t+۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} t = ۵ \rightarrow x^۲ = ۵ \rightarrow x = \pm\sqrt{۵} \\ t = -۲ \rightarrow x^۲ = -۲ \quad \text{غ م} \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۳۷ : معادله های زیر را حل کنید.

۱) $x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰$

۲) $(x^۲ - ۱)^۲ + (x^۲ - ۱) - ۲ = ۰$

۳) $(\frac{x^۲}{۳} - ۲)^۲ - ۷(\frac{x^۲}{۳} - ۲) + ۶ = ۰$

۴) $(۴ - x^۲)^۲ - (۴ - x^۲) = ۱۲$

۵) $۴^x - ۱۲(۲^x) + ۳۲ = ۰$

۳۸ : معادله‌ی $(x^۲ - ۳)^۲ - ۳x^۲ + ۱۱ = ۰$ را حل کنید.

۳۹ : معادله‌ی $(x^۲ - ۴)^۲ + ۲x^۲ - ۷ = ۰$ را حل کنید.

۴۰ : معادله ای با ضرایب صحیح بیابید که $x = \sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ یک جواب آن باشد.

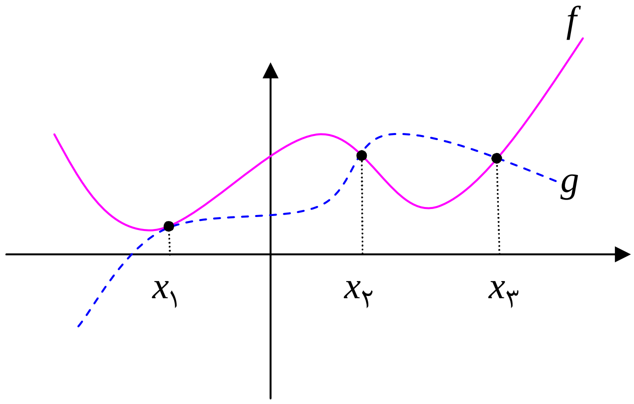
۴۱ : صفر های تابع $f(x) = x^۴ - ۱۰x^۲ + ۱۶$ را به دست آورید.

***

قسمت هشتم : حل معادلات به روش هندسی

تاکنون با حل انواعی از معادلات با روش های جبری آشنا شده ایم. در ادامه می خواهیم با روش دیگری از حل معادلات آشنا شویم که از برخی لحاظ بر روش جبری ارجحیت دارد. در این روش که به روش هندسی موسوم است، مقدار تقریبی ریشه ها و تعداد آنها آسان تر مشخص می شوند و حتی در برخی از موارد حل جبری معادلات امکان پذیر نیست ولی حل با روش هندسی امکان پذیر است.

برای حل معادلات به روش هندسی ابتدا با انتقال جملات به دو طرف، معادله را به شکل $f(x)=g(x)$ تبدیل می کنیم. سپس نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را رسم نموده و نقاط تلاقی آنها را تعیین می کنیم. بدیهی است که طول نقاط تلاقی دو نمودار ریشه‌ی معادله‌ی داده شده است.



توجه : طول نقطه یا نقطه هایی که در آنها نمودار دو تابع مماس باشند. ریشه‌ی مضاعف معادله است. در نمودار فوق معادله‌ی مورد نظر دارای دو ریشه‌ی معمولی ($x_۲$ و $x_۳$) و یک ریشه‌ی مضاعف ($x_۱$) است.

تمرین۴۲ : تعداد و علامت و مقدار تقریبی ریشه های هر یک از معادلات زیر را در صورت وجود، به روش هندسی بدست آورید.

۱) $\sqrt{x}=x-۲$

۲) $x+۱-\sqrt{۱-x}=۰$

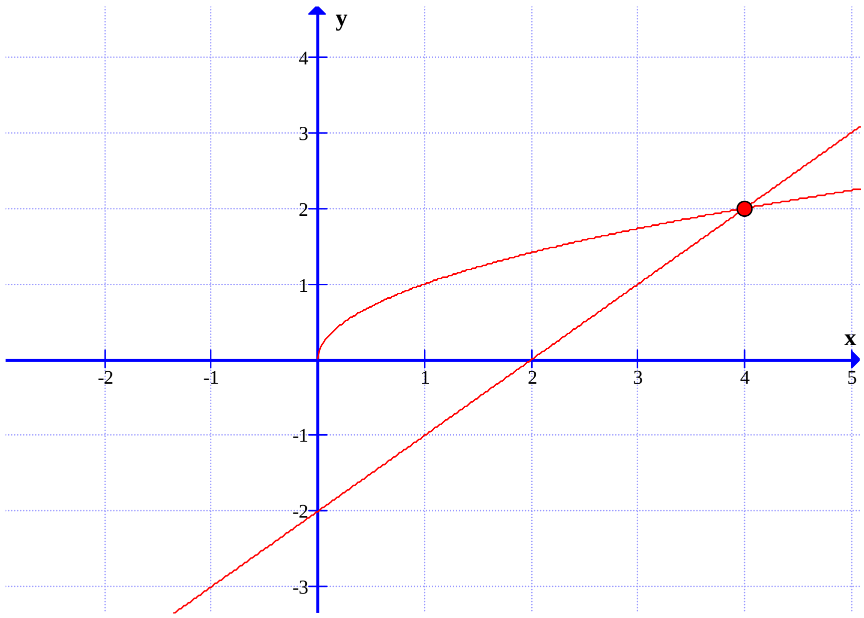
۳) $\sqrt{x}=x+۲$

۴) $\sqrt{x}+x=۲$

۵) $|x|-x^۲=۰$

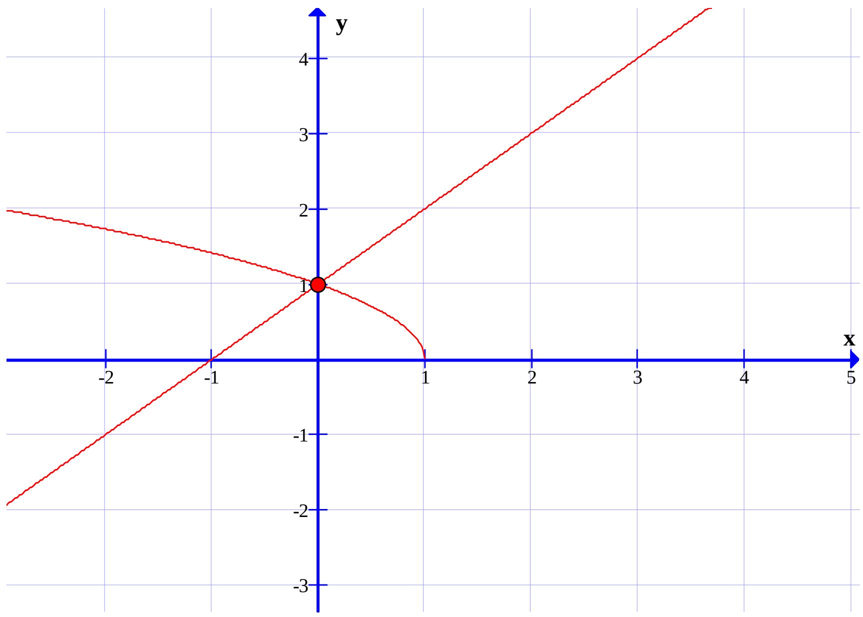
حل :

۱ : نمودارهای دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x-۲$ را رسم می کنیم و طول نقاط تقاطع آنها را در صورت وجود تعیین می کنیم.



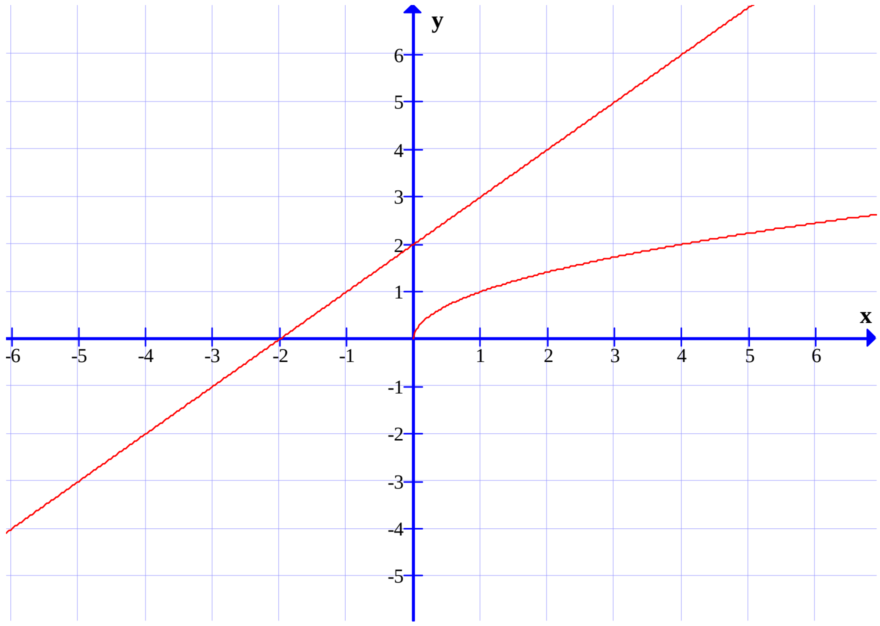
دو نمودار رسم شده همدیگر را در نقطه ی $(۴,۲)$ قطع کرده اند. لذا معادلـه ی داده شـده دارای یـک ریـشه برابر $x=۴$ می باشد.

۲ : ابتدا معادله را به شکل $\sqrt{۱-x}=x+۱$ تبدیل می کنیم. سپس نمودار های دو تابع نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=x+۱$ را رسم می کنیم و طول نقاط تقاطع آنها را در صورت وجود تعیین می کنیم.



دو نمودار رسم شده همدیگر را در نقطه‌ی $(۰,۱)$ قطع کرده انـد. لـذا معادلـه‌ی داده شـده دارای یـک ریـشه برابر $x=۰$ می باشد.

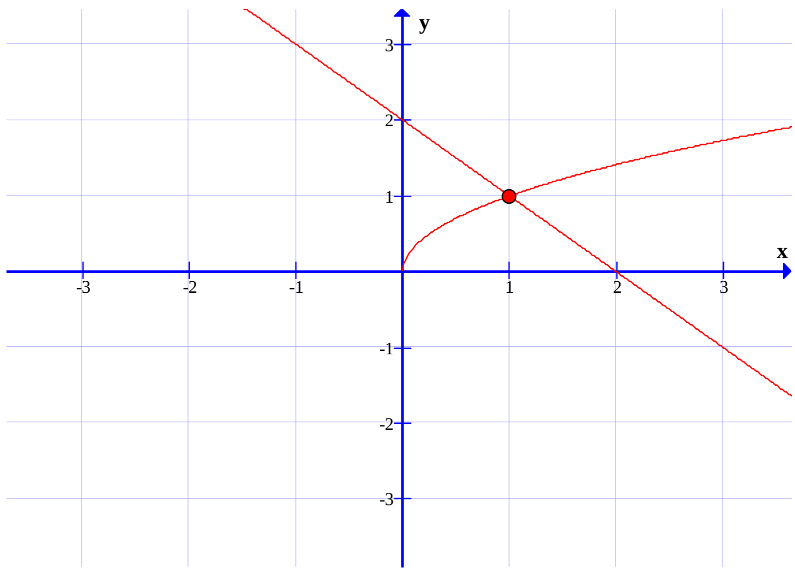
۳ : نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x+۲$ را رسم می کنیم و طول نقاط تقاطع آنها را در صورت وجود تعیین می کنیم.



چون دو نمودار نقطه‌ی تقاطع ندارند. لذا معادله‌ی $\sqrt{x}=x+۲$ ریشه ندارد.

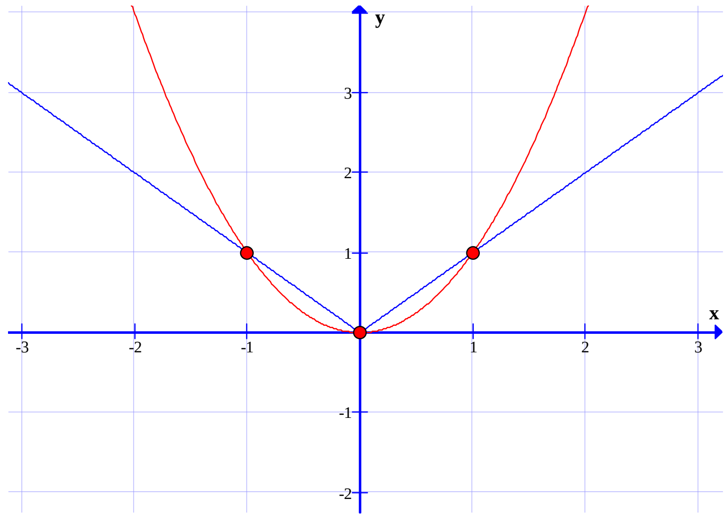
❋❋❋

۴ : ابتـدا معادلـه را بـه صـورت $\sqrt{x}=۲-x$ مـی نویـسیم و سـپس نمـودار دو تـابع $g(x)=۲-x$ و $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم می کنیم.



دو نمودار رسم شده همدیگر را در نقطه‌ی $(۱,۱)$ قطع کرده انـد. لـذا معادلـه‌ی داده شـده دارای یـک ریـشه برابر $x=۱$ می باشد.

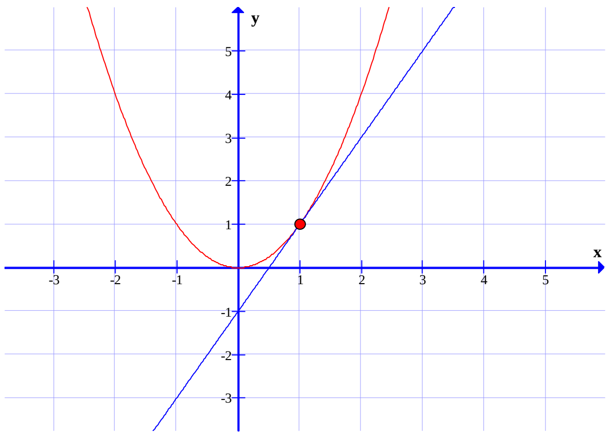
۵ : ابتدا معادله را به صورت $|x|=x^{۲}$ می نویسیم و سپس نمودار دو تابع $g(x)=x^{۲}$ و $f(x)=|x|$ را رسم می کنیم.



دو نمودار همدیگر را در سه نقطه‌ی $(۱,۱)$ و $(۰,۰)$ و $(-۱,۰)$ قطع می کنند. لذا معادله دارای سه ریشه به شکل $x=۱$ و $x=۰$ و $x=-۱$ می باشد.

تمرین ۴۳ : به روش هندسی نشان دهید که معادله‌ی $x^{۲}-۲x+۱=۰$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف است.

حل : ابتدا معادله را به صورت $x^{۲}=۲x-۱$ نوشته و نمودار دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۲x-۱$ را رسم می کنیم.



چون دو نمودار فقط در نقطه‌ی $(۱,۱)$ مماس شده اند. پس معادله دارای یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف) برابر $x=۱$ می باشد.

***

تمرین برای حل :

۴۴ : معادله‌ی زیر را به روش هندسی حل کنید.

$$x^{۲} - ۲x = |x|$$

۴۵ : تعداد ریشه های معادله‌ی $|x - ۱| = x^{۲}$ تعیین کنید.

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس سوّم : معادلات گویا و گنگ

در این درس روش هایی برای حل معادلات شامل عبارت های گویا و همچنین معادلات شامل عبارت های گنگ را بیان می کنیم و مثال های کاربردی آنها را حل می نماییم.

قسمت اوّل : معادلات شامل عبارت های گویا

هر معادله که در آن متغیر معادله در مخرج کسر باشد، را یک معادله‌ی شامل عبارت گویا یا به اختصار معادله‌ی گویا می نامند. مانند معادلات زیر :

الف) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^{۲}-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$ ب) $\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}$

برای حل چنین معادلاتی، ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را محاسبه کرده[1] و در تمام کسرها ضرب می کنیم. سپس معادله‌ی بدست آمده را حل می کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که به ازای آن مخرج هیچ کسری صفر نشود[2].

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}$$

حل: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} A=x \\ B=x^{۲}-۲x=x(x-۲)\xrightarrow{\text{ک م م}} x(x-۲) \\ C=x-۲ \end{cases}$$

$$\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}\to \overset{\times x(x-۲)}{\frac{۵}{x}}-\overset{\times x(x-۲)}{\frac{۴}{x(x-۲)}}=\overset{\times x(x-۲)}{\frac{x-۴}{x-۲}}$$

$$\to ۵(x-۲)-۴=x(x-۴)\to ۵x-۱۰-۴=x^{۲}-۴x\to x^{۲}-۹x+۱۴=۰$$

$$\to (x-۷)(x-۲)=۰\to \begin{cases} x=۷ \\ x=۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

---

1. برای این کار ابتدا مخرج ها را تجزیه کرده و سپس حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بیشتر را تعیین می کنیم.

2. اگر معادله‌ی گویا به صورت تساوی دو کسر بیان شده باشد. بهتر است، از خاصیت ضرب طرفین و وسطین استفاده کنیم.

تمرین برای حل : هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^{۲}-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$

۲) $\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}=\frac{۸}{x^{۲}-۴}$

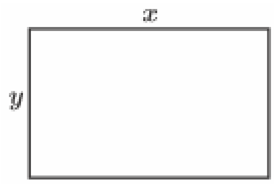
۳) $\frac{۳}{۲x}=\frac{x+۲}{x^{۲}-۳x}$

۴) $\frac{۱}{x^{۲}-۲x+۱}=\frac{۳}{x^{۲}-۲x+۳}$

۵) $\frac{n^{۲}-۲n+۲}{n^{۲}-۲n}-\frac{۱+n}{n}=\frac{n-۱}{n-۲}$

۶) $\frac{۲x}{x^{۲}-۱}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲-x}{x^{۲}-x}$

حل چند مسئله‌ی کاربردی :



۷ : مستطیل طلایی ، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن بـه طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند، می توان نوشت:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$$

نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می گویند.

حال اگر عرض مستطیل را برابر یک در نظر بگیریم، واضح است که مقدار x همان نسبت طلایی است. برای محاسبه ی مقدار x کافی است که معادله‌ی زیر را حل کنیم.

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}\rightarrow x^{۲}=x+۱\rightarrow x^{۲}-x-۱=۰\xrightarrow{\Delta=۵}\begin{cases}x_{۱}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\ x_{۲}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

واضح است که جواب منفی قابل قبول است. عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ است بـه عـدد طلایی معروف است که از دوران باستان مورد توجه بوده است.

***

۸ : مدیر مهد کودک چند اسباب بازی مشابه برای هدیه دادن، خرید که در مجموع قیمت آنها ۱۲۰ هزار تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به او تخفیف می داد، او با همان پول چهار اسباب بازی بیشتر می توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی را قبل از تخفیف به دست آورید.

حل : فرض کنید که قیمت هر اسباب بازی x و تعداد کل اسباب بازی ها n باشد. در این صورت :

$$nx=۱۲۰۰۰۰ \to n=\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}$$

$$(n+۴)(x-۱۰۰۰)=۱۲۰۰۰۰ \to (\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}+۴)(x-۱۰۰۰)=۱۲۰۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\times x}(۱۲۰۰۰۰+۴x)(x-۱۰۰۰)=۱۲۰۰۰۰x$$

$$\to ۴x^۲-۴۰۰۰x+۱۲۰۰۰۰x-۱۲۰۰۰۰۰۰۰=۱۲۰۰۰۰x \to ۴x^۲-۴۰۰۰x-۱۲۰۰۰۰۰۰۰=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} x^۲-۱۰۰۰x-۳۰۰۰۰۰۰۰=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=(-۱۰۰۰)^۲-۴(۱)(-۳۰۰۰۰۰۰۰)=۱۲۱۰۰۰۰۰۰}\begin{cases} x_۱=\dfrac{۱۰۰۰+۱۱۰۰۰}{۲}=۶۰۰۰ \\ x_۲=\dfrac{۱۰۰۰-۱۱۰۰۰}{۲}=-۵۰۰۰ \end{cases}$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x=-۵۰۰۰$ قابل قبول نیست.

۹ : در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر که با هم کار می کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می کنند. امّا اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، کارگر اوّل ۱۵ روز زودتر از کارگر دوّم این کار را تمام می کرد. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می کنند.

حل : اگر کارگر اوّل در x روز کار را تمام می کند، پس کارگر دوّم همین کار را در $x+۱۵$ روز تمام می کند. لذا

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$\xrightarrow{\times ۱۸x(x+۱۵)=}۱۸(x+۱۵)+۱۸x=x(x+۱۵) \to ۱۸x+۲۷۰+۱۸x=x^۲+۱۵x$$

$$\to x^۲-۲۱x-۲۷۰=۰ \xrightarrow{\Delta=(-۲۱)^۲-۴(۱)(۲۷۰)=۴۴۱+۱۰۸۰=۱۵۲۱}\begin{cases} x_۱=\dfrac{۲۱+۳۹}{۲}=۳۰ \\ x_۲=\dfrac{۲۱-۳۹}{۲}=-۹ \end{cases}$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x=-۹$ قابل قبول نیست.

۱۰ : در یک مغازه‌ی ماهی های تزئینی، ماهی های شور در محلول آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می شوند. به علت تازه کار بودن کارگرها ، ۲۰۰ کیلو گرم آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند.

حل : فرض می کنیم به فضای کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی ، محلول را با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می کنیم که در محلول فعلی چند کیلو گرم نمک وجود دارد.

$\frac{۴}{۱۰۰}\times ۲۰۰ = ۸$ کیلو

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $۸ + x$ کیلوگرم می شود و وزن کل محلول $۲۰۰ + x$ کیلوگرم می شود، پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

$$\frac{۸+x}{۲۰۰+x} = \frac{۷}{۱۰۰}$$

$\frac{۸+x}{۲۰۰+x} = \frac{۷}{۱۰۰} \to ۸۰۰ + ۱۰۰x = ۱۴۰۰ + ۷x \to ۹۳x = ۶۰۰ \to x = \frac{۶۰۰}{۹۳}$ کیلو گرم

۱۱ : فاصله‌ی بین دو شهر که در کنار رودخانه ای واقع شده اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اوّل به شهر دوّم می رود. پس از دو ساعت توقف، همین مسیر را بر می گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

حل : فرض می کنیم که سرعت حرکت کشتی در جهت آب برابر v باشد. در این صورت سرعت حرکت کشتی در برگشت $v - ۸$ می شود. همچنین چون $t_۱ = \frac{۱۴۴}{v_۱} = \frac{۱۴۴}{v}$ و $t_۲ = \frac{۱۴۴}{v_۲} = \frac{۱۴۴}{v-۸}$ و

$t_۱ + t_۲ = ۱۷ - ۲ = ۱۵$

لذا

$$\frac{۱۴۴}{v} + \frac{۱۴۴}{v-۸} = ۱۵ \xrightarrow{\times v(v-۸)} ۱۴۴(v-۸) + ۱۴۴v = ۱۵v(v-۸)$$

$$\to ۱۴۴v - ۱۱۵۲ + ۱۴۴v = ۱۵v^۲ - ۱۲۰v \to ۱۵v^۲ - ۴۰۸v + ۱۱۵۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۳} ۵v^۲ - ۱۳۶v + ۳۸۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۱۰۸۱۶} \begin{cases} v = \frac{۱۳۶+۱۰۴}{۱۰} = ۲۴ \\ v = \frac{۱۳۶-۱۰۴}{۱۰} = ۳/۲ \end{cases}$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x = ۳/۲$ قابل قبول نیست.

قسمت دوّم : معادلات رادیکالی

هر معادله که در آن متغیر معادله در زیر رادیکال (با فرجه‌ی دوّم) باشد، را یک معادله‌ی شامل عبارت اصم یا رادیکالی می نامند. مانند معادلات زیر :

الف) $۱+\sqrt{x+۲}=x-۳$ ب) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

برای حل چنین معادلاتی، در یک مرحله‌ی مناسب طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم تا یک معادله‌ی بدون رادیکال به دست آید. سپس این معادله را حل می کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که

الف : به ازاء آن عبارت زیر رادیکال منفی نباشد.

ب : معادله به ازای آن برقرار باشد.

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۱+\sqrt{x+۲}=x-۳$$

حل:

$$۱+\sqrt{x+۲}=x-۳ \rightarrow \sqrt{x+۲}=x-۴ \rightarrow (\sqrt{x+۲})^۲=(x-۴)^۲$$
$$\rightarrow x+۲=x^۲-۸x+۱۶$$
$$\rightarrow x^۲-۹x+۱۴=۰ \rightarrow (x-۷)(x-۲)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ x=۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تمرین ۱۱ : دانش آموزان کلاس سن دبیر حسابان را از او پرسیدند. گفت : وقتی فرزندم به دنیا آمد، من ۳۰ سال داشتم و اکنون سن او جذر سن من است. حال شما سن من را حساب کنید؟

حل : اگر سن دبیر حسابان x باشد، سن فرزند او $x-۳۰$ خواهد بود. لذا می توان نوشت:

$$\sqrt{x}=x-۳۰$$

$$\rightarrow x=(x-۳۰)^۲ \rightarrow x=x^۲-۶۰x+۹۰۰ \rightarrow x^۲-۶۱x+۹۰۰=۰$$

$$\rightarrow (x-۳۶)(x-۲۵)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۳۶ \\ x=۲۵ \end{cases}$$

که جواب $x=۲۵$ قابل قبول نیست. (چرا؟)

تمرین برای حل :

۱۲ : هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{x+۲}=x-۴$

۲) $\sqrt{۵m-۱}+۳=۰$

۳) $۲\sqrt{۳-۲x}+x=۳$

۴) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

۵) $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x-۸۰}}=۵$

۶) $\sqrt{۳x-۵}=\sqrt{x-۲}+۱$

۱۳ : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^{۲}-۴}$

ب) $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

ج) $\frac{۱}{(x-۲)^{۲}}+\frac{۲}{x-۲}=۳$

د) $\sqrt{۲+\sqrt{x-۵}}=\sqrt{۱۳-x}$

هـ) $\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\frac{۲}{\sqrt{u}}=۰$

۱۴ : عددی پیدا کنید که حاصل جمع آن با جذرش برابر۶ شود.

۱۵ : بدون حل، توضیح دهید که چرا معادله های زیر فاقد جواب حقیقی می باشند.

الف) $\sqrt{t}+۲=۰$

ب) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x-۳}+۱=۰$

ج) $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۲}=۰$

۱۶ : مقدار k را از تساوی مقابل حساب کنید. $v=\sqrt{\frac{۲k}{m}}$

۱۷ : معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه های آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

درس چهارّم : قدرمطلق و ویژگی های آن

در سال های قبل با مفهوم قدرمطلق آشنا شده اید. در اینجا ضمن یادآوری این مفهوم، ویژگی های قدر مطلق، حل معادلات و رسم توابع شامل قدرمطلق را نیز بررسی می کنیم.

قسمت اوّل : تعریف قدرمطلق و ویژگی های آن

اگر x یک عدد حقیقی باشد، قدر مطلق آن را با نماد $|x|$ نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند.

اگر $x>۰$ باشد، $|x|=x$ اگر $x=۰$ باشد، $|x|=۰$ اگر $x<۰$ باشد، $|x|=-x$

به عبارتی می توان نوشت :

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

مثال : $|-\sqrt{۲}|=-(-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}$ و $|۳/۱۴|=۳/۱۴$

تمرین ۱ : عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

$۱)\ |\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=$ $۳)\ |\dfrac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}|=$

$۲)\ |\sqrt{۵}-\sqrt{۲}|=$ $۴)\ |\dfrac{\sqrt{۵}-\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰}}|=$

ویژگی های قدرمطلق

۱ : قدر مطلق صفر برابر صفر است. یعنی $|x|=۰ \leftrightarrow x=۰$

و بطور کلی $|u|=۰ \leftrightarrow u=۰$

تمرین ۲ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|۲x-۵|=۰$$

حل :

$$|۲x-۵|=۰ \rightarrow ۲x-۵=۰ \rightarrow x=\frac{۵}{۲}$$

۲ : قدرمطلق هر عدد حقیقی همواره نامنفی است.

$$\forall x\in R \ ; \ |x|\geq ۰$$

برای مثال اگر داشته باشیم $|x|=a$ لذا می توان نوشت که $a\geq ۰$

۳ : قدرمطلق هر عدد و قدرمطلق قرینه اش برابر است.

$$|-x|=|x|$$

برای مثال :

الف) $|-\sqrt{۳}|=|\sqrt{۳}|=\sqrt{۳}$

ب) $|\sqrt{۲}-\sqrt{۵}|=|\sqrt{۵}-\sqrt{۲}|$

مثال : اگر $|x|=۵$ پس می توان نوشت $x=\pm ۵$

و بطور کلی داریم :

$$|u|=|v| \to u=\pm v$$

تمرین ۳ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|۳x-۵|=|۲-x|$$

حل :

$$۳x-۵=\pm(۲-x)$$

$$\to \begin{cases} ۳x-۵=۲-x \to ۴x=۷ \to x=\frac{۷}{۴} \\ ۳x-۵=-(۲-x) \to ۳x-۵=-۲+x \to ۲x=۳ \to x=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۴ : برای هر عدد حقیقی x می توان نوشت $\sqrt{x^۲}=|x|$

و بطور کلی $\sqrt{u^۲}=|u|$

برای مثال $\sqrt{(-۵)^۲}=|-۵|=۵$

تمرین ۴ : عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}=$ ب) $\sqrt{x^۴+۲x^۲+۱}=$ ج) $\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}=$

تمرین ۵ : عبارت زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

$$|۷-۵\sqrt{۲}|$$

تمرین۶ : اگر $x<۰$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $\sqrt{x^۲+۱+\sqrt{۴x^۲}}$ کدام است؟

الف) $x+۱$ ب) $x-۱$ پ) $-x-۱$ ت) $-x+۱$

$$\sqrt{x^۲+۱+\sqrt{۴x^۲}}=\sqrt{x^۲+۱+|۲x|}=\sqrt{x^۲+۱-۲x}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|$$

$$=-(x-۱)=-x+۱$$

۵ : قدرمطلق حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی با حاصل ضرب قدرمطلق های آنها برابر است.

$$|ab|=|a||b|$$

اثبات :

$$|ab|=\sqrt{(ab)^۲}=\sqrt{a^۲b^۲}=\sqrt{a^۲}\sqrt{b^۲}=|a||b|$$

تمری۷ : عبارت زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|-\sqrt{۳}(۱-\sqrt{۲})|=$$

۶ : قدر مطلق معکوس یک عدد ناصفر با معکوس قدرمطلق آن عدد برابر است.

$$|\frac{۱}{b}|=\frac{۱}{|b|} \qquad (b\neq ۰)$$

اثبات :

$$|\frac{۱}{b}|=\sqrt{(\frac{۱}{b})^۲}=\sqrt{(b^{-۱})^۲}=\sqrt{(b^۲)^{-۱}}=(\sqrt{b^۲})^{-۱}=\frac{۱}{\sqrt{b^۲}}=\frac{۱}{|b|}$$

۷ : قدرمطلق خارج قسمت دو عدد با خارج قسمت قدرمطلق های آنها برابر است.

$$|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|} \qquad (b\neq ۰)$$

اثبات :

روش اوّل

$$|\frac{a}{b}|=|a(\frac{۱}{b})|=|a||\frac{۱}{b}|=|a|(\frac{۱}{|b|})=\frac{|a|}{|b|}$$

روش دوّم

$$|\frac{a}{b}|=\sqrt{(\frac{a}{b})^{۲}}=\sqrt{\frac{a^{۲}}{b^{۲}}}=\frac{\sqrt{a^{۲}}}{\sqrt{b^{۲}}}=\frac{|a|}{|b|}$$

۸: برای هر عدد حقیقی x می توان نوشت:

$$|x|^{۲}=|x^{۲}|=x^{۲}$$

اثبات :

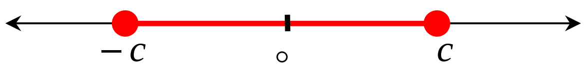
$$|x|^{۲}=|x||x|=|(x)(x)|=|x^{۲}|=x^{۲} \qquad x^{۲}\geq ۰$$

برای مثال : $|(-۵)|^{۲}=|(-۵)^{۲}|=(-۵)^{۲}$

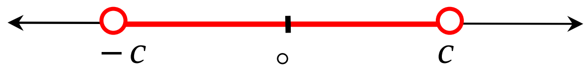
۹: فرض کنیم که c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت ویژگی های زیر را نیز می توان بیان کرد.

که در اینجا به طور شهودی بیان شده اند و فعلاً آنها را بدون اثبات می پذیریم.

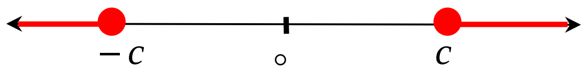
الف) $|u|\leq c \longleftrightarrow -c\leq u\leq c$



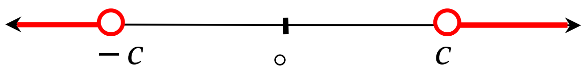
ب) $|u|<c \longleftrightarrow -c<u<c$



ج) $|u|\geq c \longleftrightarrow \begin{cases} u\geq c \\ u\leq -c \end{cases}$



د) $|u|>c \longleftrightarrow \begin{cases} u>c \\ u<-c \end{cases}$



تمرین۸ : نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|۲x-۳|>۵$$

۱۰: برای هر عدد حقیقی x داریم : $-|x|\leq x\leq |x|$

اثبات :

$$x\geq ۰ \rightarrow |x|=x\ ,\ -|x|<x \rightarrow -|x|\leq x\leq |x|$$

$$x<۰ \rightarrow |x|=-x\ ,\ -|x|=x\ ,\ x\leq |x| \rightarrow -|x|\leq x\leq |x|$$

۱۱: برای هر دو عدد حقیقی y و x ثابت کنید که

خاصیت نامساوی مثلثی $|x+y| \le |x|+|y|$

اثبات :

$$\begin{array}{l} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \end{array} \rightarrow -|x| + (-|y|) \le x+y \le |x|+|y|$$

$$\rightarrow -(|x|+|y|) \le x+y \le (|x|+|y|)$$

$$\rightarrow |x+y| \le |x|+|y|$$

تمرین۹ : برای هر دو عدد b و a ثابت کنید که :

$$|b|-|a| \le |b-a|$$

اثبات :

$$|b| = |b-a+a| = |(b-a)+a| \le |b-a|+|a|$$

$$\rightarrow |b| \le |b-a|+|a| \rightarrow |b|-|a| \le |b-a|$$

❄❄❄

قسمت دوّم : تعبیر هندسی قدرمطلق

با توجه به تعریف بیان شده برای قدرمطلق ، تعبیر هندسی قدرمطلق به را می توان به صورت زیر بیان کرد.

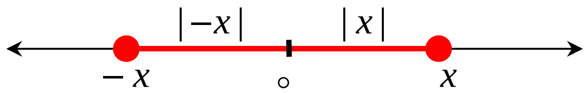
اگر B و A دو نقطه روی محور اعداد حقیقی و به ترتیب متناظر با اعداد b و a باشند. طول پاره خط AB برابر قدر مطلق $a-b$ می باشد.

$$AB = |a-b|$$

توجه داشته باشید که چون $AB = BA$ لذا :

$$|a-b| = |b-a|$$

نتیجه : فاصله‌ی هر عدد حقیقی تا مبدأ محور اعداد حقیقی را قدرمطلق آن عدد می نامند.



لذا همانطور که قبل از این نیز داشتیم.

$$|-x| = |x|$$

تمرین۱۰ : عبارت« فاصله‌ی بین هر دو عدد x و a کمتر از ۰/۰۱ است.» را با استفاده از قدر مطلق بنویسید.

حل :
$$|x-a| < ۰/۰۱$$

تمرین ۱۱ : هر یک از عبارت های زیر را با استفاده از قدرمطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور نمایش دهید.

الف) فاصله‌ی بین x و۳ برابر۷ است.

ب) دو برابر فاصله‌ی بین x و۶ برابر ۴ است.

ج) دو برابر فاصله‌ی بین x و ۵ کمتر یا مساوی۳ است.

د) فاصله‌ی بین x و ۳- بزرگتر از ۲ است.

***

قسمت سوّم : رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق

گاهی لازم است یک عبارت شامل قدرمطلق را بدون ، قدرمطلق بیان کنیم. در این صورت ابتدا ریشه های عبارت های داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم و سپس از تعیین علامت این عبارت ها کمک می گیریم.

تمرین۱۲ : به کمک تعیین علامت عبارت های داخل قدرمطلق ، ضابطه ی توابع زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|$

ب) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

ج) $f(x)=|x+۱|-۲$

د) $f(x)=|x-۱|+|x+۲|$

حل ج :

$x+۱=۰ \rightarrow x=-۱$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
$x+۱$		-	۰	+	

$x<-۱ \rightarrow y=-x-۱-۲=-x-۳$

$x\geq -۱ \rightarrow y=x+۱-۲=x-۱$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-x-۳ & x<-۱\\ x-۱ & x\geq -۱\end{cases}$$

حل د :

$x-۱=۰ \rightarrow x=۱$

$x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$x-۱$		-		-	۰	+	
$x+۲$		-	۰	+		+	

$x<-۲ \rightarrow y=-x+۱-x-۲=-۲x-۱$

$-۲\leq x\leq ۱ \rightarrow y=-x+۱+x+۲=۳$

$x>۱ \rightarrow y=x-۱+x+۲=۲x+۱$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-۲x-۱ & x<-۲\\ ۳ & -۲\leq x\leq ۱\\ ۲x+۱ & x>۱\end{cases}$$

تمرین۱۳ : با تبدیل تابع زیر به یک تابع دو ضابطه ای، نمودار آن را رسم کنید.

$$y=|x-۲|+۱$$

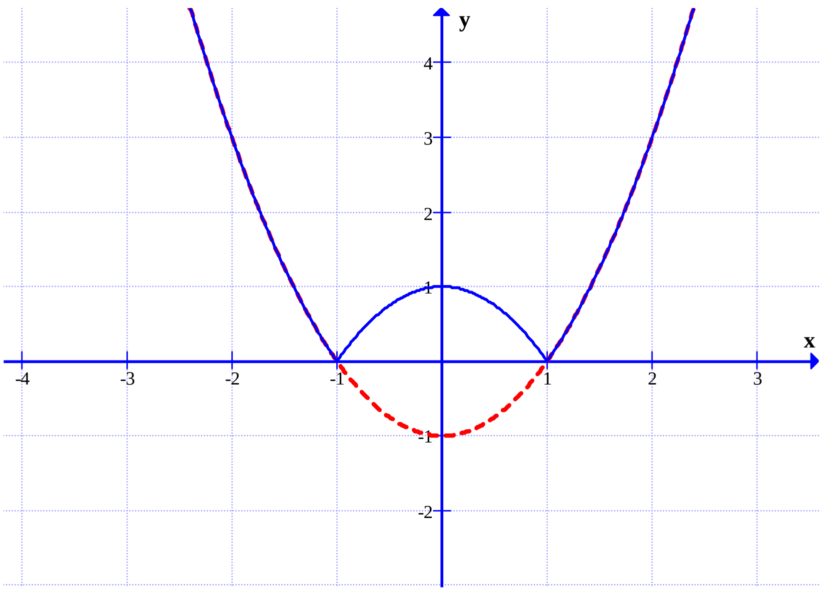
تمرین۱۴: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=|x-۱|+|x+۲|$ ب) $y=|x+۱|-|x-۲|$

توجه : دسته‌ی مهمی از توابع قدرمطلقی به شکل $y=|f(x)|$ می باشند. برای رسم نمودار چنین تـوابعی ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم نموده و سپس قسمت هایی از نمودار که زیر محور x ها قـرار مـی گیـرد، نسبت به این محور قرینه می کنیم.

تمرین ۱۵ : نمودار تابع $y=|x^۲-۱|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع $y=x^۲-۱$ را رسم نموده و سپس قسمت زیر محور طولها را نسبت به این محور قرینه می کنیم.



تمرین۱۶ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=|x^۲-۲x|$ ب) $y=||x|-۲|$

تمرین۱۷ : تعداد جواب های معادله‌ی زیر را به روش هندسی تعیین و سپس معادله را به روش جبری حل کنید. آیا این معادله ریشه‌ی مضاعف دارد؟ چرا؟

$$|x^۲-۱|=۱$$

قسمت چهارم : حل معادلات شامل قدرمطلق

به معادلاتی که شامل قدرمطلق هستند، معادلات قدرمطلقی می گویند.

این نوع معادلات اغلب به شکل $|f(x)|=|g(x)|$ می باشند. برای یافتن ریشه‌ی این معادلات به کمک خواص قدرمطلق معادله را مانند الگوی زیر ساده نموده و سپس حل می کنیم.

$f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$

توجه کنید، ریشه ای از معادلات فوق را می پذیریم که در معادله‌ی اصلی صدق کند.

تمرین۱۸ : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|۳x-۱|=|x|$ ب) $|x-۱|=۲+۳x$

حل ب :

$$|x-۱|=۲+۳x \rightarrow \begin{cases} x-۱=۲+۳x \rightarrow x=-\frac{۳}{۲} \\ -x+۱=۲+۳x \rightarrow x=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

ریشه ی $x=-\frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست.

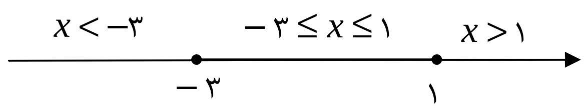
تذکر : اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانید، می توان معادله را نیز حل نمود.

تمرین ۱۹ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|x+۶|=|x|$$

تمرین ۲۰ : معادله‌ی $|x-۱|+|x+۳|=۶$ را حل کنید.

حل :



$x-۱=۰ \rightarrow x=۱$

$x+۳=۰ \rightarrow x=-۳$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
$x-۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۳$		$-$	۰	$+$		$+$	
معادله		(۱)		(۲)		(۳)	

معادله‌ی (۱)

$$x<-۳\ \ ;\ \ -(x-۱)-(x+۳)=۶\rightarrow -x+۱-x-۳=۶\rightarrow x=-۴\in(-\infty,-۳)$$

معادله‌ی (۲) $-۳\leq x\leq ۱\ \ ;\ -(x-۱)+(x+۳)=۶\rightarrow ۴=۶$ غیر ممکن

معادله‌ی (۳) $x>۱\ \ ;\ \ (x-۱)+(x+۳)=۶\rightarrow x=۲\in(۱,+\infty)$

***

تمرین برای حل :

۲۱: معادله‌ی زیر را ابتدا به کمک ویژگی های قدر مطلق و سپس با توان رساندن طرفین حل کنید.

$$|۳x-۲|=|x-۴|$$

۲۲: معادله‌ی زیر را ابتدا به کمک ویژگی های قدر مطلق و سپس به روش هندسی حل کنید.

$$|x-۱|=۴-۳x$$

۲۳: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|x-۱|=x^{۲}-x-۱$$

۲۴: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{۲-x}{|x-۳|}=۱$

ب) $\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}=۲x+۱$

ج) $||x+۵|-۳|=۱۰$

د) $||x^{۲}-۱|-۲|=۱$

۲۵: نقاطی روی محور طولها بدست آورید که مجموع فواصل آنها از دو نقطه‌ی ۳- و ۱ برابر ۷ باشد.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

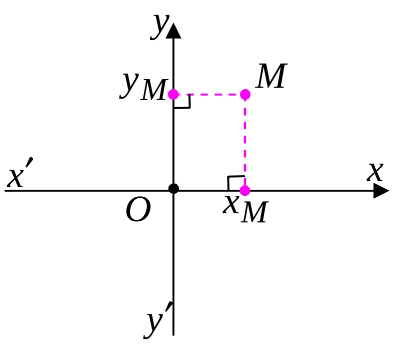
سایت : www.mathtower.ir کانال تلگرام : @amerimath

درس پنجم : آشنایی با هندسه‌ی تحلیلی

هندسه‌ی تحلیلی شاخه ای از ریاضیات است که از ترکیب هندسه و جبر مقدماتی بوجود آمده است. در این رشته اشکال هندسی و روابط جبری بین آنها را با مقادیر و معادلات عددی و جبری بیان می کنند. در اینجا مفاهیم مقدماتی هندسه‌ی تحلیلی را بررسی می کنیم.

قسمت اوّل : دستگاه محور های مختصات (دستگاه مختصات دکارتی)

دو محور $x'ox$ و $y'oy$ که در یک صفحه قرار دارند، یک دستگاه مختصات به وجود می آورند، هرگاه این دو محور بر هم عمود باشند و در نقطه‌ی O (مبدأ مشترک) متقاطع باشند.

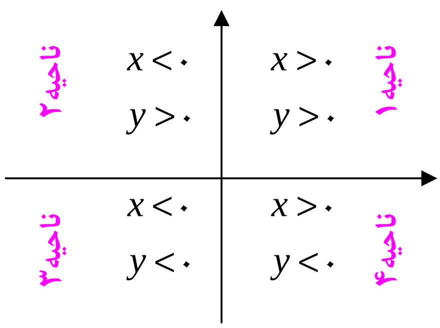


محور افقی ($x'ox$) را محور طول ها و محور قائم ($y'oy$) را محور عرض ها می نامند.

بدیهی است که هر نقطه روی صفحه ، مانند M با دو عدد حقیقی مشخص می شود. تصویر نقطه‌ی M روی محور طول ها را طول (x_M) و تصویر نقطه‌ی M روی محور عرض ها را عرض (y_M) می نامند.

$$M\left|\begin{matrix} x_M \\ y_M \end{matrix}\right. \qquad \text{یا} \qquad M(x_M , y_M)$$

طول و عرض نقطه را مختصات نقطه می نامند.



نتیجه : دستگاه مختصات قائم صفحه را به چهار ناحیه (ربع) تبدیل می کند.علامت مختصات هر نقطه با توجه به ربعی که در آن قرار دارد، به صورت زیر است.

همچنین:

الف : هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن صفر است و برعکس

ب : هر نقطه که روی محور عرض ها قرار دارد، طول آن صفر است و برعکس

ج : نقطه‌ی تقاطع دو محور که مبدأ مختصات نام دارد، طول و عرض آن صفر است.

تمرین ۱ : نقطه‌ی $P(۲m-۱,m+۳)$ داده شده است. مقدار m را چنان بیابید که :

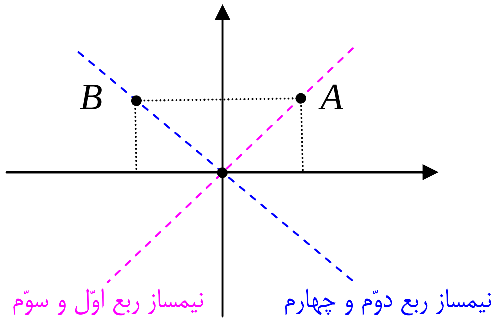
الف : نقطه‌ی P روی محور طولها قرار گیرد.   ب : نقطه‌ی P روی محور عرض ها قرار گیرد.

تمرین ۲ : نقطه‌ی $P(۲k-۱,k+۱)$ در ناحیه‌ی دوّم دستگاه مختصات قرار دارد. حدود k را تعیین کنید.

توجه :

۱ : تمام نقاطی که روی نیمساز ربع اوّل و سوّم دستگاه مختصات واقعند، دارای طول و عرض مساوی هستند.

۲ : تمام نقاطی که روی نیمساز ربع دوّم و چهارم دستگاه مختصات واقعند، دارای طول و عرض قرینه هستند.



تمرین ۳ : نقطه‌ی $P(۲m-۶,m+۴)$ داده شده است. مقدار m را چنان بیابید که :

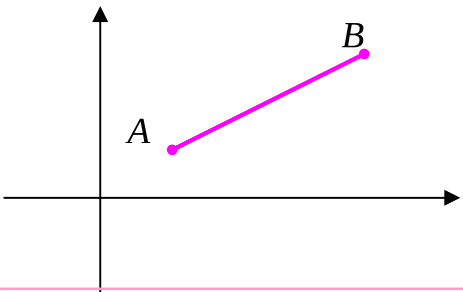
الف : نقطه‌ی P روی نیمساز ربع اوّل و سوّم قرار گیرد.

ب : نقطه‌ی P روی نیمساز ربع دوّم و چهارم قرار گیرد.

***

اندازه‌ی پاره خط در دستگاه محور های مختصات

اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند، در این صورت اندازه‌ی (طول) پاره خط AB به صورت زیر است.



$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

برای مطالعه : برای اثبات درستی این موضوع از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می شود.

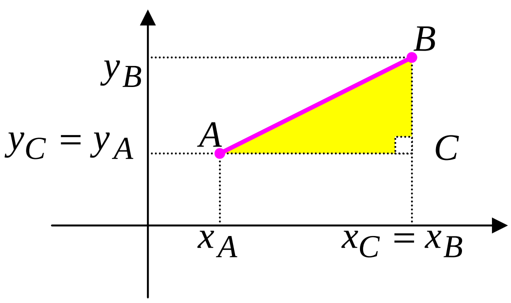
$$AB^۲=AC^۲+BC^۲$$

$$AC=|x_C-x_A|=|x_B-x_A|$$

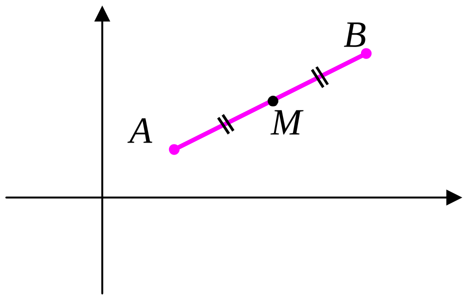
$$BC=|y_B-y_C|=|y_B-x_A|$$

$$AB^۲=(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲$$

$$\to AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$



مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط

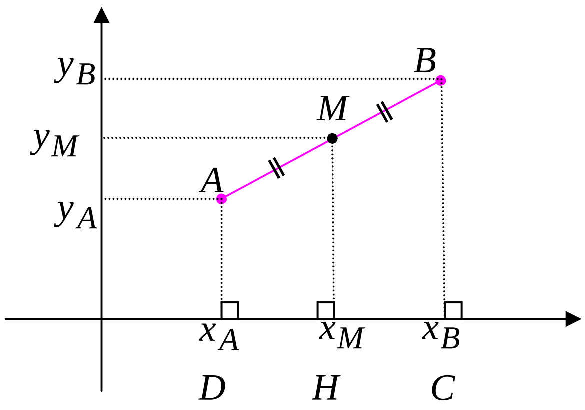


اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند و نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط (میانی) پاره خط AB باشد. در این صورت مختصات نقطه‌ی M به شکل زیر است.

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{۲} \end{cases}$$

برای مطالعه : برای اثبات این موضوع می توان به شکل زیر استدلال کرد.

اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند و نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط (میانی) پـاره خـط AB در نظـر گرفتـه شود. در این صورت می توان گفت کـه چـون نقطه‌ی M وسـط پـاره خـط AB از متـوازی الاضلاع $ABCD$ می باشد و MH مـوازی دو قاعده رسم شده است (هر سه بـر محـور x عمودند). پـس بنـابر قـضیه‌ی خطـوط مـوازی (تالس) می توان نوشت :



$$\frac{DH}{HC} = \frac{AM}{MB} \xrightarrow{AM=MB} \frac{DH}{HC} = ۱ \rightarrow DH = HC$$

$$\rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \rightarrow ۲x_M = x_A + x_B \rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود.

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

تمرین ۴ : دو نقطه‌ی $A(۳,-۷)$ و $B(-۱,-۴)$ داده شده اند.

الف) طول پاره خط AB را تعیین کنید. ب) مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را به دست آورید.

تمرین برای حل :

۵ : اگر $A(۱,۰)$ و $B(-۲,۳)$ دو رأس مقابل مربعی باشند. مساحت مربع را محاسبه کنید.

۶ : نقاط $A(-۳,۰)$ و $B(۶,۱۰)$ و $C(۰,۶)$ سه رأس یک مثلث می باشند.اندازه‌ی میانه[1]ی وارد بر ضلع BC را تعیین کنید.

۷ : اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(۲,-۲)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث را تعیین کنید.

۸ : اگر $A(۴,۰)$ و $B(۲,-۲\sqrt{۳})$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی باشند، ابتدا نوع مثلث را تعیین کنید و سپس مساحت و محیط آن را تعیین کنید.

۹ : اگر $A(۲,۳)$ و $B(-۱,۰)$ و $C(-۵,۴)$ سه رأس مثلثی باشند، ابتدا نوع مثلث را تعیین کنید و سپس مساحت آن را تعیین کنید.

۱۰ : نشان دهید که نقطه‌ی $P(-۱۲,۱۱)$ روی عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه‌ی $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار دارد.

۱۱ : دو انتهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هستند.

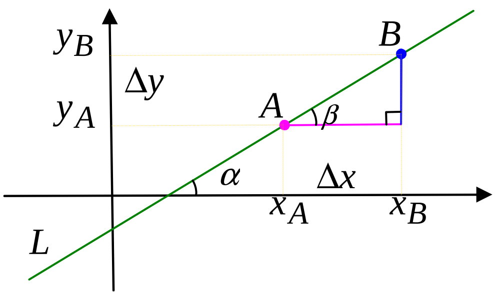
الف) اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه‌ی $P(۷,۳)$ بر روی محیط دایره قرار دارد؟ چرا؟

***

شیب خط

اگر B و A دو نقطه از خط L باشند. شیب (ضریب زاویه) خط L به صورت زیر تعریف می شود.



$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

بنابر قضیه‌ی خطوط موازی واضح است که $\angle\alpha = \angle\beta$

. همچنین بنابر بر تعریف تانژانت زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه می توان نوشت.

$$m_L = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\beta) = \tan(\alpha)$$

لذا شیب هر خط ، تانژانت زاویه ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.

[1]. در هر مثلث، میانه، پاره خطی است که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن وصل می کند.

نتیجه : با این تعریف واضح است که

الف : شیب محور طولها و هر خط موازی آن ، برابر صفر است.

ب : شیب محور عرضها و هر خط موازی آن ، تعریف نشده است.

ج: شیب نیمساز ربع اوّل و سوّم برابر ۱ و شیب نیمساز ربع دوّم و چهارم برابر ۱− است.

تمرین ۱۲ : شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(۵,-۴)$ و $B(۳,۰)$ را به دست آورید.

تمرین ۱۳ : خطی با محور طولها در جهت مثبت زاویه‌ی ۳۰ درجه تشکیل می دهد. شیب این خط را بنویسید.

تمرین۱۴ : ثابت کنید که سه نقطه‌ی $A(-۴,۲)$ و $B(-۲,۰)$ و $C(۱,-۳)$ روی یک خط راست واقع اند.

***

معادله‌ی خط

هر رابطه‌ی خطی بین طول و عرض تمام نقاط خط را معادله‌ی خط می نامند.

مثال : دو نقطه‌ی $A(۳,۷)$ و $B(۱,۳)$ را در نظر بگیرید. به کمک تعیین رابطه‌ی طول و عرض این دو نقطه، معادله‌ی خط AB را بنویسید.

حل : با کمی دقت معلوم می شود که اگر ابتدا طول هر کدام از این دو نقطه را دو برابر و سپس با عدد یک جمع کنیم، عرض نقطه به دست می آید. لذا رابطه‌ی موجود (معادله‌ی خط) به صورت زیر است.

$$y = ۲x + ۱$$

تمرین۱۵ : نمودار خط مثال قبل را رسم کنید.

تذکر : به طور کلی معادله‌ی هر خط به صورت زیر است.

$$y = mx + n$$

در این معادله که آن را **معادله‌ی استاندارد خط** نیز می نامند،عدد m (ضریب x) را شیب و عدد n را عرض از مبدأ[2] می نامند.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $(۲,۷)$و $(۵,۳)$ می گذرد.

[2]. محل تلاقی هر خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

حل :

روش اوّل: ابتدا شیب خط را تعیین می کنیم.

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-۳}{۲-۵}=\frac{۴}{-۳}$$

و چون معادله‌ی خط به صورت $y=mx+n$ می باشد، پس :

$$y=\frac{-۴}{۳}x+n$$

اکنون برای تعیین مقدار n مختصات یکی از نقاط داده شده را در این معادله جایگزین می کنیم.

$$(۲,۷)\xrightarrow{y=\frac{-۴}{۳}x+n}۷=\frac{-۴}{۳}(۲)+n\rightarrow n=\frac{۲۹}{۳}$$

در نهایت معادله‌ی خط را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$y=mx+n\rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

روش دوّم: چون معادله‌ی خط به صورت $y=mx+n$ می باشد. مختصات دو نقطه‌ی داده شده را در این معادله جایگزین می کنیم.

$$\begin{cases}۵m+n=۳\\۲m+n=۷\end{cases}\rightarrow (-۱)\times\begin{cases}۵m+n=۳\\۲m+n=۷\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-۵m-n=-۳\\ \ ۲m+n=۷\end{cases}$$

$$\rightarrow -۳m=۴\rightarrow m=\frac{۴}{-۳}\ ,\ n=\frac{۲۹}{۳}$$

لذا معادله‌ی خط مطلوب به شکل زیر است.

$$y=mx+n\rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

نتیجه : معادله‌ی هر خط گذرا از مبدأ مختصات به صورت $y=mx$ است.

تمرین۱۶ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و شیب آن ۳ − باشد.

***

معادله‌ی کلی خط

برای هر خط می توان معادله ای به صورت زیر نوشت:

$$ax + by + c = ۰$$

واضح است که این معادله را می توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

پس شیب خط برابر $m = \frac{-a}{b}$ و عرض از مبدأ آن $n = -\frac{c}{b}$ است. توجه داشته باشید که عرض نقطه تلاقی خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

نتیجه : معادله‌ی برخی از خطوط مهم به صورت زیر است.

ردیف	عنوان	معادله	شیب
۱	محور طول ها	$y = ۰$	$m = ۰$
۲	محور عرض ها	$x = ۰$	تعریف نمی شود.
۳	نیمساز ربع اوّل و سوّم	$y = x$	$m = ۱$
۴	نیمساز ربع دوّم و چهارم	$y = -x$	$m = -۱$

تمرین۱۷ : معادله‌ی خطی به صورت $۶x + ۲y - ۴ = ۰$ است.

الف: شیب و عرض از مبدأ این خط را به دست آورید.

ب : محل تقاطع این خط با محور های مختصات را تعیین کنید.

ج : نمودار خط را رسم کنید.

تمرین۱۸: نمودار هر یک از خطوط زیر را رسم کنید.

الف) $y = -۲x + ۱$ پ) $y = -۲$ ث) $y = \frac{۱}{۳}x$

ب) $۲x + ۳y = ۶$ ت) $x = \frac{۳}{۲}$

تمرین ۱۹: مقدار k را طوری تعیین کنید که شیب خط به معادله‌ی زیر برابر ۲− باشد.

$$kx + (k - ۲)y = -۳k$$

***

تمرین برای حل :

۲۰ : مقدار k را طوری تعیین کنید که سه نقطه‌ی $A(-۳,۰)$ و $B(k+۱,-۲)$ و $C(۳,۲)$ روی یک خط راست واقع باشند.

۲۱ : معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و $B(۳,۲)$ را بنویسید.

۲۲ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور عرض ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند.

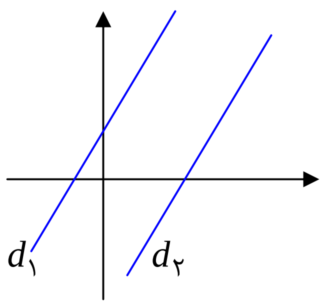
۲۳ : نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۳,۲)$ و $C(۰,-۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC را بنویسید.

۲۴ : معادله‌ی عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه‌ی $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل می کند.

***

رابطه‌ی بین شیب های خطوط موازی

دو خط موازیند، اگر و تنها اگر شیب های مساوی داشته باشند.



$$m_۱ = m_۲ \leftrightarrow d_۱ \parallel d_۲$$

تمرین۲۵ : نشان دهید که دو خط به معادلات زیر موازیند.

$$y=-۲x+۳ \qquad \text{و} \qquad ۶x+۳y=۵$$

تمرین۲۶ : معادلات دو خط زیر را در نظر بگیرید.

$$x-۴y=-۲ \qquad \text{و} \qquad ۲x+y=۵$$

الف) ثابت کنید که این دو خط متقاطع هستند.

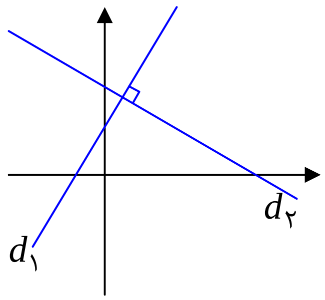
ب) مختصات نقطه‌ی تقاطع این دو خط را تعیین کنید.

ج) نمودار هر دو خط را رسم کنید و نقطه ی تقاطع آنها را تعیین کنید.

تمرین ۲۷ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $P(-۱,۳)$ بگذرد و موازی با خط به معادله‌ی $۲x + y = ۳$ باشد.

***

رابطه‌ی بین شیب های دو خط عمود بر هم



دو خط بر هم عمودند، اگر و تنها اگر حاصل ضرب شیب های آنها برابر -۱ باشد. به عبارتی دیگر اگر شیب خطی عکس و قرینه ی شیب دیگری باشد، آن دو خط بر هم عمودند.

$$m_۱ \times m_۲ = -۱ \leftrightarrow d_۱ \perp d_۲$$

تمرین۲۸ : نشان دهید که دو خط به معادلات زیر بر هم عمودند.

$$y = -\frac{۴}{۳}x + ۱ \qquad و \qquad ۳x - ۴y = -۲$$

تمرین۲۹ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و بر خط به معادله‌ی $x + ۳y = ۴$ عمود باشد.

تمرین برای حل :

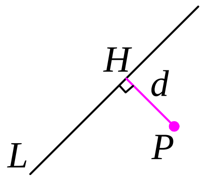
۳۰ : نقاط $A(۴,۰)$ و $B(۱,۳)$ و $C(۰,-۲)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را بنویسید.

۳۱ : معادله‌ی عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه‌ی $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل می کند.

۳۲ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طول ها را در نقطه ای به طول ۲ قطع کند و موازی خط به معادله‌ی $\frac{x}{۲} + \frac{y}{۳} = ۱$ باشد.

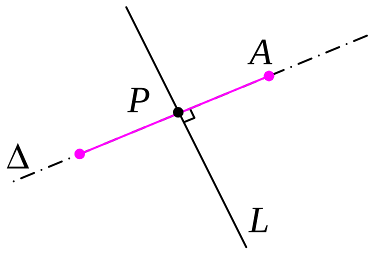
۳۳ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند و عمود بر خط به معادله‌ی $\frac{x}{۲} + \frac{y}{۳} = ۱$ باشد.

فاصله‌ی نقطه تا خط



فاصله‌ی هر نقطه خارج یک خط، برابر طول پاره خطی از که از نقطه بر خط عمود رسم می شود. بدیهی است که فاصله‌ی هر نقطه، روی خط تا آن خط برابر صفر است.

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ را از خط L به معادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.



حل : چون شیب خط L برابر $-\frac{۴}{۳}$ است، پس هر خط عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادله‌ی خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می نویسیم.

$$\Delta: y=\frac{۳}{۴}x+h$$

و چون نقطه‌ی $A(۷,۵)$ روی خط Δ قرار دارد، داریم :

$$۵=\frac{۳}{۴}(۷)+h \to h=-\frac{۱}{۴}$$

لذا معادله‌ی خط Δ به صورت زیر است.

$$\Delta: y=\frac{۳}{۴}x+h \to y=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۴} \to ۳x-۴y=۱$$

اگر معادلات دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطه‌ی P، محل برخورد این دو خط به دست می آید.

$$\begin{matrix} L: \\ \Delta: \end{matrix}\begin{cases} ۴x+۳y=۱۸ \\ ۳x-۴y=۱ \end{cases} \to x=۳ \ , \ \ y=۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

واضح است که طول پاره خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

همانطور که مشاهده می کنید، این روش برای حل مسئله، روشی نسبتاً طولانی است. می توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد.

فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_۰, y_۰)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ را از خط L به معادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.

حل :

$$۴x+۳y=۱۸ \to ۴x+۳y-۱۸=۰$$

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲}}=\frac{|۲۸+۱۵-۱۸|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۲۵}{\sqrt{۲۵}}=۵$$

تمرین ۳۴ : فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۱,-۱)$ تا خط به معادله‌ی $۳x-۴y=-۳$ را به دست آورید.

نتیجه : فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ به شکل زیر است.

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

تمرین ۳۵ : نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(۰,-۳)$ سه رأس یک مثلث هستند.

الف : اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

ب : مساحت مثلث را حساب کنید.

***

توجه : اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ و $C(x_۳, y_۳)$ سه رأس مثلثی باشند، می توان مساحت مثلث را به کمک رابطه‌ی زیر محاسبه کرد.

$$S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۱ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ & y_۱ \end{vmatrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

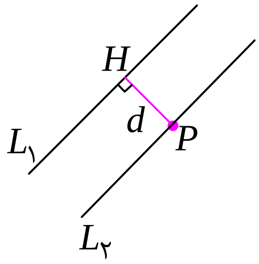
که قدر مطلق عدد حاصل برابر مساحت مثلث است.

مثال: نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(۰,-۳)$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت مثلث را به دست آورید.

حل :

$$\to S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} ۳ & -۲ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۳ & -۳ & ۲ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(۹+۶+۰+۴+۰+۹)=۱۴$$

فاصله‌ی بین دو خط موازی



فاصله‌ی دو خط موازی ، طول پاره خطی است که از هر نقطه ی واقع بر یکی بر دیگری عمود رسم می شود. بدیهی است که فاصله‌ی دو خط منطبق بر هم برابر صفر است.

فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات :

$$L_1 : ax+by+c_1=0 \quad \text{و} \quad L_2 : ax+by+c_2=0$$

به صورت زیر است.

$$d=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تمرین ۳۶ : فاصله‌ی بین دو خط موازی زیر را تعیین کنید.

$$4x+3y+7=0 \quad \text{و} \quad 4x+3y-8=0$$

تمرین۳۷ : اگر $A(6,3)$ و $B(7,0)$ دو رأس مجاور یک مستطیل باشند و معادله‌ی ضلع CD از این مستطیل به صورت $3x+y=1$ باشد. مساحت مستطیل را به دست آورید.

تمرین برای حل :

۳۸ : یکی از اضلاع مربعی بر خط $3x-4y=9$ واقع است. اگر $A(2,3)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۳۹ : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,-4)$ از خط $8x+6y=k$ برابر۴ است. مقدار k را به دست آورید.

۴۰ : فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد دو خط به معادلات $2y-x+1=0$ و $y+x-4=0$ را از خط d به معادله‌ی $7x-24y-2=0$ را تعیین کنید.

۴۱ : خط L به معادله‌ی $3x-4y=0$ بر دایره ای به مرکز $W(2,-1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.[3]

۴۲ : فاصله‌ی بین دو خط موازی زیر را تعیین کنید.

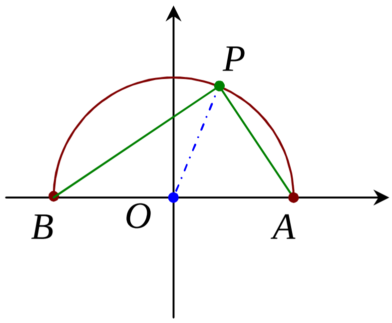
$$6x-8y-7=0 \quad \text{و} \quad 3x-4y+1=0$$

***

[3] . توجه داشته باشید که شعاع دایره بر خط مماس در نقطه‌ی تماس عمود است.

حل چند تمرین کاربردی :

۴۳ : نقطه‌ی $P(x,۸)$ روی نیم دایره ای به شعاع ۱۰ در شکل روبرو داده شده است.



الف: مقدار x را به دست آورید.

ب : شیب خط های PA و PB را به دست آورید.

ج : نشان دهید که زاویه‌ی APB قائم الزاویه است.

حل : نقطه‌ی P روی نیم دایره واقع است. لذا فاصله‌ی آن تا مرکز دایره (که در اینجا مبدأ مختصات است.) برابر شعاع دایره است.

$$OP=۱۰ \to \sqrt{(x-۰)^۲+(۸-۰)^۲}=۱۰ \to x^۲+۶۴=۱۰۰ \to x=\pm ۶$$

پس :

$$P(۶,۸) \text{ یا } P(-۶,۸)$$

با توجه به شکل و اینکه شعاع نیم دایره برابر ۱۰ است ، واضح است که مختصات نقاط A و B به صورت زیر است.

$$B(-۱۰,۰) \text{ و } A(۱۰,۰)$$

اکنون در حالت اینکه $P(۶,۸)$ می توان شیب خط های PA و PB به شکل زیر به دست آورد.

$$m_{PB}=\frac{۸-۰}{۶+۱۰}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲} \qquad \text{و} \qquad m_{PA}=\frac{۸-۰}{۶-۱۰}=\frac{۸}{-۴}=-۲$$

و چون $m_{PA}\times m_{PB}=-۱$ پس $PB\perp PA$

برای حالت $P(-۶,۸)$ می توان به طور مشابه عمل کرد.

۴۴ : اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر۲ باشد، مقدار a را به دست آورید.

حل :

$$d=\frac{|(a)(۱)+(۴)(۲)-۱|}{\sqrt{a^۲+۱۶}} \xrightarrow{d=۲} \frac{|a+۷|}{\sqrt{a^۲+۱۶}}=۲ \to |a+۷|=۲\sqrt{a^۲+۱۶}$$

$$\to a^۲+۱۴a+۴۹=۴(a^۲+۱۶) \to ۳a^۲-۱۴a+۱۵=۰ \xrightarrow{\Delta=۱۹۶-۱۸۰=۱۶}$$

$$\rightarrow a_{۱}=\frac{۱۴+۴}{۶}=۳ \quad , \quad a_{۲}=\frac{۱۴-۴}{۶}=\frac{۵}{۳}$$

۴۵ : ثابت کنید که فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات :

$$L_{۱}: ax+by+c_{۱}=۰ \quad \text{و} \quad L_{۲}: ax+by+c_{۲}=۰$$

به صورت زیر است.

$$d=\frac{|c_{۲}-c_{۱}|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

حل: کافی است فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه مانند $P(x_{\circ},y_{\circ})$ روی یکی از خط ها مانند $L_{۱}$ را تا خط دیگر یعنی $L_{۲}$ به دست آوریم.

$$L_{۱}: ax+by+c_{۱}=۰ \xrightarrow{P(x_{\circ},y_{\circ})} ax_{\circ}+by_{\circ}+c_{۱}=۰ \rightarrow ax_{\circ}+by_{\circ}=-c_{۱}$$

$$d=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c_{۲}|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|\overbrace{ax_{\circ}+by_{\circ}}^{-c_{۱}}+c_{۲}|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|-c_{۱}+c_{۲}|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|c_{۲}-c_{۱}|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

۴۶ : نقاط $A(-۱۱,-۱۳)$ و $B(-۳,۳)$ و $C(۳,۱)$ سه رأس مثلث ABC می باشند.

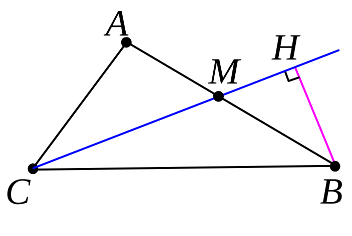
الف: طول عمودی را که رأس B بر میانه‌ی نظیر رأس C وارد می شود به دست آورید.

ب : مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

ج : مختصات مرکز ثقل مثلث (محل تلاقی میانه ها) را تعیین کنید.

حل:

الف: ابتدا معادله‌ی میانه‌ی CM را نوشته و سپس فاصله‌ی نقطه‌ی B تا میانه‌ی CM را محاسبه می کنیم.



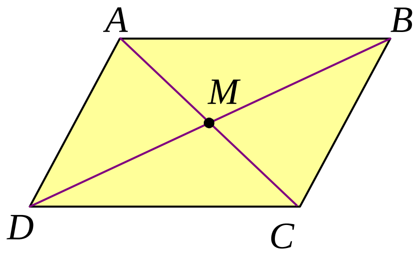
$$AB \text{ وسط } M \text{ نقطه‌ی} \rightarrow M(\frac{-۱۱+(-۳)}{۲},\frac{-۱۳+۳}{۲}) \rightarrow M(-۷,-۵)$$

$$CM \text{ معادله‌ی خط } \xrightarrow{m=\frac{-۵-۱}{-۷-۳}=\frac{-۶}{-۱۰}=\frac{۳}{۵}} y=\frac{۳}{۵}(x-۱)+۳ \rightarrow ۳x-۵y+۱۲=۰$$

$$BH=\frac{|۳(-۳)-۵(۳)+۱۲|}{\sqrt{۹+۲۵}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۳۴}}$$

ب : برای پاسخ گویی به این قسمت از روابط زیر کمک می گیریم.(چرا؟)

در هر متوازی الاضلاع مجموع طول های دو رأس روبرو با مجموع طول های دو رأس روبروی دیگر برابر است.



$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

به همین ترتیب مجموع عرض های دو رأس روبرو با مجموع عرض های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

$$x_A + x_C = x_B + x_D \to -۱۱ + ۳ = -۳ + x_D \to x_D = -۵$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \to -۱۳ + ۱ = ۳ + y_D \to y_D = -۱۵$$

پس مختصات رأس چهارم به صورت $D(-۵,-۱۵)$ است.

ج : برای پاسخ گویی به این قسمت از روابط زیر کمک می گیریم.(چرا؟)

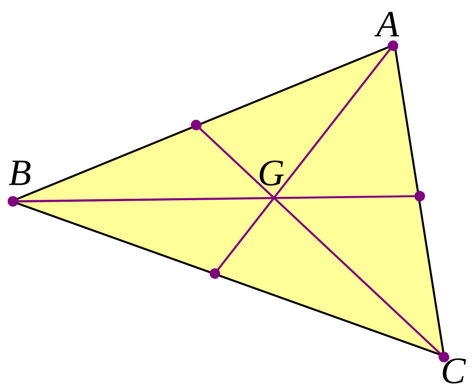
اگر نقطه‌ی G محل تقاطع میانه های مثلث ABC باشد. در این صورت می توان نوشت:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

$$x_G = \frac{-۱۱ - ۳ + ۳}{۳} = -\frac{۱۱}{۳}$$

$$y_G = \frac{-۱۳ + ۳ + ۱}{۳} = -۳$$

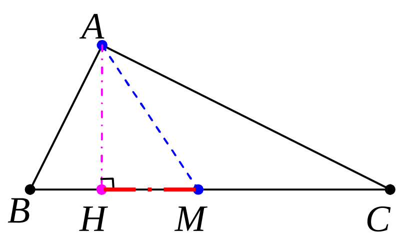
پس مختصات مرکز ثقل مثلث به صورت $G(-\frac{۱۱}{۳},-۳)$ است.



۴۷ : نقاط $A(۱,۴)$ و $B(۶,۵)$ و $C(۱,۰)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه‌ی AM باشند،

الف : طول MH را به دست آورید.

ب : مساحت مثلث را حساب کنید.



حل :

الف:

BC وسط M نقطه‌ی $\rightarrow M(\frac{۶+۱}{۲},\frac{۵+۰}{۲}) \rightarrow M(\frac{۷}{۲},\frac{۵}{۲})$

BC شیب خط $m_{BC}=\frac{۵-۰}{۶-۱}=۱$

BC معادله‌ی $y=۱(x-۱)+۰ \rightarrow y=x-۱$

AH شیب $m_{AH}=-\frac{۱}{m_{BC}}=-۱$

AH معادله $y=-۱(x-۱)+۴ \rightarrow y=-x+۵$

برای تعیین مختصات نقطه‌ی H دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} y=x-۱ \\ y=-x+۵ \end{cases} \rightarrow x-۱=-x+۵ \rightarrow x=۳ \rightarrow y=۲ \rightarrow H(۳,۲)$$

اکنون طول پاره خط MH را تعیین می کنیم.

$$MH=\sqrt{(\frac{۷}{۲}-۳)^۲+(\frac{۵}{۲}-۲)^۲}=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{۱}{۲}$$

ب :

$$BC=\sqrt{(۶-۱)^۲+(۵-۰)^۲}=\sqrt{۲۵+۲۵}=۵\sqrt{۲}$$

ارتفاع AH برابر فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط BC به معادله‌ی $x-y-۱=۰$ است.

$$AH=\frac{|(۱)(۱)+(-۱)(۴)-۱|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

لذا مساحت مثلث به شکل زیر حاصل می شود.

$$S=\frac{۱}{۲}(BC)(AH)=\frac{۱}{۲}(۵\sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})=۱۰$$

توجه : اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ سه رأس مثلثی باشند، می توان مساحت مثلث را به کمک رابطه‌ی زیر محاسبه کرد. ثابت می شود که قدر مطلق عدد حاصل برابر مساحت مثلث است.

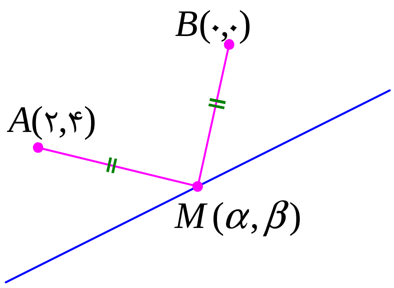
$$S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۱ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ & y_۱ \end{vmatrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

برای مثال در قسمت ب این سئوال مساحت مثلث می شود.

$$S=\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 0 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times|(5+0+4-24-5-0)|=10$$

۴۸ : نقطه ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که فاصله‌ی آن تا مبدأ مختصات، برابر فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی $A(2,4)$ باشد.



حل : فرض کنیم که $M(\alpha,\beta)$ نقطه‌ی مورد نظر باشد. چون این نقطه روی خط $y=2x$ پس $\beta=2\alpha$

از طرفی

$MA=MO$

$$\to\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{(x_O-x_M)^2+(y_O-y_M)^2}$$

$$\to(2-\alpha)^2+(4-\beta)^2=(0-\alpha)^2+(0-\beta)^2$$

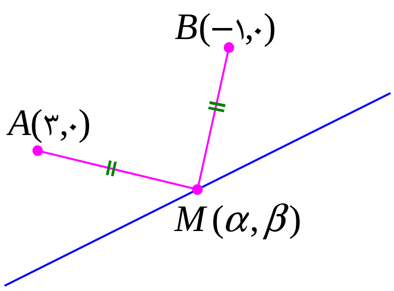
$$\to 4-4\alpha+\alpha^2+16-8\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2\to 20-4\alpha-8\beta=0$$

$$\xrightarrow{\beta=2\alpha}20-4\alpha-8(2\alpha)=0\xrightarrow{\div 2}10-2\alpha-8\alpha=0\to 10-10\alpha=0\to\alpha=1$$

$$\to\beta=2(1)=2$$

پس مختصات مطلوب مسئله به صورت $M(1,2)$ است.

۴۹ : نقطه ای روی خط $y=2x+1$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(3,0)$ و $B(-1,0)$ به یک فاصله باشد.



حل: فرض کنیم که $M(\alpha,\beta)$ نقطه‌ی مورد نظر باشد. چون این نقطه روی خط $y=2x+1$ پس $\beta=2\alpha+1$

از طرفی

$MA=MB$

$$\to\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{(x_B-x_M)^2+(y_B-y_M)^2}$$

$$\to(3-\alpha)^2+(0-\beta)^2=(-1-\alpha)^2+(0-\beta)^2$$

$$\to ۹-۶\alpha+\alpha^۲+\beta^۲=۱+۲\alpha+\alpha^۲+\beta^۲ \to ۹-۶\alpha=۱+۲\alpha \to \alpha=۱$$

$$\xrightarrow{\beta=۲\alpha+۱} \beta=۲(۱)+۱=۳$$

پس مختصات مطلوب مسئله به صورت $M(۱,۳)$ است.

۵۰ : دو خط به معادلات $۴x+۳y=۱$ و $۳x-۴y=۵$ بر دو ضلع مستطیلی منطبقند. اگر نقطه‌ی $A(-۳,۲)$ یک رأس مستطیل باشد. مساحت مستطیل را محاسبه کنید.

حل : با توجه به شیب های دو خط داده شده، واضح است که این دو خط برهم عمودند، لذا دو رأس مجاور مستطیل می باشند. از طرفی مختصات نقطه‌ی داده شده در معادلات این دو خط صدق نمی کند، پس این نقطه خارج این دو خط واقع است. برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل کافی است، فاصله‌ی این نقطه را تا دو خط داده شده به دست آورد تا اندازه‌ی طول و عرض مستطیل به دست آید.

فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط $۴x+۳y=۱$: $d_۱=\dfrac{|-۱۲+۶-۱|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\dfrac{۷}{۵}$

فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط $۳x-۴y=۵$: $d_۲=\dfrac{|-۹-۸-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\dfrac{۲۲}{۵}$

مساحت مستطیل $S=d_۱\times d_۲=\dfrac{۷}{۵}\times\dfrac{۲۲}{۵}=\dfrac{۱۵۴}{۲۵}$ واحد سطح

***

تهیه کننده : جابر عامری، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath