

فصل دوم

تابع

همه چیز را از خدا بخواهید،

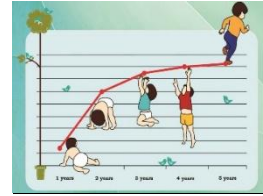
تلاش کنید

و امیدوارانه منتظر مسیبت الهی باشید.

مفهوم رابطه

در موارد زیادی پدیده های پیرامون ما با یکدیگر در ارتباط هستند. مانند:

- رابطه بین وزن و سن یک کودک از بدو تولد تا پنج سالگی



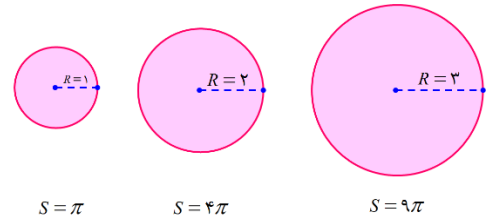
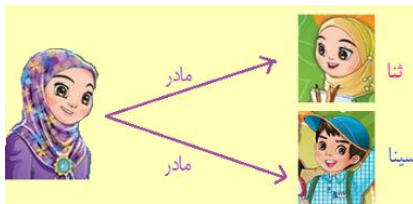
- میزان جریان ورودی به پنکه و میزان شدت چرخش

- تعداد ساعات کار یک کارگر و میزان دستمزدش



- رابطه مادر و فرزندانش

- رابطه بین مساحت یک دایره و شعاع آن



مفهوم تابع

تمرین ۱: دوچرخه سواری با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می دهد.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	۴/۵	
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲		۵	۸	۱۰

ب) رابطه ای بین زمان و مسافت بنویسید.

در تمرین بالا متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر می کند و متغیر مسافت (d) براساس تغییرات t تغییر می کند. و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. t را متغیر مستقل و d را متغیر وابسته می نامند.

تمرین ۲: در جدول زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها براساس ضابطه $y = -2x + 3$ داده شده است.

x	۱	۵	۳		$\frac{1}{2}$	۰
y	d	-۷		۳		۰

الف) جدول روبرو را کامل کنید.

ب) کدام متغیر مستقل و کدام متغیر وابسته است؟

تمرین ۳: در جدول زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها براساس ضابطه $y = x^2 + 1$ داده شده است.

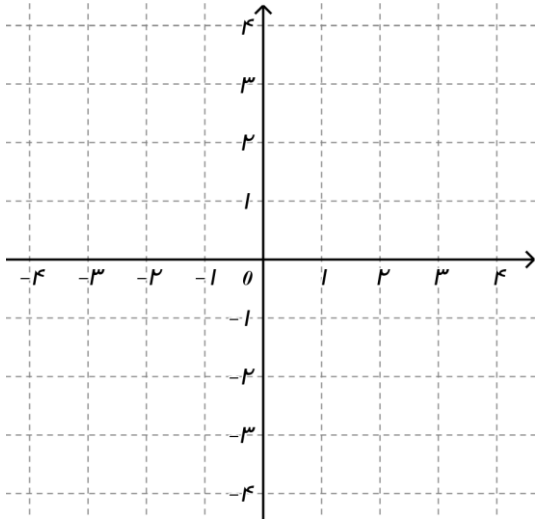
x	d	t		۰	-۱
y	t		$\frac{5}{4}$		

الف) جدول روبرو را کامل کنید.

ب) کدام متغیر مستقل و کدام متغیر وابسته است؟

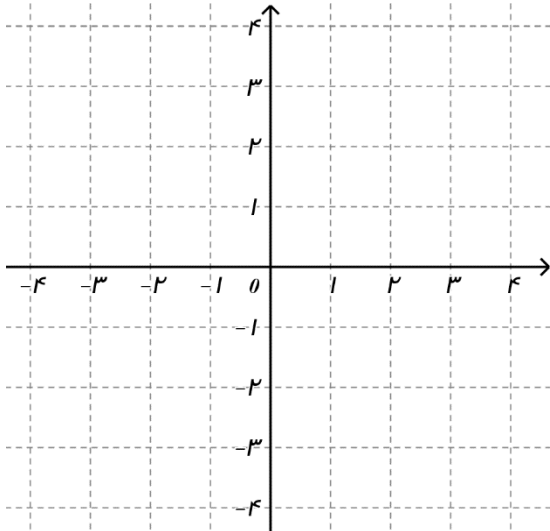
در حالت کلی رابطه هایی به صورت $y = ax + b$ ، را رابطه های خطی می نامیم.

تمرین ۴: نمودار خط $y = 4x - 2$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید.



x	y
0	
	0
$\frac{1}{2}$	
	t

تمرین ۵: نمودار خط $y = 3 - x$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید.



x	y

تمرین ۶: می دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ و محیط دایره از تساوی $P = 2 \times r \times \pi$ به دست می آید. در این

رابطه π عددی ثابت تقریباً $\pi = 3/14$ در نظر گرفته می شود و r شعاع دایره است:

الف) آیا متغیر تابعی از شعاع دایره است؟

ب) آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟

پ) کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟

ت) جدول زیر را کامل کنید.

r بر حسب سانتی متر (شعاع)	۱	۱/۵	t	۳	۴
P بر حسب سانتی متر (محیط)	π			6π	
S بر حسب سانتی متر مربع (مساحت)			4π		

تمرین ۷: جدول های زیر را با توجه ضابطه داده شد کامل کنید.

الف) $y = 3x + 1$

x	-۱					۲
y	-۲				$3\sqrt{2} + 1$	
(x, y)	$(-1, -2)$	$(\quad, 1)$	$(\frac{2}{3}, 3)$	$(1, \quad)$		

ب) $y = x^2$

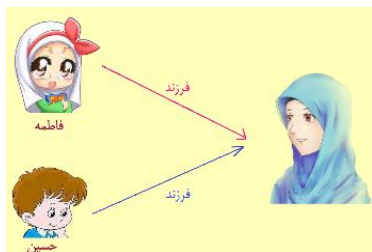
x	-۱					$\frac{4}{7}$
y	۱				۵	
(x, y)	$(-1, 1)$	$(\quad, 1)$	$(\sqrt{3}, 3)$	$(2, \quad)$		



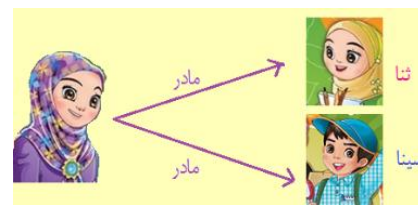
هر دوتایی که ترتیب نوشتن در آن ها مهم باشد، یک **زوج مرتب** می نامیم. مانند دو عدد (دو شی).
 a و b را که به یکی از دو صورت (a, b) یا $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نوشته می شود و a را **مؤلفه اول** و b را **مؤلفه دوم** می نامیم.

تمرین ۸ : رابطه شکل های زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید.

- رابطه فرزندان و مادرشان



- رابطه مادر و فرزندانش



شرط این که دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) برابر (یا نشان دهنده یک نقطه) باشند این است که و باشد.

تمرین ۹ : x و y را طوری تعیین کنید که زوج مرتب $(x, x-y)$ و $(3, 2)$ نشان دهنده ی یک نقطه باشند.

تمرین ۱۰ : اگر مجموعه $\{(2, a-b), (1, 2a+b)\}$ تک عضوی باشد. مقادیر a و b را محاسبه کنید.

تمرین ۱۱ : مقادیر x و y را طوری بیابید که رابطه $(x+y, 5) = (6, 2x-y)$ برقرار باشد.

برای نشان دادن این روابط شکل های متفاوتی وجود دارد. مانند :

(۱) نوشتن به صورت زوج مرتب (۲) نوشتن در جدول (۳) نوشتن ضابطه

(۴) رسم نمودار ون (۵) رسم نمودار در دستگاه مختصات

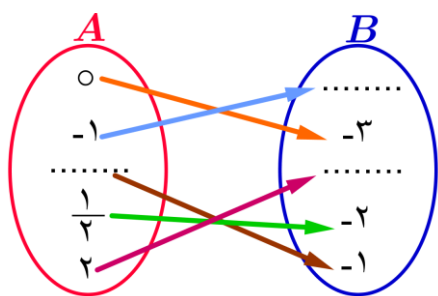
تمرین ۱۲: با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه $A = \left\{ 0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2 \right\}$

باشند.

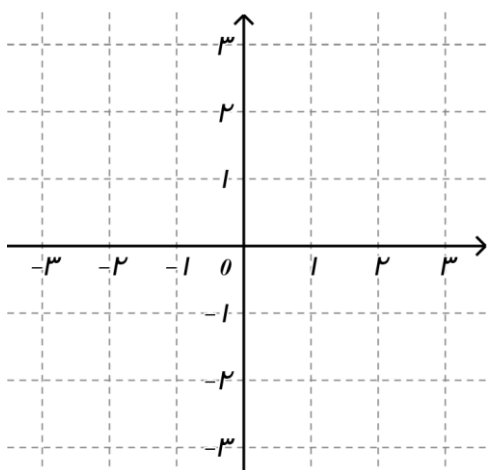
الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲
y	۵				
(x, y)	$(-1, 5)$	(,)	(,)	(,)	(,)

ب) در نمودار پیکانی این رابطه جاهای خالی را پر کنید.



پ) نمودار مختصاتی این رابطه خطی را رسم کنید.

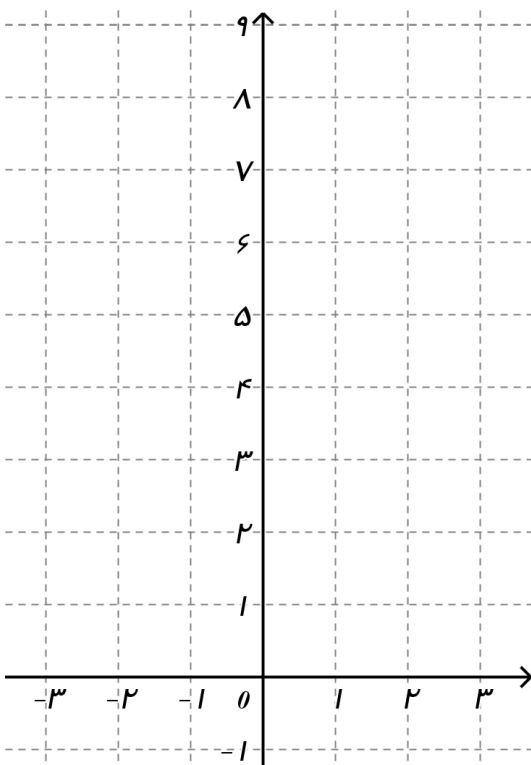


تمرین ۱۳: با توجه به رابطه $y = x^2$ اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ باشند. الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۰	۱	-۱			
y			۱			
(x, y)	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)

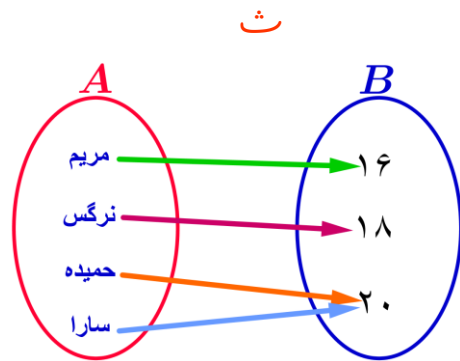
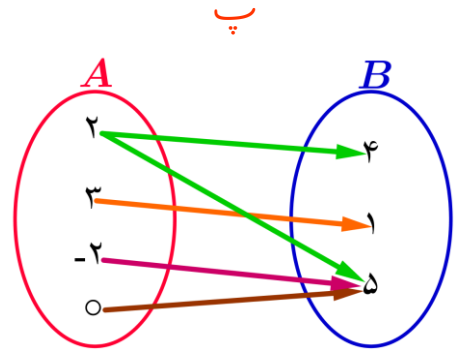
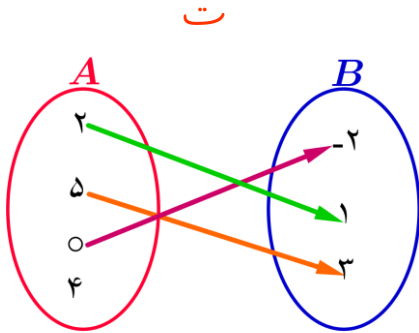
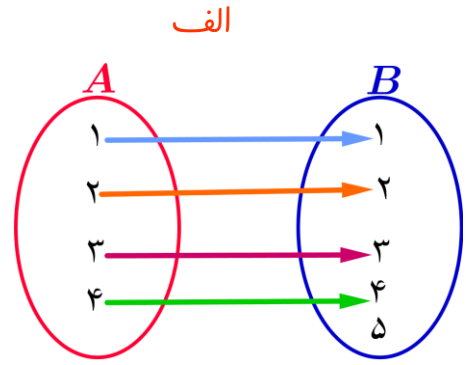
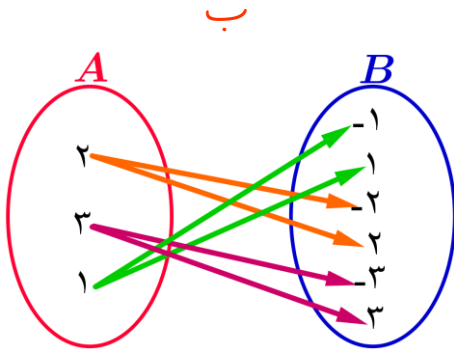
ب) نمودار پیکانی این رابطه رسم کنید.

پ) نمودار مختصاتی این رابطه خطی را رسم کنید.



یک رابطه بین دو مجموعه A و B ، یک تابع نامیده می شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

تمرین ۱۴: کدام یک از رابطه ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده اند، تابع اند؟ چرا؟



تمرین ۱۵: کدام مجموعه از زوج مرتب ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(۲, ۳), (۳, ۳), (۴, ۳), (۵, ۳)\}$

ب) $G = \{(۴, ۱), (۲, -۱), (۱, -۱), (۴, ۲)\}$

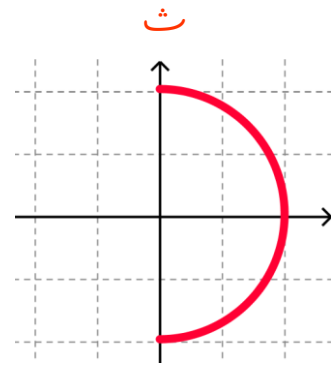
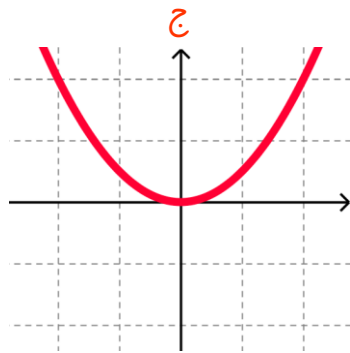
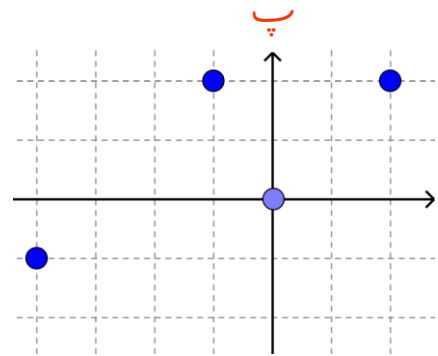
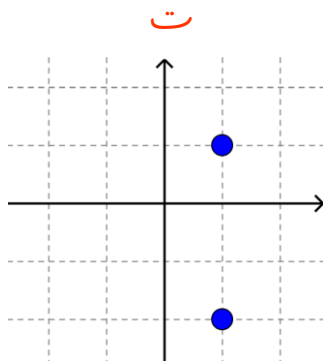
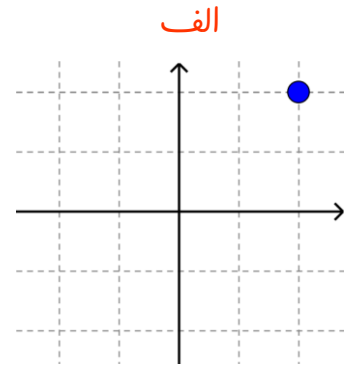
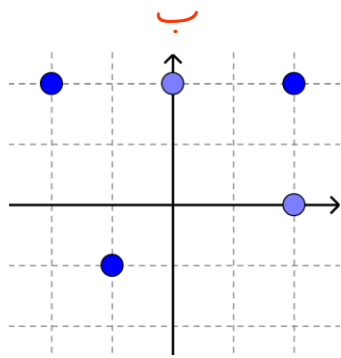
پ) $H = \{(۲, ۳)\}$

ت) $I = \{(۳, ۳)\}$

ث) $J = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴)\}$

ج) $K = \{(-۴, ۱), (-۴, ۲), (-۴, ۳), (-۴, ۴)\}$

تمرین ۱۶: کدام یک از رابطه ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع هستند؟ چرا؟



تمرین ۱۷: کدام یک از رابطه های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

- الف) رابطه ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می دهد. تابع است تابع نیست
- ب) رابطه ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می دهد. تابع است تابع نیست
- پ) رابطه ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می دهد. تابع است تابع نیست
- ت) رابطه ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می دهد. تابع است تابع نیست



تشخیص تابع بودن یک رابطه با نمایش های مختلف

یک رابطه بین مجموعه A و مجموعه B که با نمودار **ون** نمایش داده شده است، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان شود.

اگر نمودار **یک رابطه در دستگاه مختصات** داده شده باشد، تنها در صورتی تابع است که هر خط موازی محور عرض ها نمودار را حداکثر در قطع کند.

اگر یک رابطه به صورت **مجموعه زوج های مرتب** داده شده باشد، هنگامی این رابطه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن نداشته باشد.

هر تابعی یک رابطه هست اما هر رابطه ای تابع نیست.

همان گونه که مجموعه های، بردارها، خطوط و بسیاری از مفاهیم ریاضی را نام گذاری می نماییم. برای رابطه ها و توابع نیز می توان نام هایی را انتخاب کرد. معمولاً رابطه ها را با حروفی مانند T, S, R, \dots (حروف بزرگ انگلیسی) و توابع را با حروفی مانند h, g, f, \dots (حروف کوچک انگلیسی) نام گذاری می کنیم.

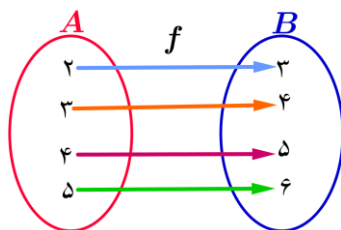
هرگاه دو زوج مرتب دارای مختص اول برابر باشند برای تابع بودن حتماً باید مختص های دوم آن ها نیز باید باشد.



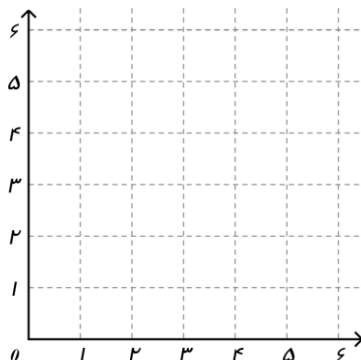
تمرین ۱۷: در هر قسمت یکی از نمایش های رابطه ها مشخص شده است. ابتدا تمام نمایش ها (پیکانی، مختصاتی، زوج مرتبی

، جدولی، توصیفی) را برای هر رابطه بنویسید. سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است؟

الف) نمایش پیکانی:



نمایش مختصاتی:



نمایش زوج مرتبی:

نمایش جدولی:

x				
y				

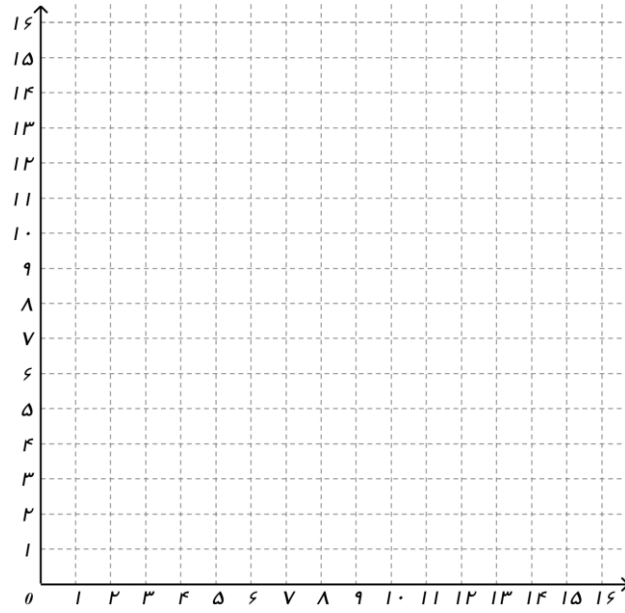
نمایش توصیفی:

ب) نمایش جدولی:

x	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۹	۱۶

نمایش پیکانی:

نمایش مختصاتی:



نمایش زوج مرتبی:

نمایش توصیفی:

فصل دوم

پ) نمایش توصیفی: f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{0, -1, 1, -2, 2\}$ توان چهارم آن را نسبت می دهد.
نمایش پیکانی:

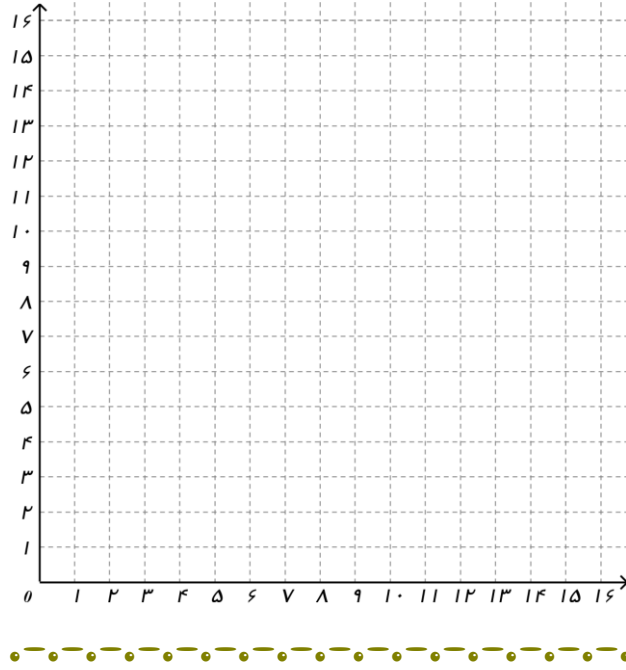
نمایش زوج مرتبی:

۳۳

نمایش جدولی:

x				
y				

نمایش مختصاتی:

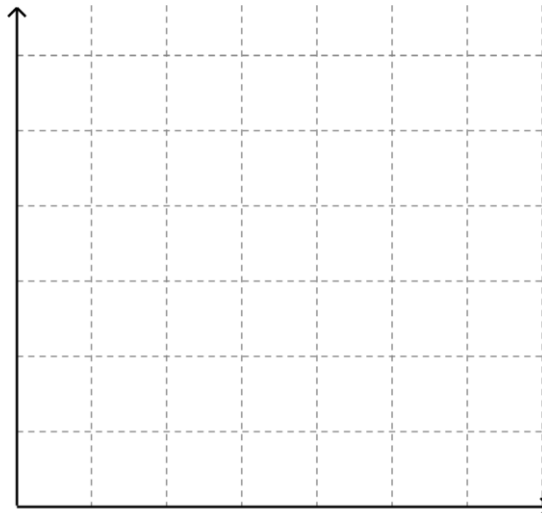


ت) نمایش زوج مرتبی :

$$f = \{ (کشتی ، حمید) ، (تیراندازی ، علی) ، (شنا ، رضا) ، (والیبال ، آرشد) ، (شنا ، علی) ، (فوتبال ، رضا) \}$$

نمایش پیکانی:

نمایش مختصاتی:

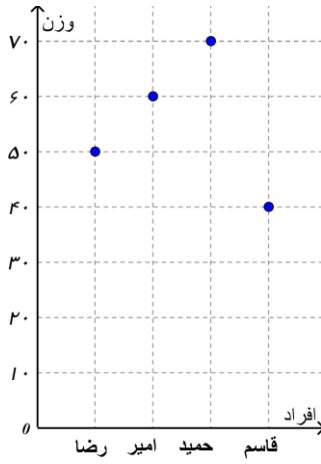


نمایش توصیفی:

نمایش جدولی:

x					
y					

ج) نمایش مختصاتی:



نمایش پیکانی:

فصل دوم

نمایش زوج مرتبی:

نمایش توصیفی:

نمایش جدولی:

x				
y				

ضابطهٔ چپدی

گاهی اوقات می‌توانیم رابطهٔ بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به طور مثال تابع $f = \left\{ (1, 4), (2, 5), (-1, 2), \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) \right\}$ را در نظر می‌گیریم در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفه اول، مؤلفه دوم بدست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$ در این صورت $y = x + 3$. معادله $y = x + 3$ را ضابطهٔ تابع f می‌نامیم.

اگر تابع f را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم و متغیر x مستقل فرض شود در این صورت تأثیر تابع f روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y (متغیر وابسته) است؛ یعنی: $y = f(x)$

یک تابع مانند f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B ، قانون یا ضابطه ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت دهد.

دامنه و برد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای هر تابع:

مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های اول را **دامنهٔ تابع** و مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های دوم را **برد تابع** می‌نامیم. دامنهٔ تابع f را با D_f و برد تابع را با R_f نشان می‌دهیم.

برای نمایش تابعی چون f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$ که $y = f(x)$

$f(x)$ را ضابطهٔ تابع و A را دامنهٔ تابع f در نظر می‌گیریم.

تمرین ۱۸: با توجه به ضابطهٔ هر تابع و مانند نمونه، مجموعهٔ مقادیر یا برد هر تابع را مشخص کنید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 2x^2 + 1$ $A = \left\{ -1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2} \right\}$

$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$f(1) = 2 \times (1)^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow R_f = \left\{ 3, 5, 9, 1, \frac{3}{2} \right\}$$



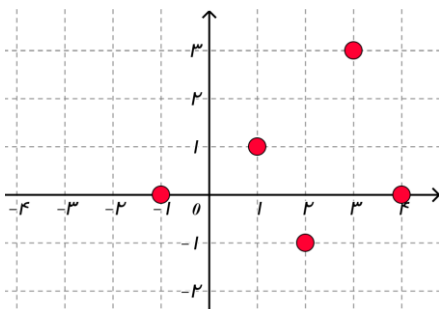
$$\text{پ) } \begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = x^3 - 1 \end{cases} \quad A = \left\{ 1, -1, 0, 4, \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3}, 2 \right\}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \end{cases} \quad A = \{ 0, -1, 8, 3, 2 \}$$

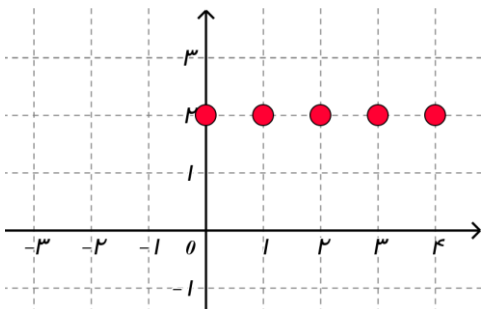
ت)
$$\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x-2} \end{cases} \quad A = \left\{ -2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

تمرین ۱۹: برای هر یک از توابع زیر، دامنه و برد را مشخص کنید. و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

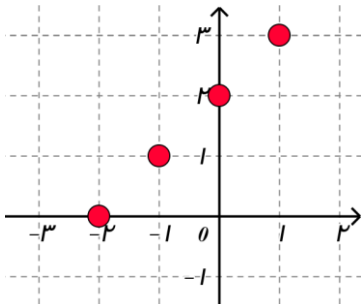
الف)



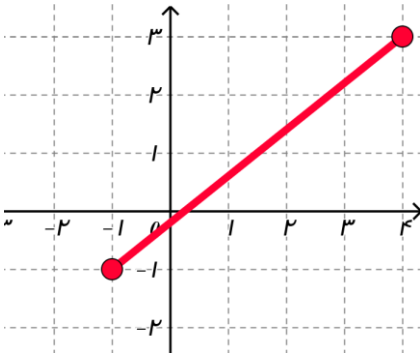
ب)



پ)



ت)



تمرین ۲۰: دامنه و برد هر یک از تابع های زیر را مشخص کنید.

الف)

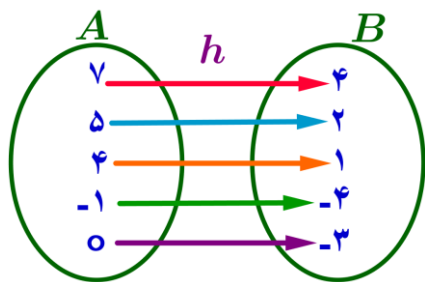
$$\begin{cases} g: A \rightarrow B \\ g(x) = x + 4 \end{cases}$$

$$A = \{2, \dots, \dots, \dots, \dots\}$$

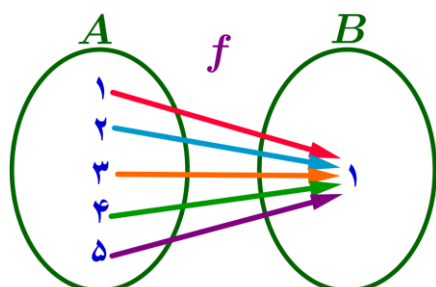
$$R_g = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (4, -4)\}$

پ)



ت)

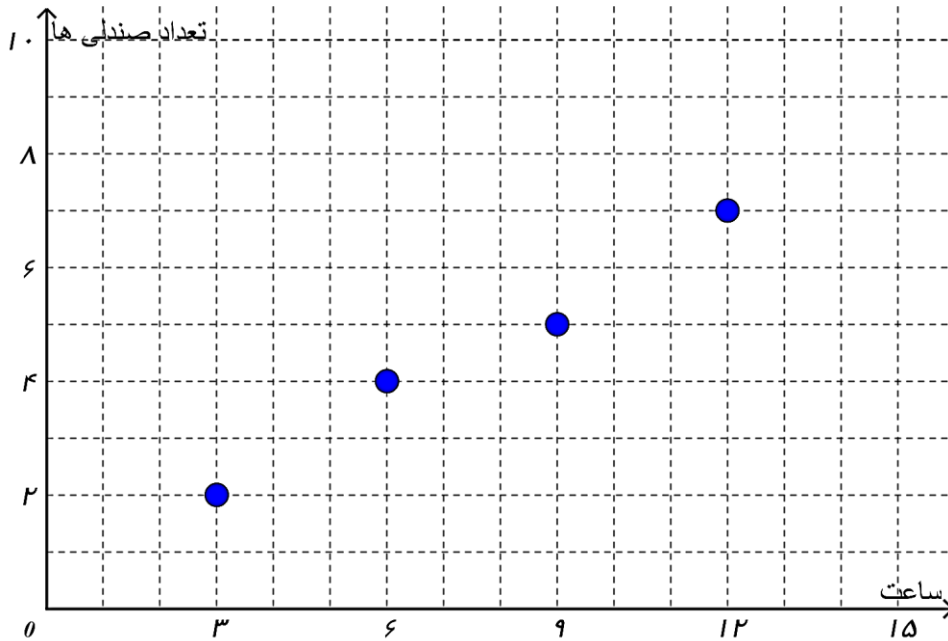


$$f = \left\{ (1,1), (2,2), (3,3), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0,0) \right\}$$





تمرین ۲۱: نمودار زیر تعداد صندلی هایی را که در پایان هر ۳ ساعت کار در یک کارگاه تولید می شوند، نشان می دهد.



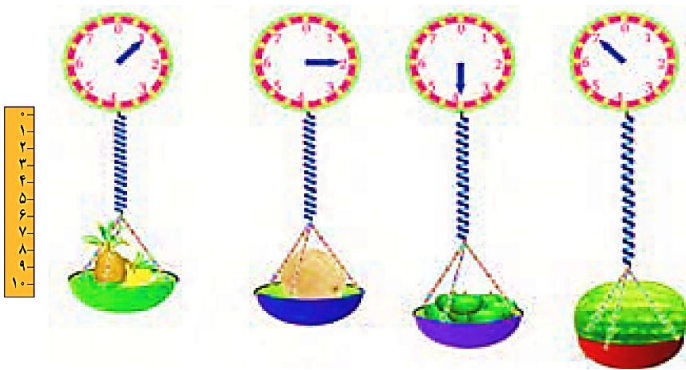
الف) آیا می توانید تعداد صندلی های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش بینی کنید؟

ب) آیا تعداد صندلی های تولید شده در این کارگاه در پایان هشتمین ساعت کاری بیش از ۵ عدد است؟

پ) آیا می توانید تعداد صندلی های تولید شده در این کارگاه را در پایان هر ساعت خاص را پیش بینی کنید.

تمرین ۲۲: طول فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه ای آویزان نشده است ۵ سانتی متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه ای که به آن آویزان شود ۰/۵ سانتی متر به طول آن افزوده می شود.

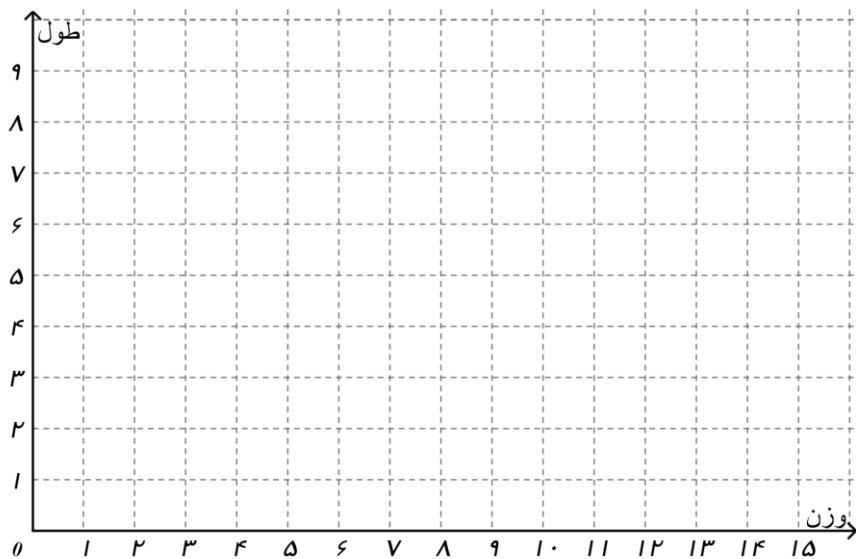
الف) طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید و سپس جدول زیر را تکمیل نمایید.



اندازه وزنه (برحسب کیلوگرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (برحسب سانتی متر)						

ب) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(1)$ ، $f(4)$ ، $f(8)$ و $f(10)$ (برحسب سانتی متر) را محاسبه کنید.

پ) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در دستگاه مختصات مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



تمرین ۲۳: یک کارخانه تولید لوله های آبیاری کشاورزی در هر ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر لوله تولید می کند.

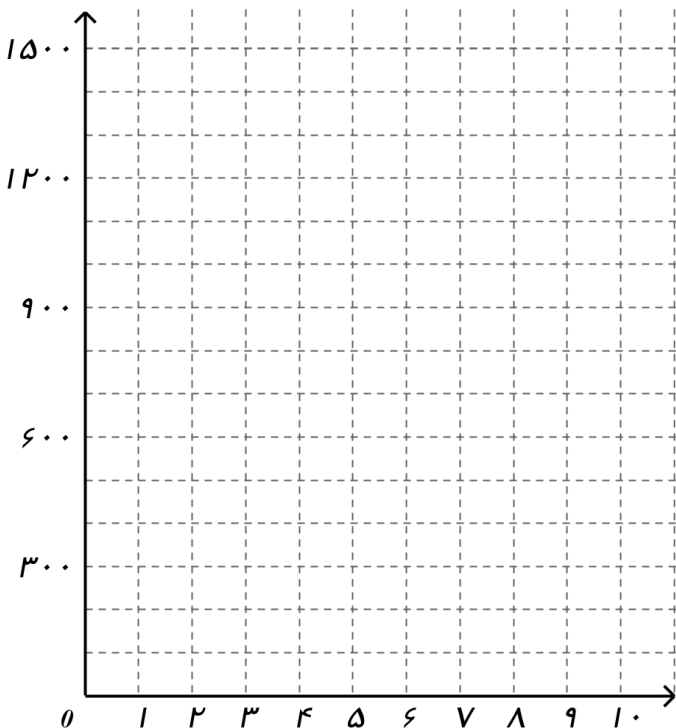
اگر متر از لوله ای را که در این کارخانه پس از x ساعت تولید می کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم.

الف) جدول زیر را به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.

$$\frac{1}{3} \times 1000 = \dots\dots\dots$$

x (بر حسب ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	n
$f(x)$ (بر حسب متر)						

ب) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در دستگاه مختصات مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



هر تابع به صورت $y = f(x)$ که در آن $y = mx + h$ باشد، یک تابع خطی نامیده می شود.



برای رسم نمودار تابع دو نقطه از نمودار تابع $y = mx + h$ را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

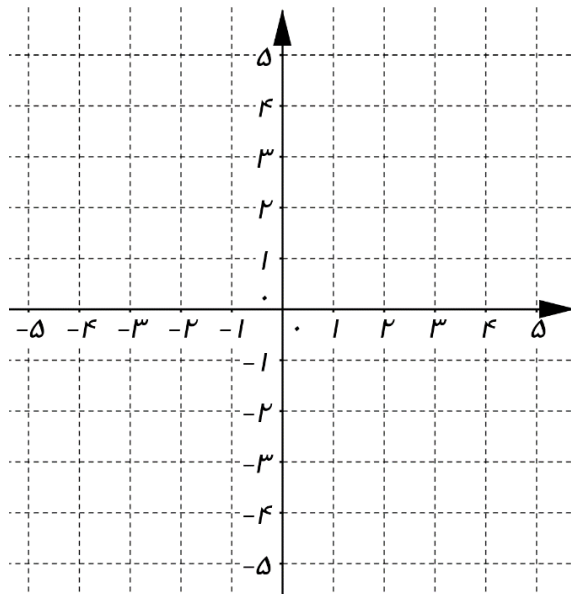


تمرین ۲۴: برای یک تابع خطی داریم: $f(0) = 2$ و $f(2) = 3$

الف) شیب این تابع خطی را بدست آورید.

ب) ضابطه این تابع خطی را بدست آورید.

پ) نمودار این تابع را رسم کنید.

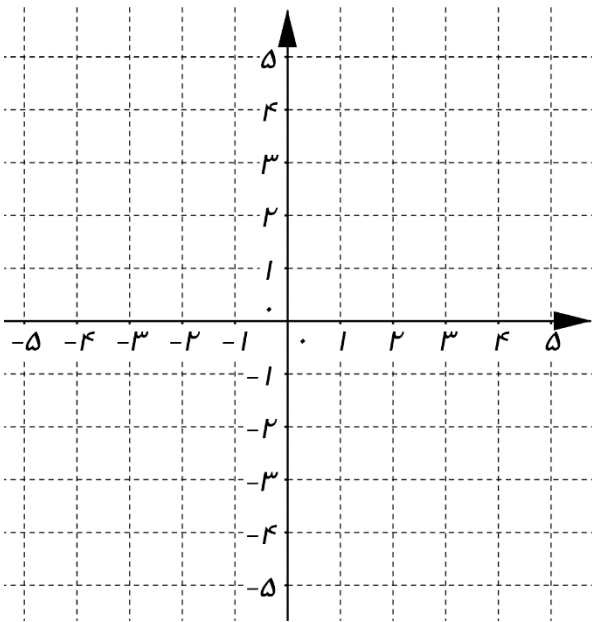


تمرین ۲۵: اگر نمودار یک تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1) = 2$ باشد.

الف) شیب این تابع خطی را بدست آورید.

ب) ضابطه این تابع خطی را بدست آورید.

پ) نمودار این تابع را رسم کنید.



تمرین ۲۶: جدول زیر رابطه خطی بین عمق و دمای سنگ ها را در زیر زمین نشان می دهد. x معرف عمق (برحسب

کیلومتر) و y معرف دما (برحسب سانتی گراد) است.

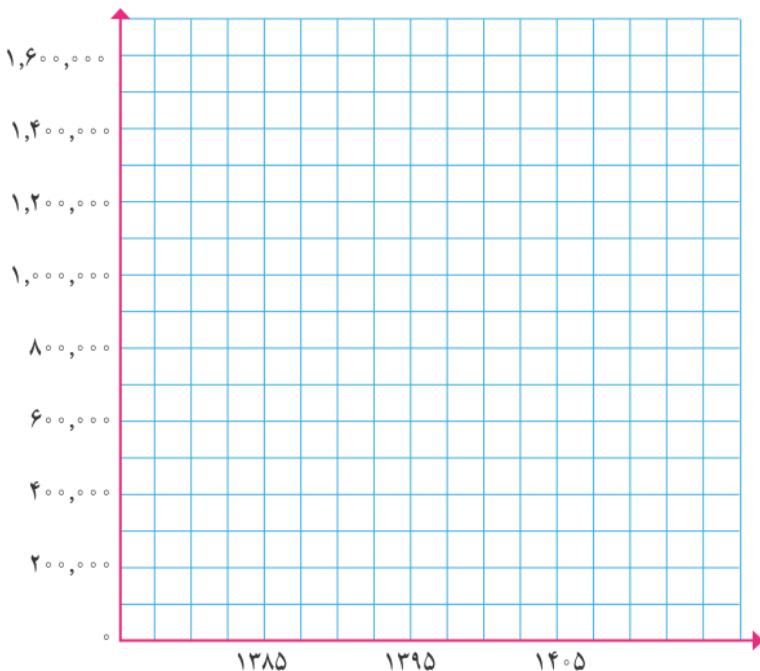
x (برحسب کیلومتر)	۲	۴
y (برحسب سانتی گراد)	۷۵	۱۸۵

الف) شیب این تابع خطی را بدست آورید.

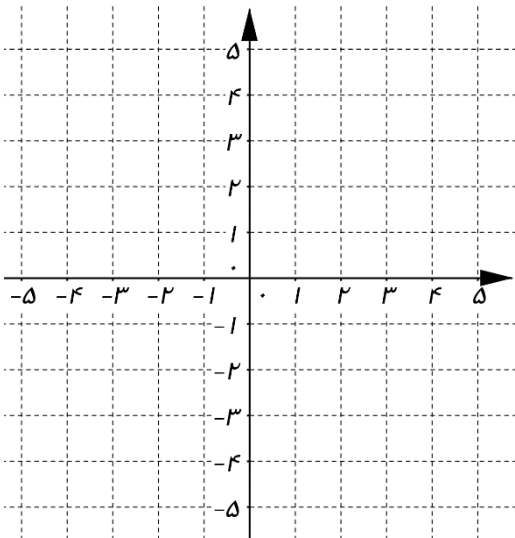
ب) ضابطه این تابع خطی را بدست آورید.

پ) تعیین کنید در چه عمقی دما به 440 درجه سانتی گراد می رسد؟

تمرین ۲۷: فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال 1385 برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال 1395 برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال 1405 به طور تقریبی برآورد کنید.

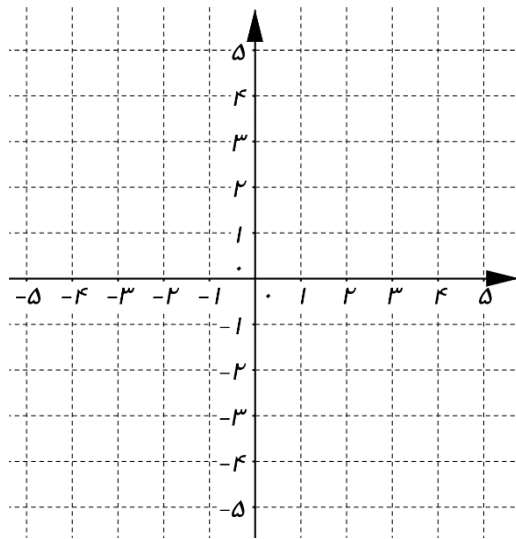


تمرین ۲۸: نمودار تابع خطی $y = -5x + 4$ را رسم کنید.



تمرین ۲۹: برای یک تابع خطی داریم: $h(-1) = -3$ و $h(-5) = 5$

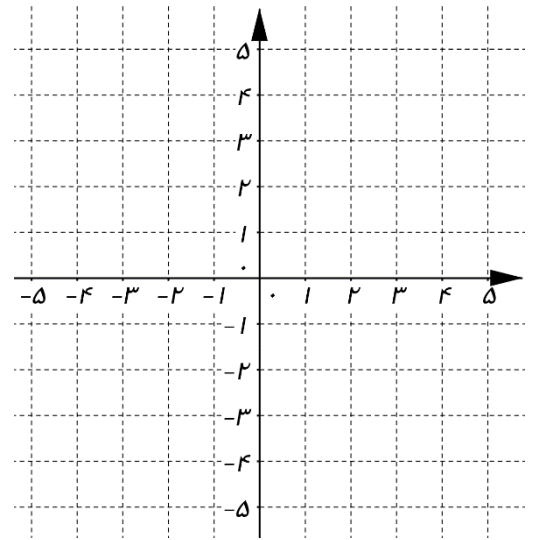
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.



ب) شیب این تابع خطی را بدست آورید.

پ) ضابطه این تابع خطی را بدست آورید.

تمرین ۳۰: نمودار تابع خطی $y = 2x - 3$ را رسم کنید.



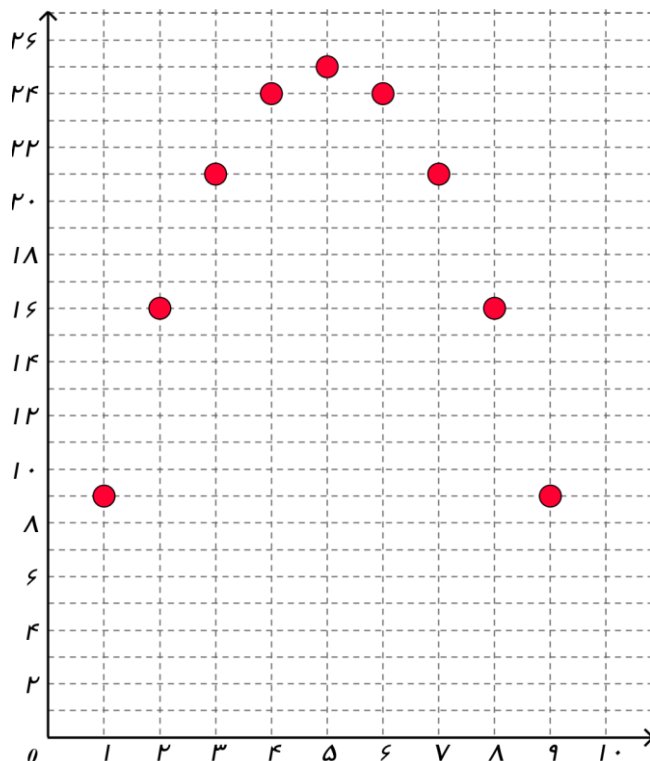


تمرین ۳۱: برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع هایی ۱×۱ ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت ۲۰ تهیه می کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می گیرید با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می دهیم همچنین مساحت مستطیل را با S نشان می دهیم.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲			۶			۹
y	۹	۸	۷					
S	۹			۲۴				۱۶
(x, y)	(۱, ۹)	(۲, ۱۶)		(۵, ۲۵)			(۸, ۱۶)	

ب) اگر هر زوج مرتب جدول بالا را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات زیر مشخص کنید.



تمرین ۳۲: یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $x - 1200$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب متر مربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه 30000 تومان و همچنین مترمربعی 200 تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ آمیزی به ازای $x = 200$ (200 متر مربع کار در یک روز) و $x = 300$ چقدر است؟

حل: برای $x = 200$ هر متر مربع 1000 تومان است $\xrightarrow{x=200} 1200 - 200 = 1000$

برای $x = 300$ هر متر مربع 900 تومان است $\xrightarrow{x=300} 1200 - 300 = 900$

ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x = 200$ و $x = 300$ چقدر است؟

حل: هزینه متغیر + هزینه ثابت = هزینه کل

$$C(x) = 30000 + 200x \xrightarrow{x=200} C(200) = 30000 + 200(200) = 30000 + 40000 = 70000$$

هزینه برای $x = 200$ هر متر مربع 70000 تومان است

$$C(x) = 30000 + 200x \xrightarrow{x=300} C(300) = 30000 + 200(300) = 30000 + 60000 = 90000$$

هزینه برای $x = 300$ هر متر مربع 90000 تومان است

پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم در یک روز به ازای $P(200)$ ، $P(100)$ ، $P(200)$ و $P(300)$ را محاسبه کنید.

حل: $R(x) = (1200 - x) \times x \Rightarrow R(x) = 1200x - x^2$ میزان رنگ آمیزی \times قیمت هر متر مربع = درآمد

هزینه متغیر + هزینه ثابت = هزینه کل $C(x) = 30000 + 200x$

هزینه - درآمد = سود

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = 1200x - x^2 - (30000 + 200x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 1000x - 30000$$

$$P(200) = -(200)^2 + 1000(200) - 30000 = -40000 + 200000 - 30000 = 130000$$

$$P(100) = -(100)^2 + 1000(100) - 30000 = -10000 + 100000 - 30000 = 60000$$

$$P(200) = -(200)^2 + 1000(200) - 30000 = -40000 + 200000 - 30000 = 130000$$

$$P(300) = -(300)^2 + 1000(300) - 30000 = -90000 + 300000 - 30000 = 180000$$

ت) جدول را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰
$P(x)$	۶۰۰۰۰	۱۳۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰						

$$P(۴۰۰) = -(۴۰۰)^2 + ۱۰۰۰(۴۰۰) - ۳۰۰۰۰۰ = -۱۶۰۰۰۰ + ۴۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰۰ = ۲۱۰۰۰۰$$

$$P(۵۰۰) = -(۵۰۰)^2 + ۱۰۰۰(۵۰۰) - ۳۰۰۰۰۰ = -۲۵۰۰۰۰ + ۵۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰۰ = ۲۲۰۰۰۰$$

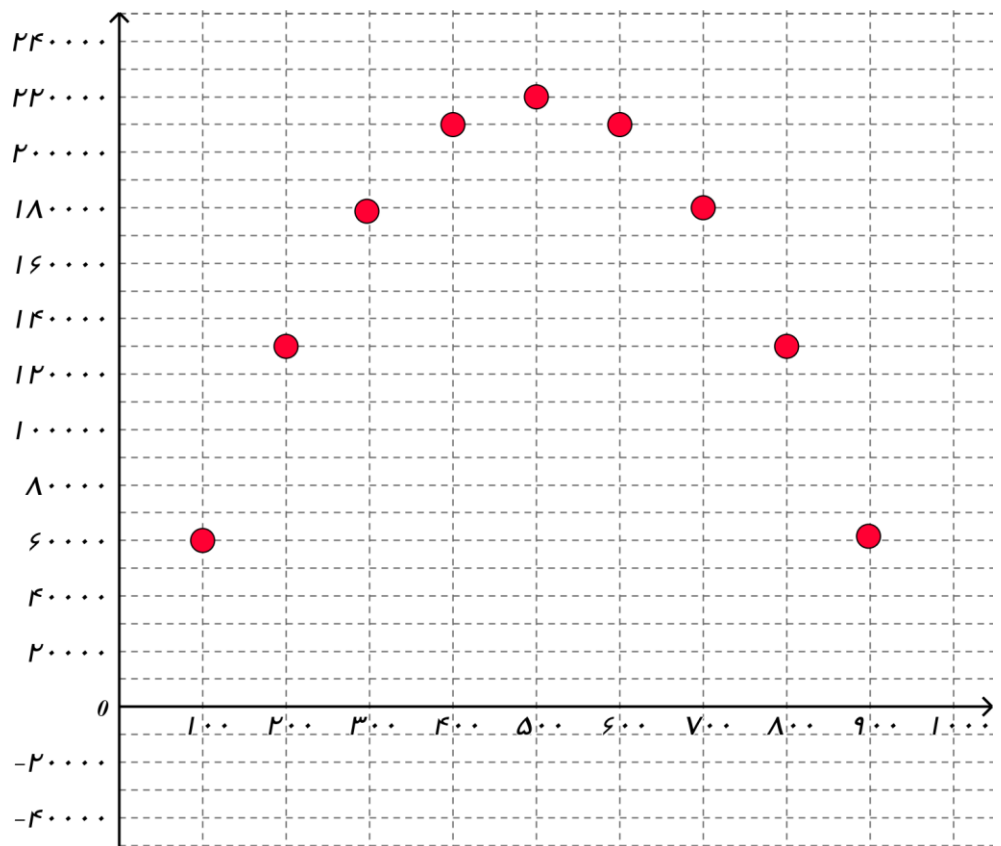
$$P(۶۰۰) =$$

$$P(۷۰۰) =$$

$$P(۸۰۰) =$$

$$P(۹۰۰) =$$

ت) نقاط به دست آمده از جدول بالا را در دستگاه مختصات زیر مشخص کنید.





ت) چرا بعضی نقاط پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هرچه مترافز بیشتری رنگ آمیزی شود، گروه بیشتری کسب می کند؟



در این درس با نمودارهای تابع درجه دوم موسوم به سهمی آشنا می شویم. آشنایی با سهمی و معادله آن و درک خواص آن منجر به درک مفاهیم دیگری در ریاضیات می گردد.

نمودار تابع درجه دوم (سهمی)، یک منحنی غیر مستقیم است.

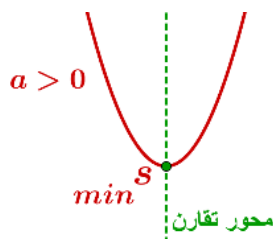
ضابطه یک تابع درجه دوم (سهمی) در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که a, b, c عدد و $a \neq 0$ است.

(۱) بطور کلی سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به یکی از شکل های  و  است.

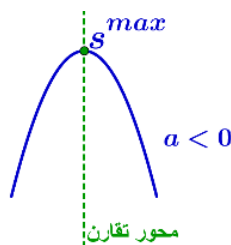
(۲) در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه ای به طول $x_0 = \frac{-b}{2a}$ رأس سهمی است.

(۳) خط $x = \frac{-b}{2a}$ که از رأس سهمی موازی محور y ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است.

(۴) اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت زیر خواهد بود در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار عرض (y) است.



(۵) اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت زیر خواهد بود در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار عرض (y) است.

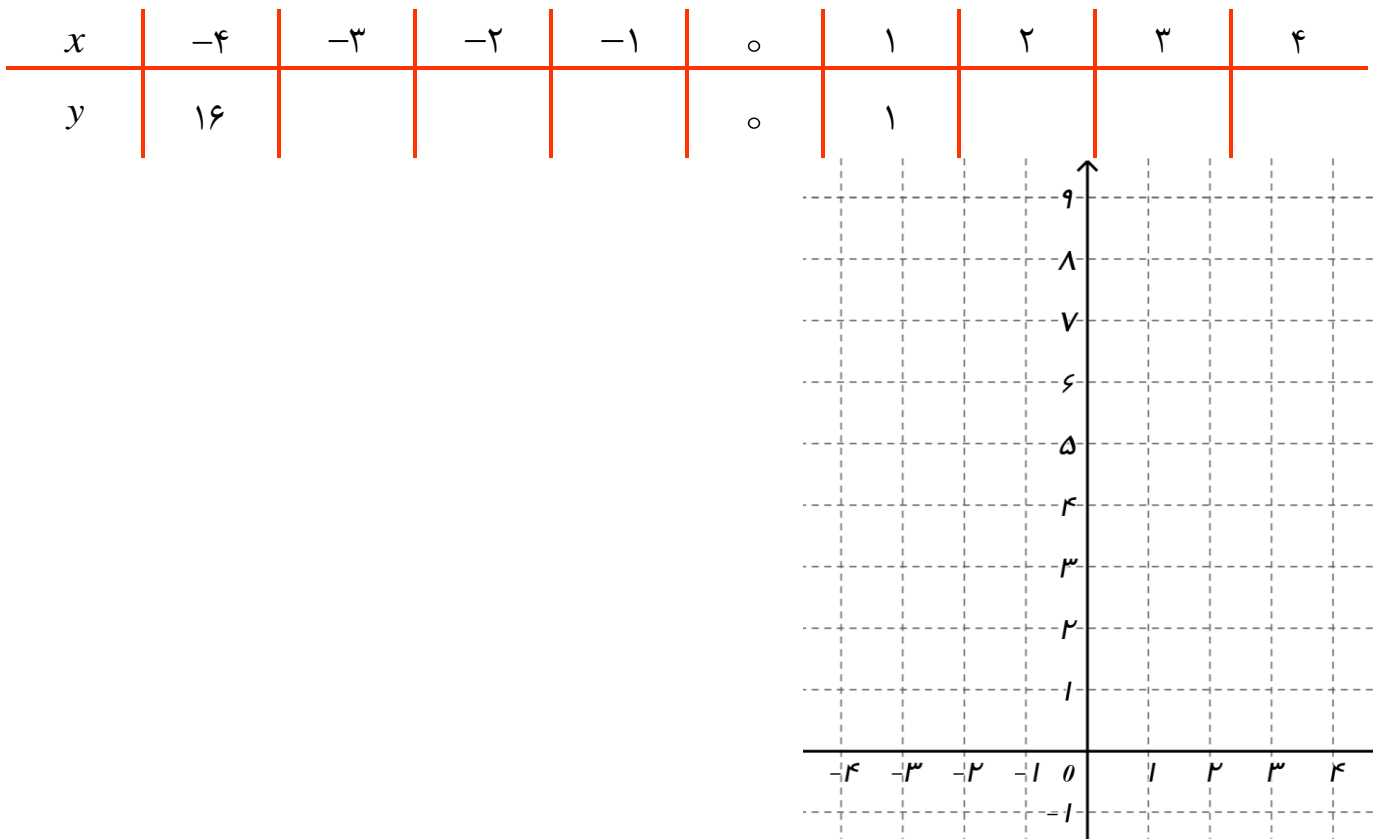


نقاط لازم برای رسم نمودار سهمی :

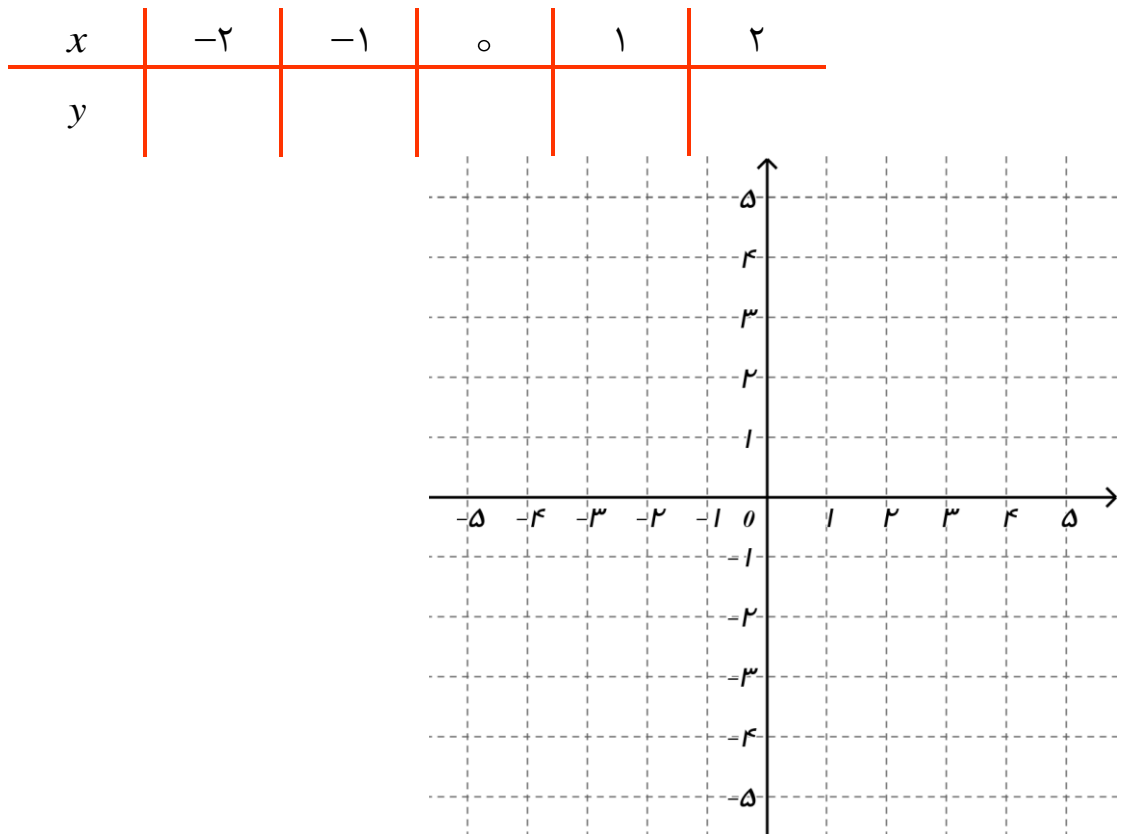
(۱) رأس سهمی

(۲) دو نقطه در طرفین رأس سهمی به فاصله مساوی از رأس

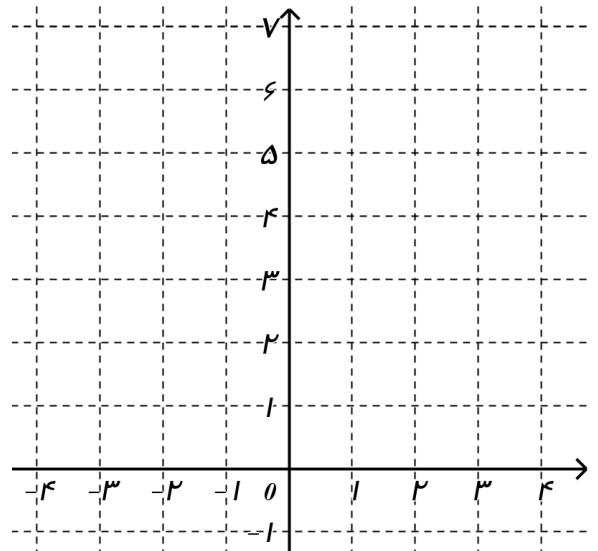
تمرین ۳۳: با توجه به ضابطه تابع $f(x) = x^2$ ابتدا جدول را کامل کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید.



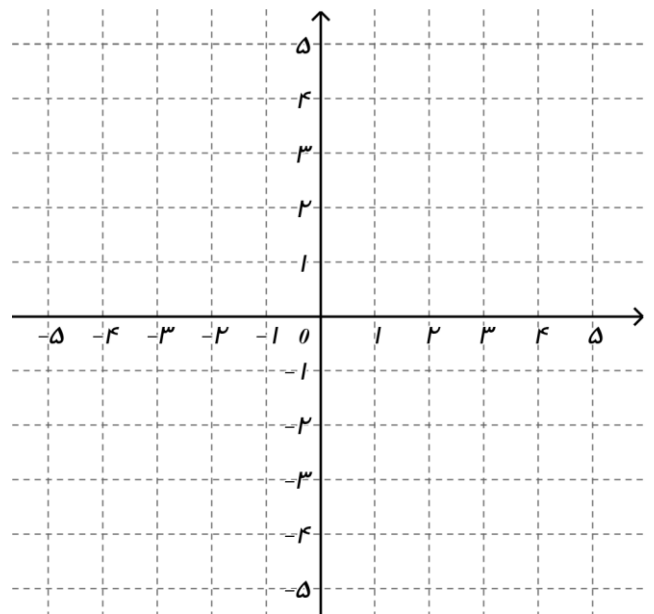
تمرین ۳۴: با توجه به ضابطه تابع $f(x) = 4 - x^2$ ابتدا جدول را کامل کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید.



تمرین ۳۵: رأس و خط تقارن سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + 1$ را مشخص کنید و سپس آن را رسم کنید.



تمرین ۳۶: رأس و خط تقارن سهمی به معادله $y = -2x^2 + 4x + 3$ را مشخص کنید و سپس آن را رسم کنید.



ضابطه هر سهمی در حالت استاندارد به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است،
رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

تمرین ۳۷: مختصات رأس سهمی هایی که معادله های آنها داده شده است مشخص کنید.

الف) $y = x^2$

ب) $y = x^2 + 4$

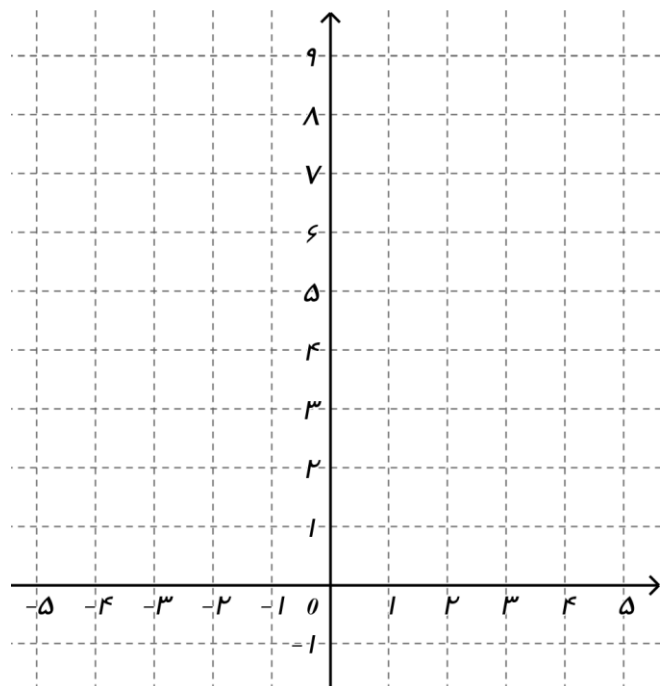
پ) $y = x^2 - 12x$

ت) $y = (x + 1)^2 - 2$

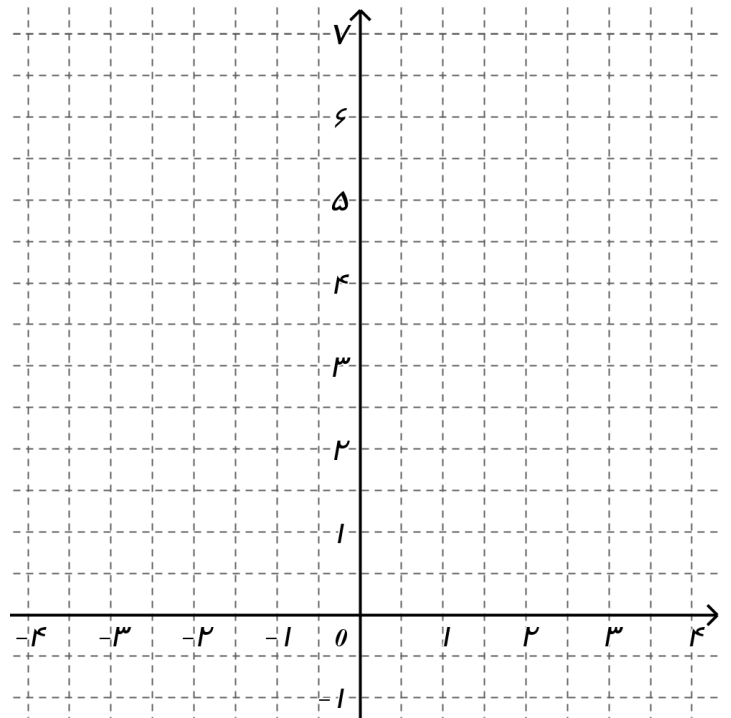
ث) $y = (x - 7)^2 + 6$

ج) $y = 2(x - 1)^2 + 1$

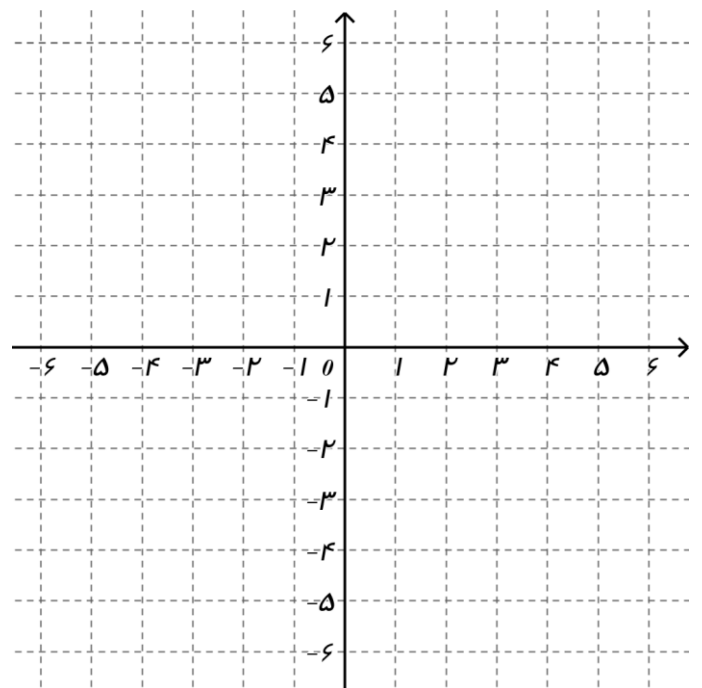
تمرین ۳۸: رأس سهمی به معادله $y = 2(x - 1)^2 + 1$ را مشخص کنید و سپس نمودار آن را رسم کنید.



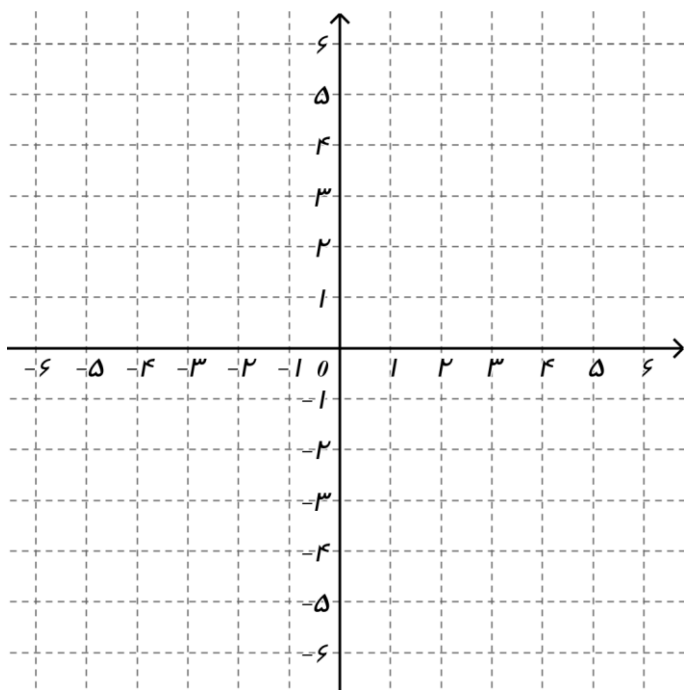
تمرین ۳۹: رأس سهمی به معادله $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 5$ را مشخص کنید و سپس نمودار آن را رسم کنید.



تمرین ۴۰: نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



تمرین ۴۱: نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = x^2 - 4x - 2$ را رسم کنید. و مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید.



تمرین ۴۲: تابع درآمد یک شرکت به صورت $R(x) = 21x - x^2$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = 20 + x$ است:

الف) تابع سود این شرکت را بنویسید.

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = (21x - x^2) - (20 + x) = 21x - x^2 - 20 - x = -x^2 + 20x - 20$$

$$P(x) = -x^2 + 20x - 20$$

ب) چند واحد کالا تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

$$P(x) = -x^2 + 20x - 20 \Rightarrow x_0 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_0 = \frac{-20}{2(-1)} = \frac{-20}{-2} = 10$$

۱۰ عدد کالا باید بفروشد تا بیشترین سود را ببرد.

پ) ماکزیم سود این شرکت چقدر است؟

$$P(x) = -x^2 + 20x - 20 \Rightarrow P(10) = -(10)^2 + 20(10) - 20 = -100 + 200 - 20 = 80$$

بیشترین سود ۸۰ واحد است.

تمرین ۴۳: قیمت کلایی ۱۰۰ تومان می باشد. اگر کارگاهی روزانه x کالا تولید و به فروش برساند و نیز معادله هزینه به

صورت $C(x) = x^2 + 20x + 800$ باشد.

الف) تابع سود را بدست آورید.

ب) چند واحد کالا تولید شود تا سود ماکزیمم شود؟

پ) بیشترین سود این شرکت چقدر است؟

تمرین ۴۴: تابع درآمد به صورت $R(x) = 15x - x^2$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = 16 + 3x$ است:

الف) تابع سود این شرکت را بنویسید.

ب) چند واحد کالا تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) ماکزیمم سود این شرکت چقدر است؟

تمرین ۴۵: در یک کارگاه جعبه هایی تولید می شود اگر هر یک از این جعبه ها ۷۰۰ تومان بفروشند و تابع هزینه آن برابر

$$C(x) = 50x^2 - 2100x + 3000 \text{ است:}$$

(الف) تابع سود این شرکت را بنویسید.

(ب) چند واحد کالا تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

(پ) ماکزیم سود این شرکت چقدر است؟



تمرین ۴۶: محیط مستطیلی ۶۰ متر است، طول و عرض آن را طوری تعیین کنید که مقدار مساحت آن ماکزیم شود.

حل: $x =$ طول مستطیل $w =$ عرض مستطیل

$$2(x+w) = 60 \Rightarrow x+w=30 \Rightarrow w=30-x$$

$$S(x) = x \times w \Rightarrow S(x) = x \times (30-x) \Rightarrow S(x) = 30x - x^2$$

$$S(x) = 30x - x^2 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-30}{2(-1)} = \frac{-30}{-2} = 15$$

$$w = 30 - x \Rightarrow w = 30 - 15 = 15$$

تمرین ۴۷: اگر داشته باشیم $2x + y = 40$ مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم باشد.

حل:

$$2x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - 2x$$

$$P(x) = x \times y \Rightarrow P(x) = x \times (40 - 2x) \Rightarrow P(x) = 40x - 2x^2$$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-40}{2(-2)} = \frac{-40}{-4} = 10$$

$$y = 40 - 2x \Rightarrow y = 40 - 2(10) = 40 - 20 = 20$$

تمرین ۴۸: اگر داشته باشیم $4x + 3y = 240$ مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم باشد.