جبر و معادله

فصل ۱

آرامگاه دانیال نبی در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

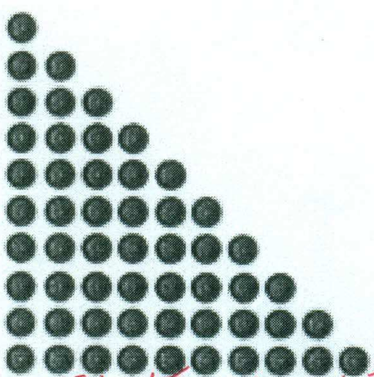
درس ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعهٔ اعداد طبیعی ... , ۳ , ۲ , ۱ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی به‌دست آوردن مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبهٔ مجموع جملات هر دنبالهٔ حسابی برسیم.

فعالیت

تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چندتاست؟

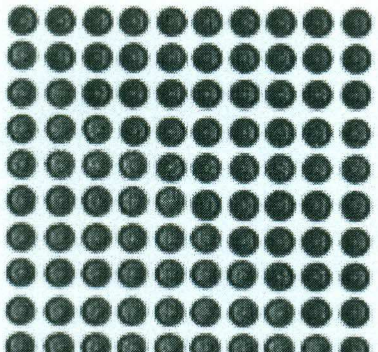


۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با :

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰= ۵۵$$

۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.

در این شکل تعداد ردیف‌ها ۱۰ و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف میانگین شماره ردیف در شکل فوق و ۱۰ در شکل پایین است، پس تعداد کل دگمه‌ها برابر ۱۰۰ است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس :



$$\text{تعداد دگمه‌های قرمز} = \frac{\text{تعداد کل دگمه‌ها}}{۲} = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۵$$

۳ برای محاسبهٔ مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots\ldots + (n-۱) + n$$

$$S = n + (n-۱) + \ldots + ۳ + ۲ + ۱$$

$$۲S = \underbrace{(n+۱) + (n+۱) + \ldots + (n+۱) + (n+۱)}_{n \text{ تا}}$$

$$۲S = n(n+۱)$$

$$S = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

ابتدا اعداد طبیعی ۱ تا n را نوشته به ترتیب صعودی سپس n تا ۱ را زیر مجموع ۱ تا n قرار می دهیم طوری که مجموع هر دو عدد زیر هم $n+1$ می شود و چون که کل اعداد n تا هستند حاصل ها n تا $n+1$ داریم پس $۲S = n(n+1)$ می شود

$$۱+۲+۳+.....+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

مثال : روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به‌دست آورید.

حل : نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به‌غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با :

$$۱۹+۱۸+۱۷+...+۲+۱=\frac{۱۹}{۲}(۱+۱۹)=۱۹۰$$

تذکر : این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

فعالیت

دنبالهٔ حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a\,,\,a+d\,,\,a+۲d\,,\,...\,,\,\,a+(n-۲)d\,\,,\,\,a+(n-۱)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$S_n=a+(a+d)+(a+۲d)+...+(a+(n-۲)d)+(a+(n-۱)d)$$

۱ حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $۲S_n$ را به‌دست آورید. نتیجه خواهید گرفت :

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

$$S=a+(a+d)+\;---\;+a+(n-۱)d$$
$$S=a+(n-۱)d+a+(n-۲)d+\cdots+a$$
$$۲S=\underbrace{(۲a+(n-۱)d)+(۲a+(n-۱)d)+\cdots+۲a+(n-۱)d}_{n\text{ تا}}$$
$$۲S=n[۲a+(n-۱)d]$$

مثال : مجموع صد جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی ......,۱۱,۱۵ ,۷ ,۳ را به‌دست آورید.

حل : جملهٔ اول ۳، تعداد جمله‌ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت :

$$S_{۱۰۰}=\frac{۱۰۰}{۲}\big[(۲\times۳)+(۹۹\times۴)\big]=۵۰\times۴۰۲=۲۰۱۰۰$$

خواندنی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایقی را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود، ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. زمانی‌که گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود، روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست مداد و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید : چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد : حل شد! معلم با تعجب گفت : این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت : خیلی هم آسان بود. سپس گفت : اول چنین نوشتم :

$$۱+۲+۳+...+۹۸+۹۹+۱۰۰$$

و بعد چنین :

$$۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷+...+۳+۲+۱$$

و جفت جفت از اول تا آخر جمع کردم :

$$۱۰۱+۱۰۱+۱۰۱+...+۱۰۱+۱۰۱+۱۰۱+۱۰۱$$

بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ به‌دست آوردم که حاصل‌ضرب آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل‌جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

کار در کلاس

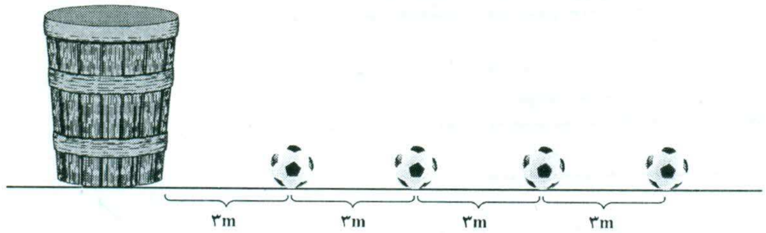
۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به‌ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه : $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

بنابه صفحه قبل $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{n}{2}[a+\underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}] = \frac{n}{2}[a+a_n]$

۲ مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به‌دست آورید.

$\underset{a}{12}, 16, 20, \ldots, \underset{a_n}{96}$ $\quad n = \frac{96-12}{4} = 22 \quad S_n = \frac{22 \times [12+96]}{2} = 1188$

مثال : در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



حل : دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت ۶=۳+۳ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم :

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر را به‌دست آورید. $(a \neq 0)$

$a, a, a, \ldots, a$ $\quad q = 1 \quad S_n = na$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. $(q \neq 1)$

$a, aq, aq^2, \ldots$

الف) جمله nام دنباله چیست؟ $a_n = aq^{n-1}$

ب) فرض می‌کنیم مجموع n جملهٔ اولیه دنباله هندسی S_n باشد :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم :

$$S_n q = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n$$

اگر $S_n - S_n q$ را تشکیل دهیم، پس از ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم :

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

کار در کلاس

مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله هندسی زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$$

$S_{10} = \frac{1}{8} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^{10}}{1-\frac{1}{4}} \simeq$ ۰/۲۴۹۷۵۵

مثال : برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیویته لایه‌های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هریک از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک دست کم تا ۹۷ درصد کاهش یابد؟

حل : اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می‌کند ($\frac{1}{4}$) و... بدین ترتیب دنباله‌ای از اعداد به‌دست می‌آید :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا حاصل حداقل ۹۷ درصد شود.

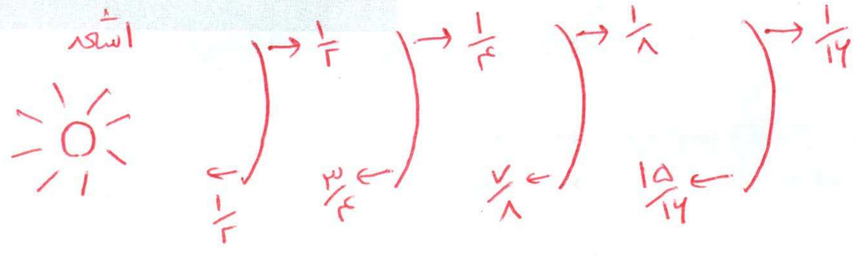
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \simeq 33.3$$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $64 = 2^6$ درمی‌یابیم که حداقل مقدار n برای برقراری نامساوی فوق برابر با ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل شش تا باشد.

روش تصویری



خواندنی

در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی، به بررسی دنباله‌های ریاضی پرداخته‌اند. از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود «آثار الباقیه عن‌القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع یک دنباله هندسی است که جملهٔ اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می باشد، حل کرده است. او با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را عدد ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ به‌دست آورده است. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد؛ وقتی مخترع شطرنج، بازی خود را به شاه عرضه کرد، شاه از او خواست پاداشی بخواهد. دانشمند پاسخ داد : برای خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم دو دانهٔ گندم و برای خانه سوم چهار دانهٔ گندم و همین طور برای هر خانه دو برابر خانهٔ پیش از آن گندم بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسد. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند. قبول کردند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا کردند. سپس معلوم شد که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم به‌دست نمی‌آید! ابوریحان بیرونی با استدلال ریاضی به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $2^{64}-1$ دانه است. او برای محسوس کردن این عدد می‌گوید : در سطح کره زمین ۲۳۰۵ کوه را در نظر می‌گیریم، اگر از هر کوه ۱۰۰۰۰ رود خارج شود در طول هر رودخانه ۱۰۰۰ قطار قاطر حرکت کنند. و هر قطار شامل ۱۰۰۰ قاطر باشد و همراه هر قاطر ۸ کیسه گندم قرار داده باشیم که در هر کیسه ۱۰۰۰۰ دانه گندم باشد، باز هم عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج کوچک‌تر خواهد بود.

سوال ۱ ←

$$\frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64}-1 = 18446744073709551615$$

کار در کلاس

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دوبرابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

$(1+2+4+8+\cdots+2^{63})$ گرم

الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟[1]

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد. چون ۱۰۰۰ میلیارد تن برابر است با 10^{18} گرم

$a=1 \quad q=2 \quad n=64 \quad S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \to 1\left(\frac{1-2^{64}}{1-2}\right) = S_{64}$

$S_{64} = 2^{64}-1 > 2^{63} = (2^7)^9 > 100^9 = 10^{18}$

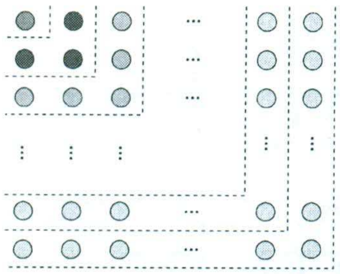
تمرین

۱ در دنباله حسابی ... , ۱۱ , ۸ , ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$a=5 \quad S_n > 493 \quad \frac{n}{2}[10+3(n-1)] > 493 \quad 3n^2+7n-986>0$

$d=3 \quad n_1 = \frac{-7+109}{6} \Rightarrow n \geq 17 \to n=18$

$\Delta = 11881 \quad n_2 = \frac{-7-109}{6}$ غ ق ق



۲ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

صفحه بعد

۳ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟ صفحه بعد

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید. صفحه بعد

۵ جمله عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟ صفحه بعد

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ صفحه بعد

۷ برای عدد حقیقی a $(a \neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n-1 = (a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$$

۱ـ این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. (ترجمه میزان الحکمة، ص ۷۷)

سوال ۲ قسمت ب)

$۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱)=n^۲$

$a=۱ \quad d=۲ \quad n=n \qquad S_n=\frac{n}{۲}\left[۲a+(n-۱)d\right]$

$S_n=\frac{n}{۲}\left[۲+(n-۱)\times ۲\right]=\frac{n}{۲}\times ۲n=n^۲$

سوال ۳

$۱۰۲,\ ۱۰۸,\ \dots,\ ۹۹۸ \qquad a=۱۰۲ \qquad a_n=۹۹۶ \qquad n=\frac{۹۹۶-۱۰۲}{۶}=۱۴۹+۱=۱۵۰$

$S_n=\frac{n}{۲}\left[۲a+(n-۱)d\right]=\frac{۱۵۰}{۲}\left[۲\times ۱۰۲+(۱۵۰-۱)\times ۶\right]=۸۲۳۵۵$

سوال ۴

$S_n=\frac{n}{۲}\left[۲a+(n-۱)d\right]$

$۱۵۰+۱۳۵=\frac{۲۰}{۲}\left[۲a+۱۹d\right]\longrightarrow \boxed{۲۸۵=۲۰a+۱۹۰d}\rightarrow ۴a+۳۸d=۵۷$

جملات فرد $a+a+۲d+a+۴d+\dots+a+۱۸d=۱۳۵$

$\boxed{۱۰a+۹۰d=۱۳۵}\longrightarrow ۲a+۱۸d=۲۷$

$-۲\begin{cases}۴a+۳۸d=۵۷\\ ۲a+۱۸d=۲۷\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\cancel{۴a}+۳۸d=۵۷\\ -\cancel{۴a}-۳۶d=-۵۴\end{cases}$

$۲d=۳ \qquad \underline{d=۱٫۵}$

$۲a+۱۸\underset{\downarrow}{d}=۲۷ \qquad ۲a+۲۷=۲۷ \quad ۲a=۰ \qquad \underline{a=۰}$

$\quad\ \ ۱٫۵$

سوال ۵

$a_n=۲^{n-۱} \qquad ۱,\ ۲,\ ۴,\ ۸,\ \dots$

$S_n=a\left[\frac{۱-q^n}{۱-q}\right] \qquad S_n=۲۵۵ \qquad \left[\frac{۱-۲^n}{-۱}\right]=۲۵۵$

$۲^n-۱=۲۵۵ \qquad ۲^n=۲۵۶$

$۲^n=۲^۸$

$n=۸$

سوال ۶

$\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۴},\ \frac{۱}{۸},\ \dots \qquad S_n=a\left[\frac{۱-q^n}{۱-q}\right]$

$S_n>\frac{۹۹}{۱۰۰} \quad \cancel{\frac{۱}{۲}}\left[\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{\cancel{\frac{۱}{۲}}}\right]>\frac{۹۹}{۱۰۰} \qquad ۱-(\tfrac{۱}{۲})^n>\frac{۹۹}{۱۰۰}$

$(\frac{۱}{۲})^n<\frac{۱}{۱۰۰}\longrightarrow ۲^n>۱۰۰ \quad n_{\text{حداقل}}=۷$

سوال ۷

$۱+a+a^۲+\dots+a^{n-۱}= \qquad \begin{matrix}a=۱\\ q=a\\ n=n\end{matrix} \qquad S_n=a\left[\frac{۱-q^n}{۱-q}\right]$

$S_n=۱\left[\frac{۱-a^n}{۱-a}\right]\longrightarrow ۱+a+a^۲+\dots+a^{n-۱}=\frac{۱-a^n}{۱-a}$

$\longrightarrow ۱-a^n=(۱-a)(۱+a+a^۲+\dots+a^{n-۱})$

درس ۲

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به‌صورت $ax^۲+bx+c=۰$ است ($a\neq۰$) که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطهٔ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ به‌دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کار در کلاس

$۳x^۲-۵x+۲=۰$
$a \quad b \quad c \qquad \Delta=b^۲-۴ac=۲۵-۴\times۳\times۲=۱$

۱ معادله $۳x^۲=۵x-۲$ را حل کنید.

$x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۵+۱}{۶}=۱$

$x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۵-۱}{۶}=\dfrac{۴}{۶}=\dfrac{۲}{۳}$

۲ اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادله $۴x^۲-mx-۷=۰$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

$x=-۱ \to ۴-m(-۱)-۷=۰ \qquad m-۳=۰ \qquad m=۳$

$۴x^۲-۳x-۷=۰$

$a=۴ \quad b=-۳ \quad c=-۷ \qquad \Delta=۹-۴(۴)(-۷)=۹+۱۱۲=۱۲۱$

$x_۱=\dfrac{۳+۱۱}{۸}=\dfrac{۱۴}{۸}=\dfrac{۷}{۴}$

$x_۲=\dfrac{۳-۱۱}{۸}=-۱$

پل پارک جزیره (اهواز ـ استان خوزستان)

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$\frac{c}{a}$	$\frac{-b}{a}$	c	b	a	ضرب ریشه‌ها (P)	جمع ریشه‌ها (S)	مقدار هر ریشه x_1 و x_2	$ax^2+bx+c=0$
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	-5	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$, 1	$3x^2-5x+2=0$
$\frac{-7}{4}$	$\frac{3}{4}$	-7	-3	4	$\frac{-7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$, -1	$4x^2-3x-7=0$
1	2	1	-2	1	1	2	1 , 1	$x^2-2x+1=0$
$-\frac{8}{5}$	$-\frac{6}{5}$	-8	6	5	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$, -2	$5x^2+6x-8=0$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

جمع ریشه‌ها $= -\frac{b}{a}$

ب) در جدول بالا بین حاصل‌ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

ضرب ریشه‌ها $= \frac{c}{a}$

۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، نشان دهید:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dots=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_1x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$b^2-\Delta=\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac=4ac \qquad \frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد این روابط برقرار است.

$$S=\frac{-b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

مثال: اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $4x^2-mx-7=0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها به‌دست آورید.

حل: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$P=x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow(-1)x_2=\frac{-7}{4}\Rightarrow x_2=\frac{7}{4}$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}\Rightarrow -1+\frac{7}{4}=\frac{m}{4}\Rightarrow m=3$$

فعالیت

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و ۳- باشند راه حل زیر ارائه شده است.
مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x=۲ \\ x=-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \\ x+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow (x-۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

۲ اگر $x_۱=\alpha$ و $x_۲=\beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} x=\alpha \\ x=\beta \end{cases} \to \begin{cases} (x-\alpha)=0 \\ (x-\beta)=0 \end{cases} \Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}x+\underbrace{\alpha\beta}_{P}=0$$

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^۲-Sx+P=۰$ هستند.

کار در کلاس

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ باشند.

$S = ۲-\cancel{\sqrt{۳}}+۲+\cancel{\sqrt{۳}} = ۴$

$P = (۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳}) = ۴-۳ = ۱$

$x^2-Sx+P=0 \qquad x^2-۴x+۱=0$

مثال : محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌مترمربع است. ابعاد مستطیل را به‌دست آورید.

حل : فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ باشند، داریم :

$$x_۱+x_۲=\frac{۳۳}{۲} \quad , \quad x_۱x_۲=۶۵$$

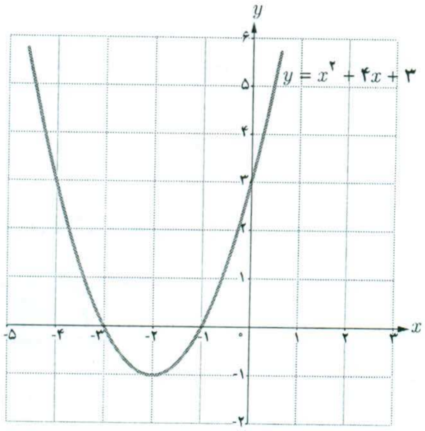
معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S=\frac{۳۳}{۲}$ و $P=۶۵$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۳۳}{۲}x+۶۵=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۳۳x+۱۳۰=۰$$

از حل معادله اخیر $x_۱=۱۰$ یا $x_۲=\frac{۱۳}{۲}$ به‌دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به‌ترتیب ۱۰ و $\frac{۱۳}{۲}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت



نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^2+4x+3$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

۱ معادله $f(x)=0$ را حل کنید و جواب‌های آن را به‌دست آورید.

$x^2+4x+3=0 \quad (x+1)(x+3)=0$

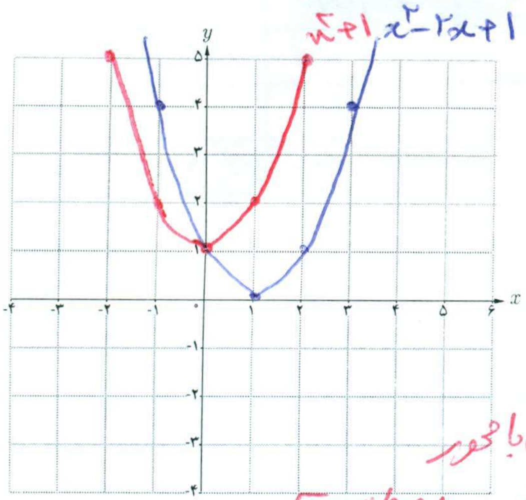
$\begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$

۲ محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x)=0$ دارد؟ محل تلاقی نمودار با محور x ها دقیقاً جواب‌های معادله $f(x)=0$ هستند

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

کار در کلاس



۱ نمودار سهمی‌های $f(x)=x^2-2x+1$ و $g(x)=x^2+1$ را رسم کنید.

۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x)=0$ و $g(x)=0$ چه می‌توان گفت؟

معادله $g(x)=0$ جواب ندارد چون محل برخوردی با محور xها ندارد و معادله $f(x)=0$ چون مماس بر محور x هاست تنها یک جواب دارد

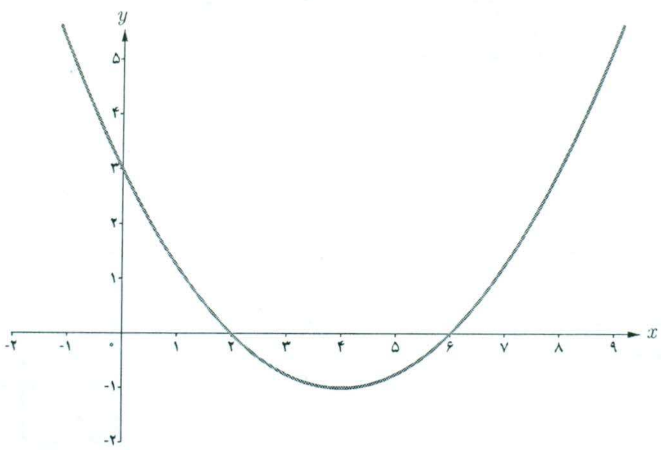
مثال : اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند نشان دهید

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

حل : از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و داریم :

$$a(x - x')(x - x'') = a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'')$$
$$= a(x^2 - Sx + p)$$
$$= a[x^2 - (\frac{-b}{a})x + \frac{c}{a}]$$
$$= ax^2 + bx + c$$

مثال : اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به‌صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول : از آنجا که $x' = 2$ و $x'' = 6$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که درمثال قبل آمده است می‌توان نوشت : $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند و داریم.

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به‌صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

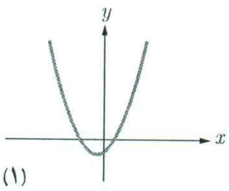
روش دوم : از آنجا که $f(0) = 3$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$ ؛ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

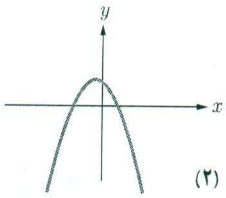
$$\frac{c}{a} = 12 \Rightarrow \frac{3}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

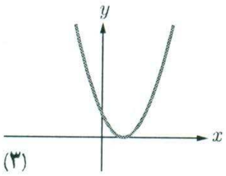
از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a} = 8$ و $a = \frac{1}{4}$ پس $b = -2$ و در نتیجه $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

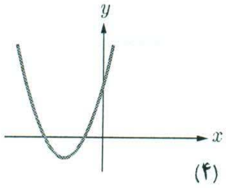
کار در کلاس

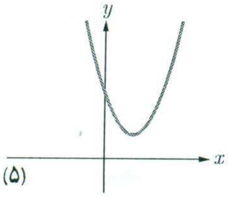
هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

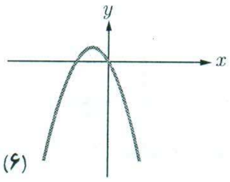

(۱)

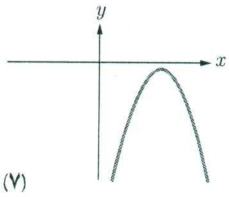

(۲)


(۳)

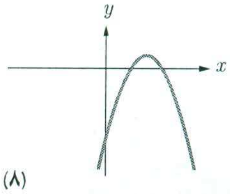

(۴)

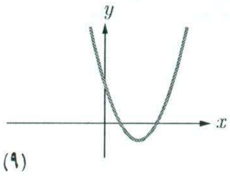

(۵)


(۶)


(۷)

$-\frac{b}{2a}>0 \quad -b\not< \cdot \; b\not>0$


(۸)


(۹)

۱ با توجه به معادله $f(x)=0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دو ریشهٔ مثبت دارد. (**شکل‌های ۸ و ۹**)

ب) دو ریشهٔ منفی دارد. (۴)

پ) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (۱ و ۲)

ت) ریشه ندارد. (۵ و ۷)

ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (۷)

ج) یک ریشه دارد. (۳)

چ) حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است. (۳، ۸، ۹)

ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. (۱، ۲، ۴، ۶)

۲ با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

شماره شکل / ویژگی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۰	۲	۲
علامت a	+	−	+	+	+	−	−	−	+
علامت b	+	−	−	+	−	−	+	+	−
علامت c	−	+	+	+	+	۰	−	−	+

تذکر : ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور xها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور yها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c>0$ و طول نقطه مینیمم تابع ، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a}>0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b<0$.

$(x-1)^2 = \frac{1}{2}x+1$

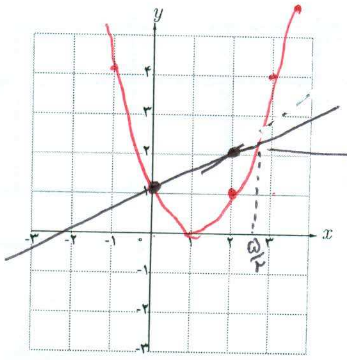
$x^2 - 2x + \cancel{1} = \frac{1}{2}x + \cancel{1}$

$x^2 - \frac{5}{2}x = 0$

$x(x - \frac{5}{2}) = 0 \to x = 0 \;,\; x = \frac{5}{2}$

روش هندسی حل معادلات

فعالیت



۱ معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$ را حل کنید. در بالا راه حل ارائه شده

۲ نمودار دو تابع $y=(x-1)^2$ و $y=\frac{1}{2}x+1$ را رسم کنید.

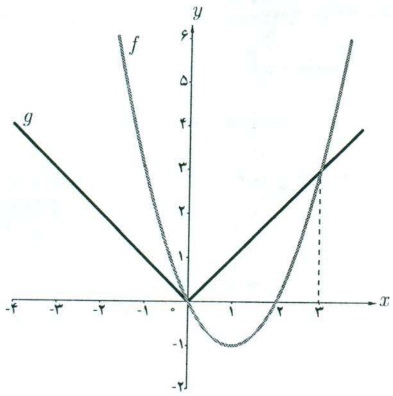
y هر دو تابع در ازای $x=\frac{5}{2}$ برابر $\frac{9}{4}$ می‌شود

۳ چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟ ریشه‌های معادله دقیقاً همان طول‌های نقاط تلاقی نمودارها هستند

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامیم.

مثال : به روش هندسی معادله $|x|=x^2-2x$ را حل کنید.

حل : با فرض $f(x)=x^2-2x$ و $g(x)=|x|$، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم :



با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت‌اند از : $x=0$, $x=3$
که جواب‌های معادله $|x|=x^2-2x$ می‌باشند.

✤ **مثال :** اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

✤ **حل :** از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می‌توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به‌صورت $x-2$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می‌یابیم. می‌توان نوشت $p(x)=(x-2)(x^2+x-2)$. آنگاه از حل معادله $p(x)=0$ داریم :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -x^2 & -4x & +4 & x-2 \\ \hline - & + & & & x^2+x-2 \\ x^3 & -2x^2 & & & \\ \hline & x^2 & -4x & & \\ & - & + & & \\ & x^2 & -2x & & \\ \hline & & -2x & +4 & \\ & & + & - & \\ & & -2x & +4 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

صفرهای تابع p برابر -2 , 2 , 1 می‌باشند.

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-x-2 & x+2 \\ \hline -x^3 \mp 2x^2 & x^2-1 \\ -x-2 & \\ +x+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2-1 \rightarrow (x-1)(x+1)=0 \rightarrow x=1 \;,\; x=-1$

سایر صفرها

کار در کلاس

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید.

$x=-2$

$0=-8+4k+\cancel{2}-\cancel{2}$

$k=+2$

✤ **مثال :** صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=(x^2-1)^2+(x^2-1)-2$ را به‌دست آورید.

✤ **حل :** هر چند معادله $f(x)=0$ از درجهٔ چهار است امّا می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t=x^2-1$، معادله به‌صورت $t^2+t-2=0$ در می‌آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t=x^2-1$ مقادیر x را می‌یابیم.

$$t^2+t-2=0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } t=-2$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=-2 \Rightarrow x^2-1=-2 \Rightarrow x^2=-1 \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می‌باشد.

> برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییرِ متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

کار در کلاس

همهٔ صفرهای تابع $f(x)=x^4-10x^2+16$ را به‌دست آورید.

$x^4-10x^2+16=0 \qquad x^2=t$

$t^2-10t+16=0$

$(t-8)(t-2)=0$

$t=8 \quad x^2=8 \quad x=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

$t=2 \quad x^2=2 \quad x=\pm\sqrt{2}$

الف-۱) $S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ $\quad P=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

$x^2-Sx+P=0 \quad x^2-1x+\frac{2}{9}=0$

ب) $\alpha , 2\alpha \quad S=3\alpha \quad P=2\alpha^2$

$x^2-Sx+P=0 \quad x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$

مسئله بی‌شمار جواب دارد

تمرین

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. بالای صفحه

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.

$y=a(x-2)^2$

$\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad -2=4a \quad a=-\frac{1}{2}$

$p(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2=-\frac{1}{2}x^2+2x-2$

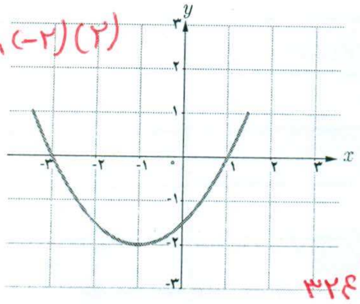
$y=a(x-1)(x+3)$

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \quad -2=a(-2)(2)$

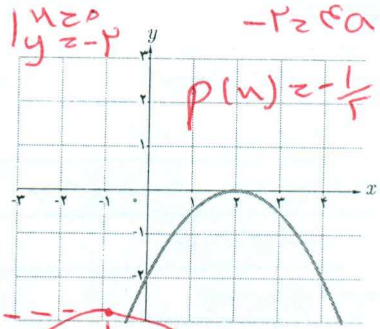
$a=\frac{1}{2}$

$p(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$

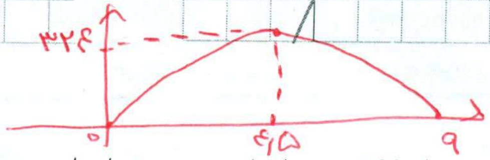
$p(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$



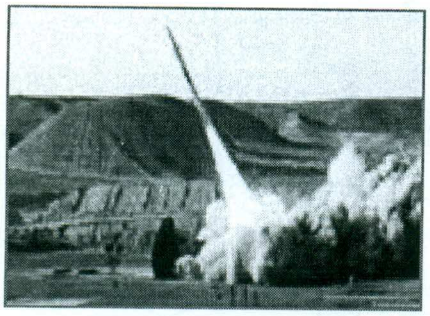
(ب)



(الف)



نمودار تمرین ۴



۳ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک (h) در زمان t، از رابطه $h(t) = -16t^2 + 144t$ به‌دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به‌دست آورید.

$t_{max}=-\frac{b}{2a}=\frac{-144}{-32}=\frac{9}{2}$ $\quad h_{max}=-16\times\frac{81}{4}+144\times\frac{9}{2}$

$=-324+648=324$

$t(-16t+144)=0 \rightarrow t=0 , t=9$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^3 - 4x$ $\quad x(x^2-4)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x^2=4 \end{cases} \quad x=\pm 2$

ب) $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$ $\quad x(2x^2+x+3)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+x+3=0 \end{cases} \quad \Delta<0$ ریشه حقیقی ندارد

پ) $h(x) = x^4 + 3x^2 + 5 \rightarrow t^2+3t+5$ $\quad (a, b, c)$

$\Delta=9-4(1)(5)=-11$ ریشه حقیقی ندارد

۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ $\quad x^2=t \quad t^2-3t-4=0 \quad (t-4)(t+1)=0 \quad (x^2-4)(x^2+1)=0 \quad x=\pm 2$

ریشه حقیقی ندارد

ب) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$ $\rightarrow \frac{x^2}{3}-2=t$

$t^2-7t+6=0 \quad (t-1)(t-6)=0$

$t=1 \rightarrow \frac{x^2}{3}-2=1 \rightarrow \frac{x^2}{3}=3 \quad x^2=9 \quad x=\pm 3$

$t=6 \rightarrow \frac{x^2}{3}-2=6 \rightarrow \frac{x^2}{3}=8 \quad x^2=24$

$x=\pm\sqrt{24}$

پ) $(4 - x^2)^2 - (4 - x^2) = 12$

$4-x^2=t$

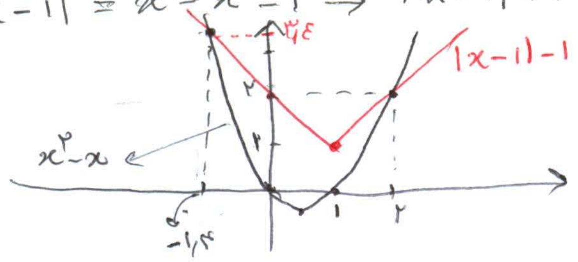
$t^2-t-15=0 \quad \Delta=61 \quad t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{61}}{2}$

$4-x^2=\frac{1+\sqrt{61}}{2} \quad x^2=4-\frac{1+\sqrt{61}}{2}=\frac{7-\sqrt{61}}{2}$

$4-x^2=\frac{1-\sqrt{61}}{2} \quad x^2=4-\frac{1-\sqrt{61}}{2}=\frac{7+\sqrt{61}}{2}$

$x=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{61}}{2}}$

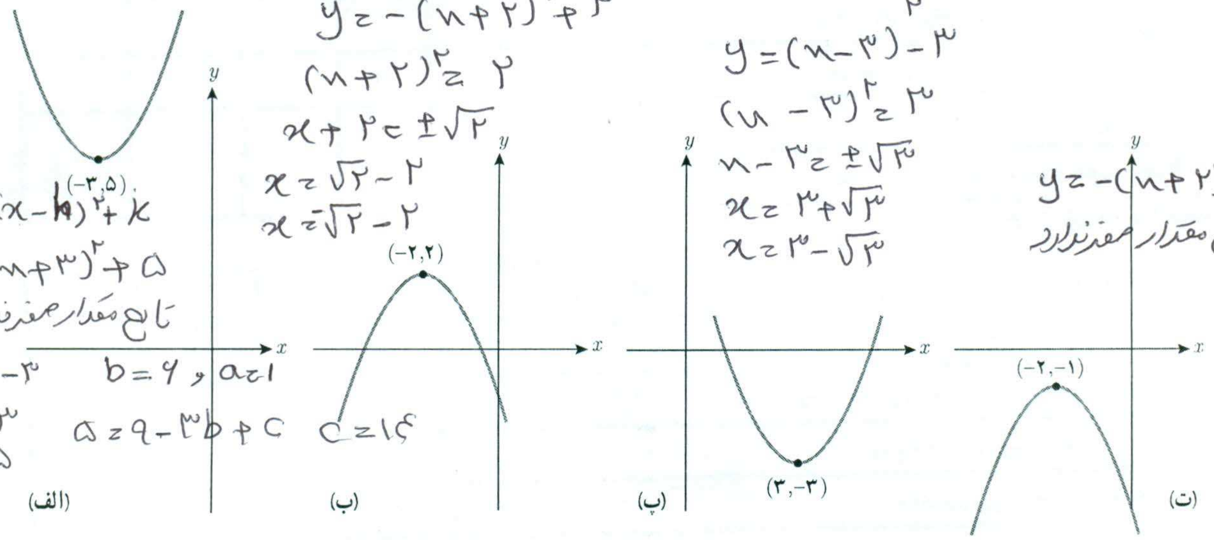
$|x-1| = x^2 - x - 1 \to |x-1|+1 = x^2 - x$ $\begin{cases} f(x) = |x-1|+1 \\ g(x) = x^2 - x \end{cases}$ -۶



معادله دارای دو ریشه می باشد یکی ۲ و دیگری تقریبا $-۱/۴$

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

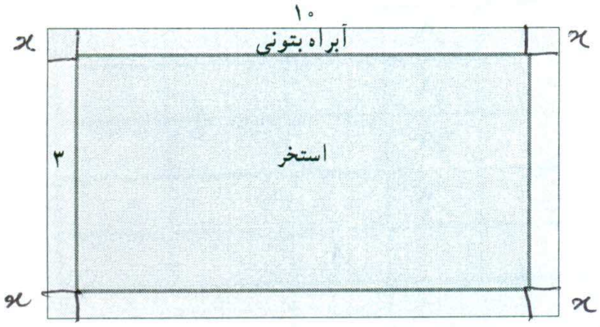


(الف)
$y = a(x-h)^2 + k$
$y = (x+3)^2 + 5$
تابع مقدار صفر ندارد
$-\frac{b}{2a} = -3$ $b = 6$, $a = 1$
$\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$ $5 = 9 - 3b + c$ $c = 14$

(ب)
$y = -(x+2)^2 + 2$
$(x+2)^2 = 2$
$x + 2 = \pm\sqrt{2}$
$x = \sqrt{2} - 2$
$x = -\sqrt{2} - 2$

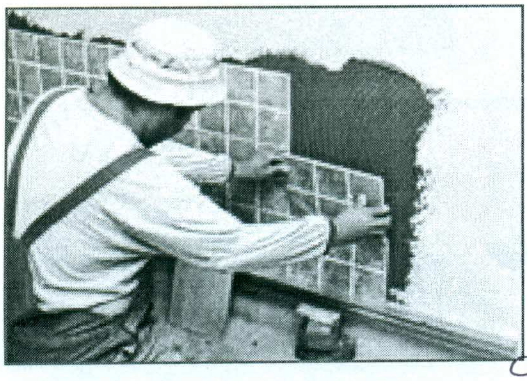
(پ)
$y = (x-3)^2 - 3$
$(x-3)^2 = 3$
$x - 3 = \pm\sqrt{3}$
$x = 3 + \sqrt{3}$
$x = 3 - \sqrt{3}$

(ت)
$y = -(x+2)^2 - 1$
تابع مقدار صفر ندارد

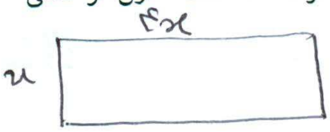


۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

$4x^2 + 20x + 6x = 14$
$4x^2 + 26x - 14 = 0$
$2x^2 + 13x - 7 = 0$
$\Delta = 169 + 56 = 225$
$x = \frac{-13+15}{4} = \frac{1}{2}$ ق ق $x = \frac{-13-15}{4} = -7$ غ ق ق



۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟



$21 m^2 = 21 \times 10^4 cm^2$
۲۰۰۰ عدد کفپوش

$S_{\text{کفپوش}} = x(4x+1)$
$S = 4x^2 + x$
$2000 S = 2000(4x^2 + x)$
$8000x^2 + 2000x = 210000$
$8x^2 + 2x - 210 = 0$
$4x^2 + x - 105 = 0$
$\Delta = 1 + 16(105) = 1681$
$x_1 = \frac{-1+41}{8} = 5$ ق ق
$x_2 = \frac{-1-41}{8} = -\frac{42}{8} = -\frac{21}{4}$

درس ۳
معادلات گویا و گنگ

معادلاتِ شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب‌نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

برای حل این مسئله سه حالت مختلف فرض می‌کنیم. ممکن است نمک به اندازه کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول : فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول ۴ درصدی چند کیلوگرم نمک وجود دارد : $۲۰۰\times\frac{۴}{۱۰۰}=۸$ کیلوگرم

حالا اگر بخواهیم برای رساندن این محلول به محلول ۷ درصدی x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم، وزن نمک x+۸ و وزن کل محلول x+۲۰۰ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{۸+x}{۲۰۰+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید ۷ درصد باشد تناسب زیر برقرار خواهد بود :

$$\frac{x+۸}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

برای حل این معادله که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $۱۰۰(۲۰۰+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$۱۰۰(x+۸)=۷(۲۰۰+x)$$

از حل این معادله خواهیم داشت : $۹۳x=۶۰۰$ و در نتیجه $x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$

بنابراین تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم نمک باید به محلول اضافه شود تا محلول ۷ درصد نمک به‌دست آید.

حالت دوم : اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم تا درصد نمک محلول خودبه‌خود به ۷ برسد. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

از حل این معادله خواهیم داشت $۷(۲۰۰-y)=۸۰۰$ و از آنجا $y=\frac{۶۰۰}{۷}$ و این بدین معنی است که کارگر باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسد.

کار در کلاس

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازهٔ کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

وزن نمک $۸+۵=۱۳$

وزن کل محلول $۲۰۰+۵=۲۰۵$ $\qquad \frac{۱۳}{۲۰۵-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$ $\qquad ۱۴۳۵-۷y=۱۳۰۰$

$y=\frac{۱۳۵}{۷}=۱۹{,}۲۹$

برای حل معادلاتِ شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

مثال : معادله $\frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}$ را حل کنید.

حل : کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $x(x^۲-۴)$ است. (چرا؟)

با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم :

$$۳x(x-۲)+۲(x^۲-۴)=x(۴x-۴)$$

$$۳x^۲-۶x+۲x^۲-۸=۴x^۲-۴x$$

$$x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=-۲$$

البته جواب $x=-۲$ مورد قبول نیست. (چرا؟) چون مخرج کسر را صفر می‌کند

۲) ابتدا با یک مسأله ساده‌تر جواب را به دست می‌آوریم مثلاً محیط زمین ۲ متر باشد سپس جواب را در ۱۶۰ ضرب می‌کنیم تا جواب مسأله اصلی به دست آید

$2L+2w=2 \rightarrow L+w=1 \rightarrow L=1-w$

$\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L} \rightarrow \frac{1-w}{w}=\frac{1}{1-w}$

$(1-w)^2=w \rightarrow w^2-3w+1=0$ $\quad w_1=\frac{3+\sqrt5}{2}$ غ ق $\quad w_2=\frac{3-\sqrt5}{2}$ ق ق

$L=1-w=1-\frac{3-\sqrt5}{2}=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

عرض $160\times\frac{3-\sqrt5}{2}=240-80\sqrt5$

طول $160\times\frac{-1+\sqrt5}{2}=-80+80\sqrt5$

کار در کلاس

۱ معادله $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}=3$ را حل کنید.

ابتدا دو طرف در $(x-2)^2$ ضرب می‌کنیم

$1+2(x-2)=3(x-2)^2 \rightarrow 1+2x-4=3x^2-12x+12$

$3x^2-14x+15=0 \quad \frac{1}{3}(3x-9)(3x-5)=0$

$3x=9 \quad x=3$ ق ق

$3x=5 \quad x=\frac{5}{3}$ ق ق

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L}$
آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.
اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

بالای صفحه

خواندنی

در ریاضیات هنگامی نسبت طلایی پدید می‌آید که نسبت بخش بزرگ‌تر به بخش کوچک‌تر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگ‌تر باشد.

تعبیر هندسی آن چنین است. طول مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طولش باشد.

مصریان سال‌ها قبل از میلاد از این نسبت آگاه بودند و آن را در ساخت اهرام رعایت کرده‌اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان نیز این نسبت را دارا هستند.

روان‌شناسان بر این باورند که زیباترین مستطیل به چشم انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه چشم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم زیبا می‌آید.

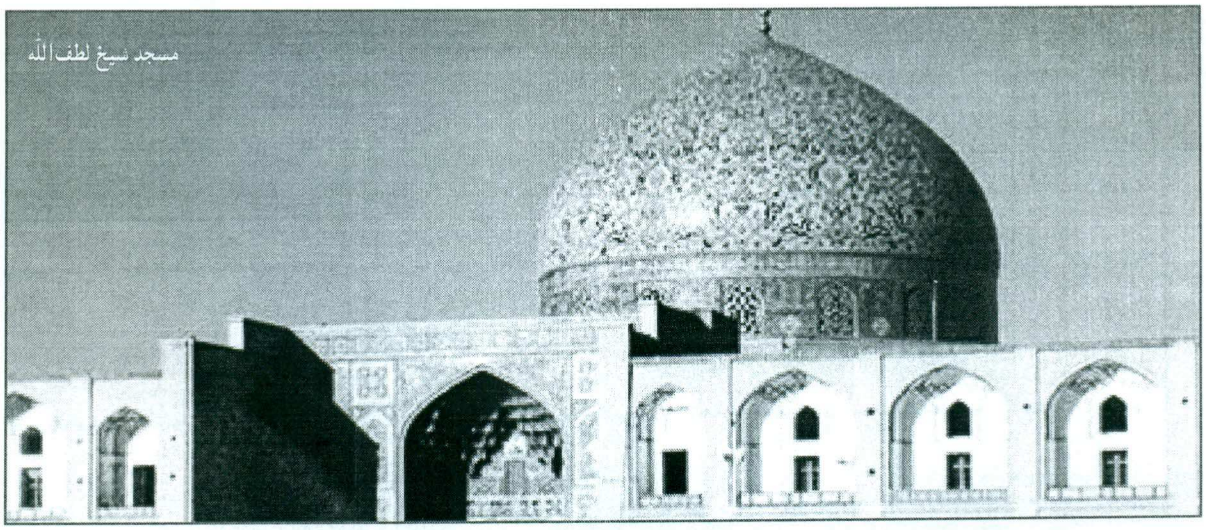
در ساخت برج میدان آزادی تهران به ارتفاع ۶۲ و عرض ۴۲ متر نسبت طلایی تا حد زیادی رعایت شده است.

کتیبهٔ بیستون از دوره هخامنشی در کرمانشاه به طول ۵ و عرض ۳ متر به عدد طلایی نزدیک است.

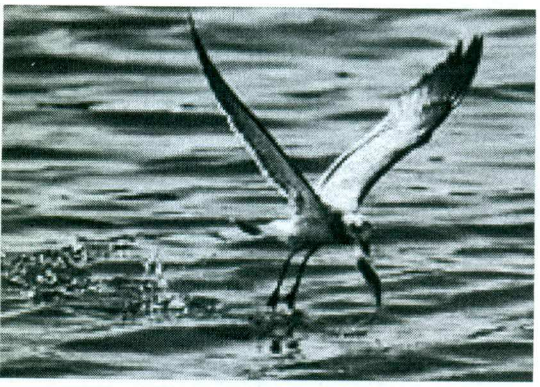
یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین‌طور نسبت ارتفاع ستون‌ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است.

در پل ورسک، ارگ بم، مقبره ابن‌سینا، میدان نقش جهان، مسجد شیخ لطف‌الله و خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جست‌وجوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می‌یابید.

منبع : مبانی هنرهای تجسمی، قسمت اول، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۲

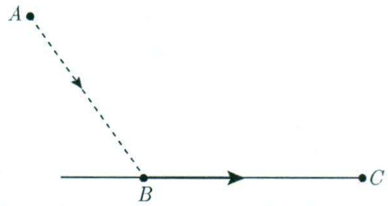

مسجد شیخ لطف‌الله

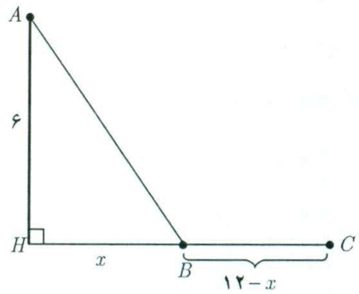
معادلات شامل عبارت‌های گنگ



طرح یک مسئله

معمولاً مرغ‌های دریایی، برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌آید سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از C باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟





حل : برای درک بهتر صورت مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ B از تصویر مرغ بر روی آب (H) را x می‌گیریم در نتیجه فاصله میان B و C برابر $12-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{36+x^2}$ می‌شود.

میزان انرژی مصرف‌شده توسط مرغ دریایی برابر است با : $14\sqrt{36+x^2}+10(12-x)$

برای آنکه مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم :

$$14\sqrt{36+x^2}+120-10x=180 \Rightarrow 14\sqrt{36+x^2}=10x+60$$
$$7\sqrt{36+x^2}=5x+30$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $2x^2-25x+72=0$ می‌رسیم که از آنجا $x=8$ و $x=4/5$. در این‌صورت فاصلهٔ B تا C برابر ۴=۸−۱۲ یا ۷/۵ = ۴/۵− ۱۲ خواهد بود.

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟ $AC=\sqrt{36+144}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

آیا اقدام مرغ دریایی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟!

مقدار کالری $= 6\sqrt{5}\times 14 = 187/83$ $\quad x_{min}=6/1157$ و

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان‌رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

مثال : معادله $\sqrt{x+2} = x-4$ را حل کنید.

حل :

$$(\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2$$
$$x+2 = x^2-8x+16$$
$$x^2-9x+14=0$$
$$(x-2)(x-7)=0 \Rightarrow x=2 \text{ و } x=7$$

آزمایش جواب‌ها

$x_2 = 7 : \sqrt{7+2} \overset{?}{=} 7-4$

$3 = 3 \quad \checkmark$

جواب معادله است

$x_1 = 2 : \sqrt{2+2} \overset{?}{=} 2-4$

$2 \neq -2 \quad \times$

جواب مسئله نیست

بنابراین $x=7$ تنها جواب معادله است.

تذکر : در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به‌دست آوردن دامنه تعریف داریم :

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x \geq 4$$

کار در کلاس

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

$x+\sqrt{x} = 6 \quad \sqrt{x} = 6-x$

$(\sqrt{x})^2 = (6-x)^2$

$x = 36-12x+x^2 \quad x^2-13x+36=0 \quad (x-4)(x-9)=0 \begin{cases} x=4 \text{ قابق} \\ x=9 \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$

۲ معادله $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x} = 0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟ هنگامی مجموع دو عبارت نامنفی صفر می‌شود که هر دو صفر باشند

$\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x} = 0 \begin{cases} x^2-4=0 \quad x^2=4 \quad x=\pm 2 \\ x=0 \end{cases}$

جواب مشترک وجود نداشته در نتیجه جواب ندارد

۹)

v_1 سرعت رفت t_1 زمان رفت

v_2 سرعت بازگشت t_2 زمان برگشت

$v_2 = v_1 - ۸$ $t_1 + t_2 = ۱۷ - ۲ = ۱۵$ $t_1 = \frac{۱۴۴}{v_1}$ $t_2 = \frac{۱۴۴}{v_1 - ۸}$

$t_1 + t_2 = \frac{۱۴۴}{v_1} + \frac{۱۴۴}{v_1 - ۸} = ۱۵$ → $v_1 = ۲۴$ ق ق

→ $v_1 = -۳٫۲$ غ ق ق

$۱۴۴(v_1 - ۸) + ۱۴۴ v_1 = ۱۵ v_1 (v_1 - ۸)$

$۱۴۴ v_1 - ۸ \times ۱۴۴ + ۱۴۴ v_1 = ۱۵ v_1^۲ - ۱۵ \times ۸ v_1$

$۵ v_1^۲ - ۱۳۶ v_1 + ۳۸۴ = ۰$

$۱۵ v_1^۲ - ۴۰۸ v_1 + ۱۱۵۲ = ۰$ → $۵ v_1^۲ - ۱۳۶ v_1 + ۳۸۴ = ۰$ صفحه بعد

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{۶}{x} = ۲ + \frac{x-۳}{x+۱}$

۲ $\frac{P}{۲-P} + \frac{۲}{P} = \frac{-۳}{۲}$

۳ $\frac{۳y+۵}{y^۲+۵y} + \frac{y+۴}{y+۵} = \frac{y+۱}{y}$

۴ $۲\sqrt{x} = \sqrt{۳x+۴}$

۵ $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} = ۱ - x$

۶ $\frac{۵}{\sqrt{x}+۲} = ۲ - \frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$

۷ $\sqrt{x+۳} + \sqrt{۳x+۱} = ۴$

x قیمت
y تعداد

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

$xy = ۱۲۰$ $(x-۱)(y+۴) = ۱۲۰$ $۱۲۰ + ۴x - y - ۴ = ۱۲۰$ $y = ۴x - ۴$

$\begin{cases} xy = ۱۲۰ \\ y = ۴x - ۴ \end{cases}$ $x(۴x - ۴) = ۱۲۰$ $۴x^۲ - ۴x - ۱۲۰ = ۰$ $x^۲ - x - ۳۰ = ۰$ $\begin{cases} x = ۶ & \text{ق ق} \\ x = -۵ & \text{غ ق ق} \end{cases}$

۶۰۰۰ قیمت قبل تخفیف

۹ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟ بالای صفحه

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

رودخانه اروند (استان خوزستان)

$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۱۵} = \frac{۱}{۱۸}$ $\begin{cases} x = ۴۵ \\ x = ۶ \end{cases}$ $x - ۱۵ = ۳۰$ $x - ۱۵ = -۹$ غ ق ق   ۱۰)

$۱۸(x-۱۵) + ۱۸x = x(x-۱۵)$

$x^۲ - ۵۱x + ۲۷۰ = ۰$

$(x-۴۵)(x-۶) = ۰$

1) $\frac{6}{x} = 2 + \frac{x}{x+1} \xrightarrow{x(x+1)} 6(x+1) = 2x(x+1) + x(x)$

$6x + 6 = 2x^2 + 2x + x^2 \longrightarrow 3x^2 - 4x - 6 = 0 \qquad \Delta = 16 + 72 = 88$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 2\sqrt{22}}{6} \quad \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{22}}{3} & \text{ق ق} \\ x = \frac{2-\sqrt{22}}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$

2) $\frac{p}{2-p} + \frac{2}{p} = 5 \xrightarrow{p(2-p)} p(p) + 2(2-p) = 5p(2-p)$

$\rightarrow p^2 + 4 - 2p = 10p - 5p^2 \rightarrow 6p^2 - 12p + 4 = 0 \rightarrow 3p^2 - 6p + 2 = 0$

$\Delta = 36 - 24 = 12 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} \quad \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} & \text{ق ق} \\ x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$

3) $\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$

$\xrightarrow{y(y+5)} 3y + 5 + y(y+4) = (y+1)(y+5)$

$3y + 5 + y^2 + 4y = y^2 + 6y + 5 \longrightarrow y = 0$ غ ق ق

4) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \rightarrow (2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x+4})^2 \rightarrow 4x = 3x + 4 \quad x = 4$ ق ق

$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1 - x \longrightarrow (1+\sqrt{x})(1-x) = 1 - \sqrt{x}$

$(1-x) = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$

$(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) = 0$

$(1-\sqrt{x})\left[(1+\sqrt{x})^2 - 1\right] = 0 \quad \begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 & \sqrt{x} = 1 \quad x = 1 \text{ ق ق} \\ (1+\sqrt{x})^2 - 1 = 0 & (1+\sqrt{x})^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 1+\sqrt{x} = 1 \longrightarrow \sqrt{x} = 0 \quad x = 0 \\ 1+\sqrt{x} = -1 \longrightarrow \sqrt{x} = -2 \end{cases}$ جواب حقیقی ندارد

6) $\frac{1}{\sqrt{x}+2} = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \xrightarrow{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$\cancel{\sqrt{x}} - 2 = 2(x-4) + \cancel{\sqrt{x}} + 2 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$ ق ق

1) $3\sqrt{3x+1} = 8 - \sqrt{x+3} \qquad (3\sqrt{3x+1})^2 = (8 - \sqrt{x+3})^2$

$9(3x+1) = 64 - 16\sqrt{x+3} + x + 3 \rightarrow 16\sqrt{x+3} = 58 - 26x$

$8\sqrt{x+3} = 29 - 13x \longrightarrow (8\sqrt{x+3})^2 = (29 - 13x)^2 \qquad 64(x+3) = 841 - 754x + 169x^2$

$169x^2 - 818x + 649 = 0 \quad \begin{cases} x = 1 & \text{ق ق} \\ x = \frac{c}{a} = \frac{649}{169} = 3.84 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

درس ۴

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدید. همان‌طور که می‌دانید قدرمطلق عدد حقیقی a به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a| = \begin{cases} a \quad , & a \geq 0 \\ -a \quad , & a < 0 \end{cases}$$

کار در کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-5-(-3)| = |(-3)-5-| = |-2| = 2$

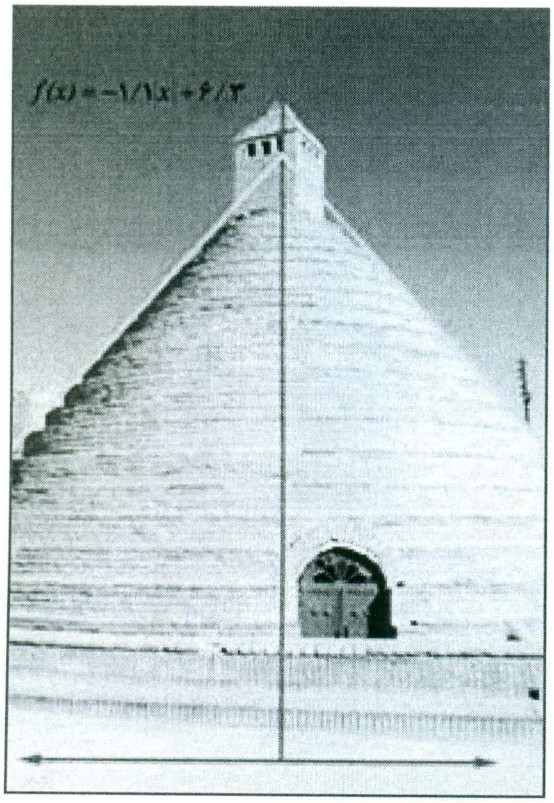
ب) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}| = -(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

پ) $\left|1/5 - 1\frac{1}{2}\right| = |0| = 0$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4+2a^2+1} = \sqrt{(a^2+1)^2} = |a^2+1| = a^2+1$

ب) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = -(\sqrt{3}-2) = 2-\sqrt{3}$



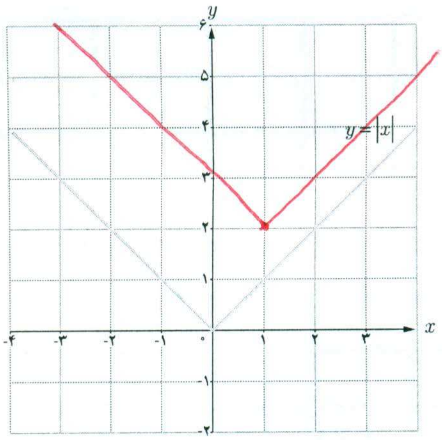
آب انبار – روستای بیابانک (استان سمنان)

رسم توابع قدر مطلقی

فعالیت

می‌خواهیم نمودار تابع $y=|x-۱|+۲$ را رسم کنیم.

روش اول : با توجه به نمودار $y=|x|$ در شکل (۱) و استفاده از انتقال منحنی، نمودار آن را رسم کنید.

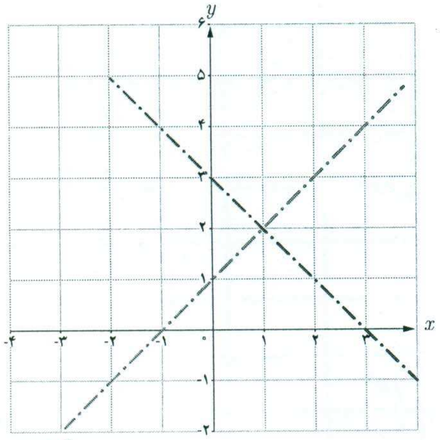


شکل (۱)

روش دوم : گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

$$y=|x-۱|+۲=\begin{cases} x-1+۲ & , x\geq ۱ \\ -x+1+۲ & , x<۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 & x\geq 1 \\ -x+۳ & x<1 \end{cases}$$

گام دوم؛ با توجه به شکل (۲) نمودار y را رسم کنید.


شکل (۲)

مثال : نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=|x-۱|+|x+۲|$ را رسم کنید.

حل : در اینجا نمی‌توانیم از رسم تابع $y=|x|$ و انتقال استفاده کنیم. بنابراین از روش تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها کمک می گیریم. برای این کار ابتدا عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می کنیم.

x		-۲		۱	
$x-۱$	$-$		$-$	0	$+$
$x+۲$	$-$	0	$+$		$+$

$f(x)=(x-۱)+(x+۲)=۲x+۱$

$f(x)=-(x-۱)+(x+۲)=۳$

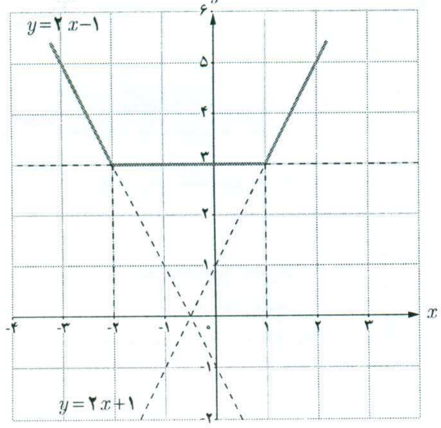
$f(x)=-(x-۱)-(x+۲)=-۲x-۱$

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۱ & , x<-۲ \\ ۳ & , -۲\leq x\leq ۱ \\ ۲x+۱ & , x>۱ \end{cases}$$

−۲	−۳
۳	۵

۱	۲
۳	۵

نمودار تابع از سه قسمت که هریک بخشی از یک خط هستند تشکیل می‌شود (شکل ۳).



شکل (۳)

ویژگی‌های قدر مطلق

در سال‌های قبل با برخی از ویژگی‌های قدر مطلق آشنا شده‌اید که عبارت‌اند از :

الف) $|x| \geq 0$

ب) $\sqrt{x^2} = |x|$

پ) $|x| = a \iff x = a$ یا $x = -a$ $\quad (a \geq 0)$

ت) $|x| = |a| \iff x = a$ یا $x = -a$

ث) $|-x| = |x|$

ج) $|x|^2 = x^2$

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند.

۱ از رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که : $|ab| = |a|\,|b|$

$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$

۲ با فرض $b \neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

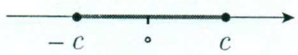
$|a| = \left|\frac{a}{b} \times b\right| = \left|\frac{a}{b}\right||b| \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$

فعالیت

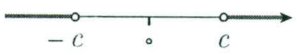
۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله‌های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف) $|x| < c, \ (c \neq 0)$ (۱)

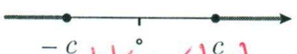


ب) $|x| > c$ (۲)

پ) $|x| \leq c$ (۳)



ت) $|x| \geq c$ (۴)



(۲)
$x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow -|x| \leq x$
$x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow x \leq |x|$
$\Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$

۲ برای هر عدد حقیقی a نشان دهید که : $-|a| \leq a \leq |a|$

۳ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید که : $-|a| - |b| \leq a+b \leq |a|+|b|$

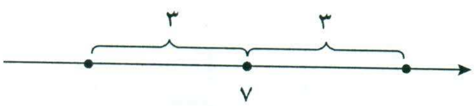
۴ با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید : $|a+b| \leq |a|+|b|$

(۳)
$-|a| \leq a \leq |a|$
$-|b| \leq b \leq |b|$
$-|a| - |b| \leq a+b \leq |a|+|b|$

(۴)
$-|a| \leq a \leq |a|$
$-|b| \leq b \leq |b|$
$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$
$\rightarrow |a+b| \leq ||a|+|b||$
$|a+b| \leq |a|+|b|$

معادلات قدر مطلقی

حل یک مسئله



بر روی محور اعداد حقیقی فاصلهٔ چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟

برای حل مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم.

اگر طول نقطهٔ جواب مسئله را x بنامیم، شرط مسئله به این معناست که $|x-۳|=۷$. با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق خواهیم دانست $x-۳=\pm۷$، و در نتیجه $x=۱۰$ و $x=-۴$؛ و هر دو جواب‌های معادله هستند.

جواب‌های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند **معادلات قدر مطلقی** می‌گویند.

✤ **مثال :** معادله $|۲-۳x|=|x-۴|$ را حل کنید.

روش اول : با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق : جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادلهٔ $۳x-۲=x-۴$ و $۳x-۲=-(x-۴)$ هستند که، به ترتیب، عبارت‌اند از :

$x=-۱$ و $x=\frac{۳}{۲}$

روش دوم : با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت : $۹x^۲-۱۲x+۴=x^۲-۸x+۱۶$؛ و از آنجا $۲x^۲-x-۳=۰$. جواب‌های این معادله -۱ و $\frac{۳}{۲}$ هستند.

کار در کلاس

معادله قدر مطلقی $|x-۱|=۴-۳x$ را به سه روش زیر حل کنید.

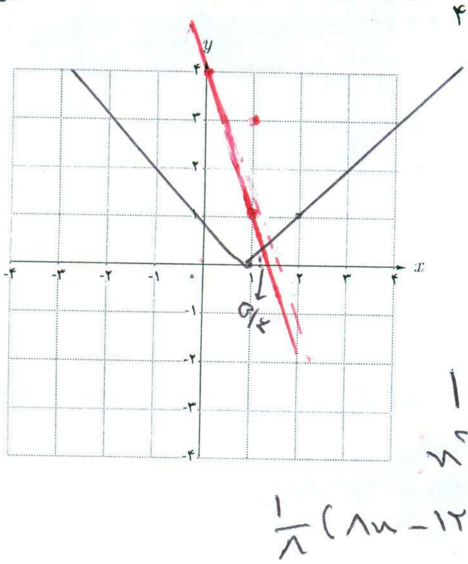
۱ **روش اول :** (با استفاده از تعریف قدر مطلق)

$$|x-۱|=\begin{cases} x-1, & x\geq ۱\\ -x+1, & x<۱\end{cases}$$

حالت اول: $x\geq۱ \Rightarrow x-۱=۴-۳x \Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$ ، حالت دوم: $x<۱ \Rightarrow ....$ ، مجموعه جواب= $\{\frac{۵}{۴}\}$

$-x+1=۴-۳x$ $\quad$ $۲x=۳$ $\quad$ $x=\frac{۳}{۲}$ غ ق ق

۲ **روش دوم :** (روش هندسی)



الف) توابع $y=|x-۱|$ و $y=۴-۳x$ را رسم کنید.

ب) طول‌های محل تلاقی دو نمودار را مشخص کنید. $x=\frac{۵}{۴}$

پ) جواب‌های معادله را به‌دست آورید. $x=\frac{۵}{۴}$

۳ **روش سوم :** (به توان رساندن طرفین)

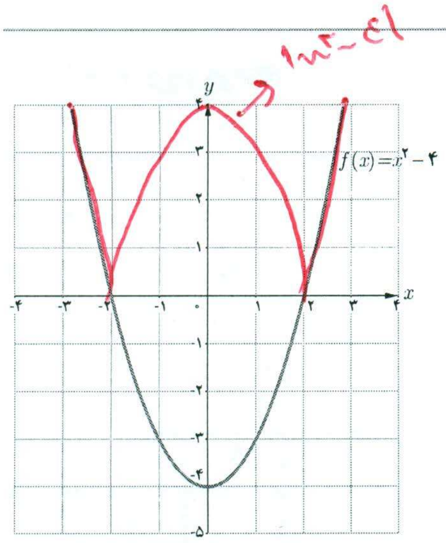
$|x-۱|=۴-۳x \geq ۰$ $\quad$ $|x-۱|^۲=(۴-۳x)^۲$

$x^۲-۲x+۱=۱۶-۲۴x+۹x^۲ \rightarrow ۸x^۲-۲۲x+۱۵=۰$

$\frac{۱}{۸}(۸x-۱۲)(۸x-۱۰)=۰ \begin{cases} ۸x=۱۲ & x=\frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق}\\ ۸x=۱۰ & x=\frac{۵}{۴} \text{ ق ق}\end{cases}$

فعالیت

در شکل روبه‌رو نمودار تابعی با ضابطه $f(x)=x^2-4$ آمده است.



۱ با توجه به علامت عبارت x^2-4 و استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع $y=|x^2-4|$ را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

۲ نمودار $y=|x^2-4|$ را رسم کنید.

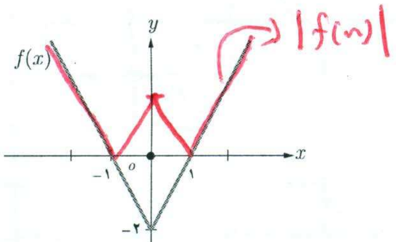
۳ تابع $y=|f(x)|$ را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای بنویسید.

$$y=|f(x)|=\begin{cases} x^2-4 & , f(x)\geq 0 \\ 4-x^2 & , f(x)<0 \end{cases}$$

۴ با توجه به قسمت‌های قبل یک روش رسم برای تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار $y=f(x)$ بیان کنید.

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

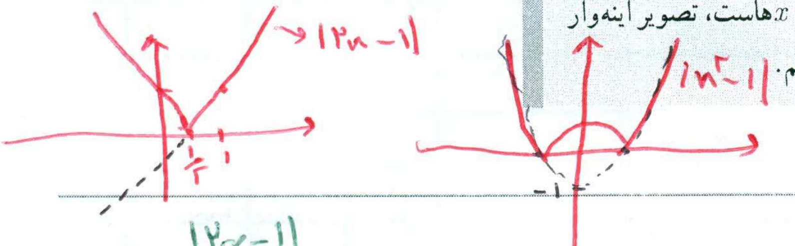
۵ در شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y=|f(x)|$ را از روی نمودار تابع $y=f(x)$ رسم کنید.



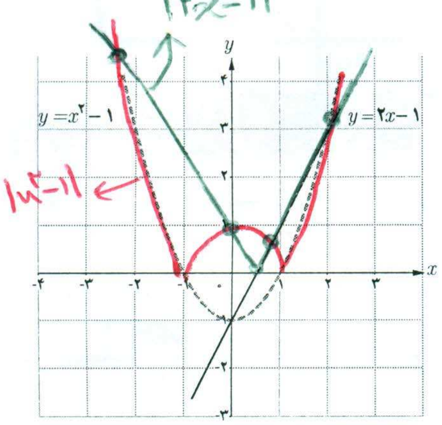
با توجه به فعالیت بالا :

1 نمودار $y=-f(x)$ قرینه نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور x هاست.

2 برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست، تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



کار در کلاس



۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y=|2x-1|$ و $y=|x^2-1|$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|x^2-1|=|2x-1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به‌دست آورید.

۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادلهٔ $|x^2-1|=|2x-1|$ را حل کنید.

حالت اول: $x^2-1=2x-1 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=2$

$|x^2-1|=|2x-1|=$

حالت دوم: $x^2-1=-(2x-1) \Rightarrow x^2+2x-2=0 \quad \Delta=12$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}\rightarrow\begin{cases} x=-1+\sqrt{3}\simeq 0/73 \\ x=-1-\sqrt{3}\simeq -2/73 \end{cases}$$

۳) الف) $|x-3|=7$ ب) ج)

$x<-5$ -5 -3 -1 $x>-1$

$|x+3|>2$

$\begin{cases} x+3>2 \to x>-1 \\ x+3<-2 \to x<-5 \end{cases}$

$x=6-2=4$ $x=6+2=8$

$2|x-6|=4 \to |x-6|=2$

$|x-6|=2 \begin{cases} x-6=2 & x=8 \\ x-6=-2 & x=4 \end{cases}$

$x=3-7=-4$ $x=3+7=10$

$|x-3|=7$ $\begin{cases} x-3=7 & x=10 \\ x-3=-7 & x=-4 \end{cases}$

تمرین

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|$ $= \begin{cases} x(x)=x^2 & x\geq 0 \\ x(-x)=-x^2 & x<0 \end{cases}$

ب) $g(x)=|x^2-1|$ $= \begin{cases} x^2-1 & x\leq -1 \text{ یا } x\geq 1 \\ -x^2+1 & -1<x<1 \end{cases}$

x		-1		1	
x^2-1	+	0	−	0	+

پ) $h(x)=|x-1|+|x+1|$ $\begin{cases} -x+(-x-1)=-2x & x\leq -1 \\ -x+1+x+1=2 & -1<x<1 \\ x-1+x+1=2x & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x & x\leq -1 \\ 2 & -1<x<1 \\ 2x & x\geq 1 \end{cases}$

		-1		1	
$x-1$	−		−	0	+
$x+1$	−	0	+		+

۲ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱− و ۳ روی محور xها برابر ۶ باشد؟

-1 3

$|x+1|+|x-3|=6$ $x=-1$ $x=3$

$\begin{cases} -2x+2 & x\leq -1 \to -2x+2=6 \quad -2x=4 \to x=-2 \text{ ق ق} \\ 4 & -1<x<3 \\ 2x-2 & x\geq 3 \to 2x-2=6 \quad 2x=8 \quad x=4 \text{ ق ق} \end{cases}$

$\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به‌صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است. بالای صفحه

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است. بالای صفحه

پ) فاصله بین x و ۳− بزرگ‌تر از ۲ است. بالای صفحه

۴ دو معادلهٔ زیر را حل کنید.

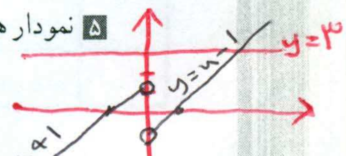
الف) $\dfrac{2-x}{|x-3|}=1$ $\xrightarrow{x\neq 3}$ $|x-3|=2-x$ $\begin{cases} x-3=2-x \to 2x=5 \quad x=\frac{5}{2} \text{ غ ق ق} \\ x-3=x-2 \to -3=-2 \text{ غ ممکن} \end{cases}$

ب) $\sqrt{x^2-2x+1}=2x+1$ $\sqrt{(x-1)^2}=2x+1$ $|x-1|=2x+1$

$\begin{cases} x-1=2x+1 \to x=-2 \text{ غ ق ق} \\ x-1=-2x-1 \to 3x=0 \to x=0 \text{ ق ق} \end{cases}$

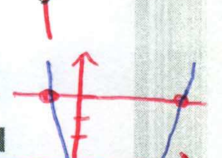
۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به‌دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=x-\dfrac{x}{|x|}$ $\begin{cases} x-\frac{x}{x}=3 & x>0 \\ x-\frac{x}{-x}=3 & x<0 \end{cases} \to \begin{cases} x-1=3 \to x=4 \text{ ق ق} \\ x+1=3 \to x=2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$



ب) $y=x^2-6x$ $x^2-6x=3$ $x^2-6x-3=0$ $\Delta=48$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6\pm 4\sqrt{3}}{2}=3\pm 2\sqrt{3}$ $\begin{cases} x=3+2\sqrt{3}\simeq 6{,}46 \\ x=3-2\sqrt{3}\simeq -0{,}46 \end{cases}$



۶ نمودار تابع $f(x)=||x|-2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x)=1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

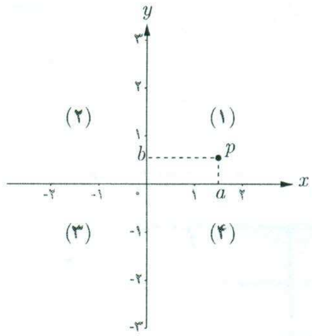
صفحه بعد

۷ نمودار تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2-2x|=2$ را حل نمایید.

صفحه بعد

درس ۵

آشنایی با هندسه تحلیلی



در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

به هر نقطه P در صفحهٔ مختصات یک زوج مرتب $(a\ ,\ b)$ نظیر می‌شود. به این زوج مختصات نقطه P گفته می‌شود. طول نقطه P را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می‌دهیم.

در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحه مختصات آشنا می‌شویم.

فاصله بین دو نقطه

فعالیت

روی محور اعداد زیر به مبدأ O، نقطهٔ متناظر ۴ را با A و نقطهٔ متناظر ۳- را با B مشخص کرده‌ایم؛

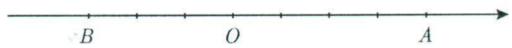
خواندنی

هندسه تحلیلی شاخه‌ای از ریاضیات است که از ترکیب هندسه و جبر مقدماتی به‌وجود آمده است. در این رشته اشکال هندسی و روابط بین آنها را با مقادیر و معادلات عددی و جبری بیان می‌کنند.

بنیان‌گذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما در قرن ۱۷ میلادی بوده‌اند.

این رشته در مورد اندازه، فاصله، زاویه و فرمول‌های مربوط به آن بحث می‌کند.

۱ طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟ $|OA|=۴$ $|OB|=۳$



۲ طول پاره‌خط BA چقدر است؟ $|AB|=۷$

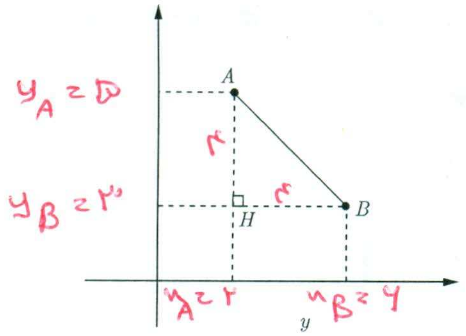
۳ فاصله دو نقطه A و B متناظر با ۴ و (۳-) از یکدیگر چقدر است؟ ۷

۴ بر روی هریک از دو محور زیر، در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟

$|AB|=|x_B-x_A|=|x_A-x_B|$

اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به‌صورت $|AB|=|x_B-x_A|$ تعریف می‌کنیم.

فعالیت

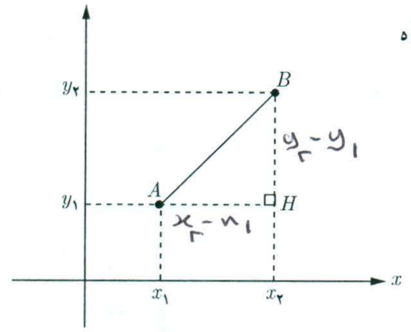


۱ دو نقطه $A(۲,۵)$ و $B(۶,۳)$ را، در شکل روبه‌رو، در نظر بگیرید :

الف) روی محور افقی x_A و x_B و روی محور عمودی y_A و y_B را مشخص کنید.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه AHB $(\hat{H} = ۹۰^\circ)$ با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

۲ در شکل روبه‌رو، اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند، طول AB را محاسبه کنید.



$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲$

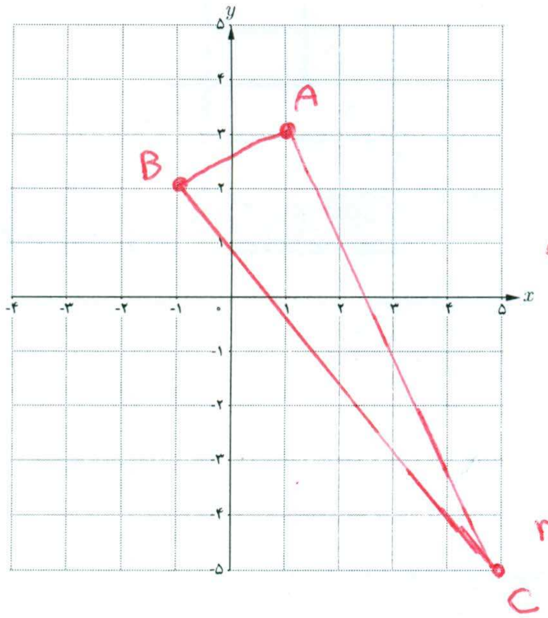
$AB^۲ = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

به‌طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ را داشته باشیم، طول پاره‌خط AB برابر است با :

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

کار در کلاس



سه نقطهٔ $A(۱,۳)$، $B(-۱,۲)$ و $C(۵,-۵)$ سه رأس مثلث ABC، در صفحهٔ مختصات روبه‌رو، هستند.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.

$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $\quad AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$

$BC = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

$BC^2 = AC^2 + BC^2 \quad 85 = 80 + 5$ ✓

رابطه فیثاغورث برقرار، مثلث قائم الزاویه است

ت) شیب دو خط AB و AC را به‌دست آورید.

چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-3}{-1-1} = \frac{1}{2}$

$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5-3}{5-1} = -2$

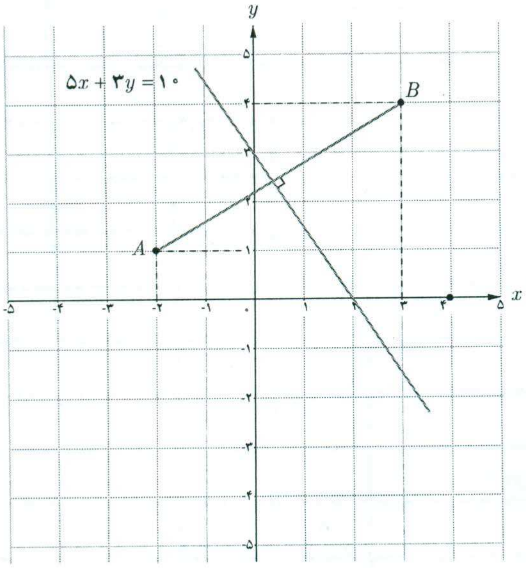
$m_{AB} \times m_{AC} = \frac{1}{2} \times -2 = -1$

شیبها معکوس و قرینه یکدیگرند دو خط بر هم عمودند

✤ **مثال** : در شکل زیر، معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطهٔ $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل کرده است.

✤ **حل** : عمودمنصف یک پاره‌خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA=PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد. فرض کنیم $P(x,y)$ آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره‌خط می‌توان نوشت :

$$\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۴)^۲}$$



با به توان دو رساندن طرفین و ساده کردن داریم :

$$۵x+۳y=۱۰$$

این معادله برای تمام نقاطی که از A و B هم‌فاصله‌اند برقرار است، بنابراین، معادلهٔ عمودمنصف AB است.

در مثال بالا شیب خط AB برابر $\frac{۳}{۵}$ و شیب خط عمودمنصف آن برابر $\frac{-۵}{۳}$ است. چه رابطه‌ای بین این دو شیب مشاهده می‌شود؟

شیبها قرینه و معکوس یکدیگرند

به‌طور کلی :
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm'=-۱$ و برعکس.

کار در کلاس

نشان دهید نقطه $P(-۱۲,۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار دارد.

روش اول

$PA=\sqrt{۱۸^۲+۴^۲}=\sqrt{۳۴۰} \longrightarrow PA=PB$

$PB=\sqrt{۱۲^۲+۱۴^۲}=\sqrt{۳۴۰}$

چون فاصله P از دو سر A و B به یک فاصله است بنابراین P روی عمود منصف AB قرار دارد

روش دوم

M وسط AB $\left| \begin{array}{l} \frac{۶+۰}{۲}=۳ \\ \frac{۱۵-۳}{۲}=۶ \end{array} \right.$ $m_{AB}=\frac{۱۸}{۶}=۳$ $\underset{\text{عمودمنصف}}{m}=-\frac{۱}{۳}$

$y-۶=-\frac{۱}{۳}(x-۳) \to y=-\frac{۱}{۳}x+۷$

$P\left| \begin{array}{l} -۱۲=x \\ ۱۱=y \end{array} \right.$ $۱۱=-\frac{۱}{۳}(-۱۲)+۷ \to ۱۱=۴+۷$ ✓ P روی عمود منصف AB است

روش سوم

$m_{PM}=\frac{۶-۱۱}{۳-(-۱۲)}=-\frac{۱}{۳}$ $m_{AB}=\frac{۱۵-(-۳)}{۶}=۳$

$m_{AB}\times m_{PM}=-۱ \longrightarrow PM \perp AB$

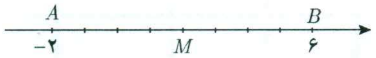
PM عمودمنصف AB است

مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط

فعالیت

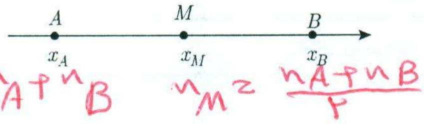
۱ در شکل زیر نقطه M وسط پاره‌خط AB است. طول نقطه M چقدر است؟

$x_M = ۲$



۲ چه ارتباطی بین طول نقطه M و طول نقاط A و B مشاهده می‌کنید؟ طول نقطه M میانگین طول نقطه‌های A و B است

۳ اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، طول نقطه M را برحسب طول‌های نقاط A و B به‌دست آورید.



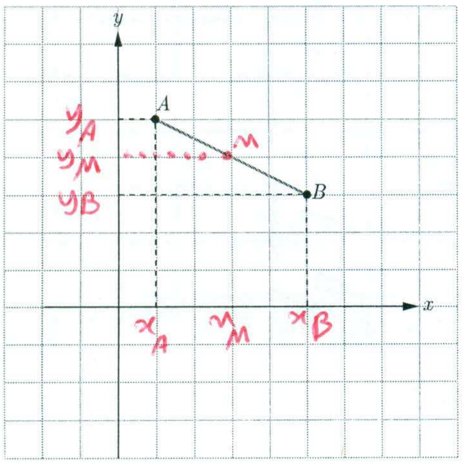
$AM=MB$

$x_M - x_A = x_B - x_M$ $\quad 2x_M = x_A + x_B \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$

۴ اگر A و B روی محور yها و عرض نقاط A و B را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره‌خط AB باشد، چه دستوری برای محاسبه عرض نقطه M می‌توان بیان کرد؟

$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$

کار در کلاس



اگر $A(۱,۵)$ و $B(۵,۳)$ دو سر پاره‌خط AB و $M(a,b)$ وسط این پاره‌خط باشد :

الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به‌دست آورید.

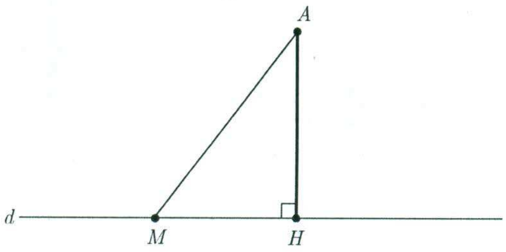
$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱+۵}{۲} = ۳$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۵+۳}{۲} = ۴$

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره‌خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

فاصله یک نقطه از یک خط

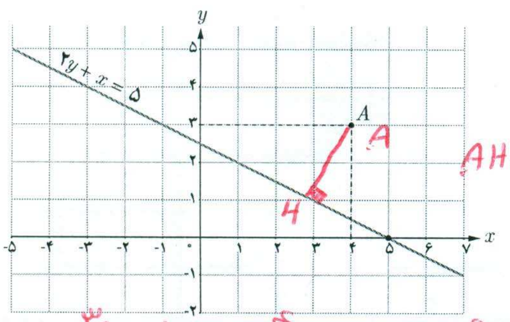


اگر خط d و نقطه A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است (چرا؟) این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم.

بنابراین برای به‌دست آوردن فاصله هر نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمودی رسم و طول پاره‌خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.

فعالیت

در شکل روبه‌رو خط d به معادله $۲y+x=۵$ و نقطه $A(۴,۳)$ داده شده است.



۱ عمود AH را بر خط d رسم کنید.

۲ رابطه بین شیب‌های دو خط d و AH را به‌دست آورید.

$AH \perp d \rightarrow m_d \times m_{AH} = -1$

۳ شیب AH را به‌دست آورده و معادله خط AH را بنویسید.

۴ دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را به‌دست آورید.

۵ طول پاره‌خط AH را محاسبه کنید.

$m_d = -\frac{۳}{۴}$ $\quad m_{AH} = \frac{۴}{۳}$ $\quad y-۵ = \frac{۴}{۳}(x-۲)$ $\quad ۳y - ۱۵ = ۴x - ۸$

$\rightarrow ۴x - ۳y = -۷$ معادله AH

به‌طور کلی اگر بخواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ از خط $ax+by+c=\circ$ را به‌دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با :

$$AH = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

که در آن، وجود علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.[۱]

۱ــ از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند خود به اثبات آن بپردازند.

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱۲ \\ ۴x - ۳y = -۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{۸}{۲۵} \\ y = \frac{۴۹}{۲۵} \end{cases}$$

$$AH = \sqrt{(۲-\frac{۸}{۲۵})^۲ + (۵-\frac{۴۹}{۲۵})^۲} = \sqrt{\frac{۱۷۶۴ + ۳۰۱۳۶}{۲۵^۲}} = \frac{۷۰}{۲۵} = ۲/۸$$

❖ **مثال :** فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۴)$ از خط $y=\frac{۴}{۳}x+۴$ را به‌دست آورید.

❖ **حل :** ابتدا معادله خط را به‌صورت $۴x-۳y+۱۲=۰$ می‌نویسیم. طبق فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطهٔ A تا خط d را AH فرض می‌کنیم و داریم :

$$AH=\frac{|۴(-۲)-۳(۴)+۱۲|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۸|}{۵}=\frac{۸}{۵}$$

❖ **مثال :** فاصله نقطه $A(۱,-۴)$ از خط $۸x+۶y=k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

❖ **حل :** ابتدا معادله خط را به‌صورت $۸x+۶y-k=۰$ می‌نویسیم. مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم :

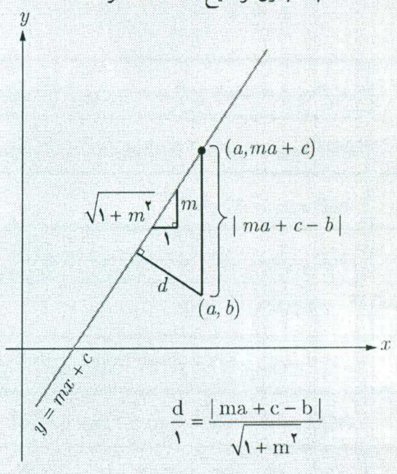
$$AH=\frac{|۸(۱)+۶(-۴)-k|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲}}\Rightarrow ۴=\frac{|-۱۶-k|}{۱۰}\Rightarrow|-۱۶-k|=۴۰$$

$$-۱۶-k=۴۰\Rightarrow k=-۵۶$$

$$-۱۶-k=-۴۰\Rightarrow k=۲۴$$

خواندنی

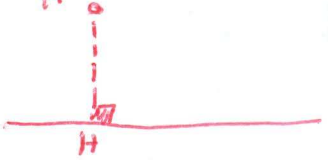
اثبات بدون توضیح فاصله نقطه از خط



کار در کلاس

۱ اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادلهٔ یک ضلع مربع $۳x-۴y=۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

$$AH:\frac{|۳(۲)-۴(۳)-۹|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۲۵}}\Rightarrow ۳\quad S=۳\times۳=۹$$

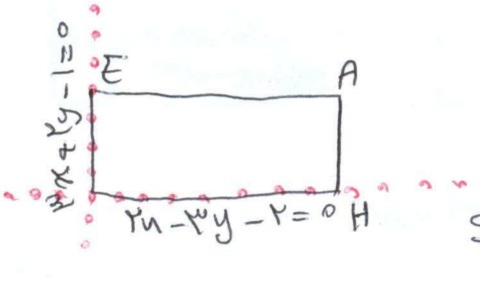


۲ دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$$AH=\frac{|۲(۲)-۳(۵)-۲|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$AE=\frac{|۳(۲)+۲(۵)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}$$

$$S=AH\times AE=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}=۱۵$$

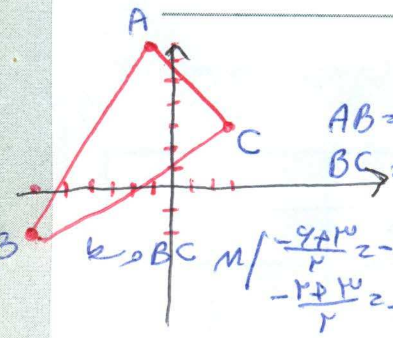


$m_{BC} = \frac{5}{9}$ $C\left|\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right.$ $y-3 = \frac{5}{9}(x-3)$ $9y-27 = 5x-15$ (ت

معادله BC $5x-9y+12=0$

$AH = \frac{|5(-1)-9(7)+12|}{\sqrt{5^2+9^2}} = \frac{56}{\sqrt{106}}$

تمرین



۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-1,7)$ و $B(-6,-2)$ و $C(3,3)$ را در نظر بگیرید.

$AB = \sqrt{5^2+9^2} = \sqrt{106}$

$BC = \sqrt{9^2+5^2} = \sqrt{106}$ $\rightarrow AB = BC$

الف) مثلث را رسم کنید.

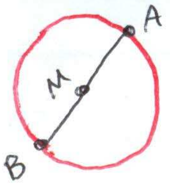
ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

وسط BC $M\left|\begin{smallmatrix}\frac{-6+3}{2}=-\frac{3}{2}\\ \frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right.$ $m_{BC} = \frac{-2-3}{-6-3} = \frac{5}{9}$ $m_{عمود} = -\frac{9}{5}$ $y-\frac{1}{2} = -\frac{9}{5}(x+\frac{3}{2})$

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

بالای صفحه



۲ $A(0,6)$ و $B(8,-8)$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به‌دست آورید.

وسط AB $M\left|\begin{smallmatrix}\frac{0+8}{2}=4\\ \frac{6+(-8)}{2}=-1\end{smallmatrix}\right.$ $\rightarrow M\left|\begin{smallmatrix}4\\-1\end{smallmatrix}\right.$ مرکز دایره

$MA = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}$ شعاع دایره

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادلهٔ $y = x^2 - 8x - 20$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به‌دست آورید.

$x^2-8x-20=0$ $(x-10)(x+2)=0$ $\begin{cases}x=10\\x=-2\end{cases}$ $A(-2,0)$ $B(10,0)$

ب) اگر x برحسب سانتی‌متر باشد طول AB را به‌دست آورید.

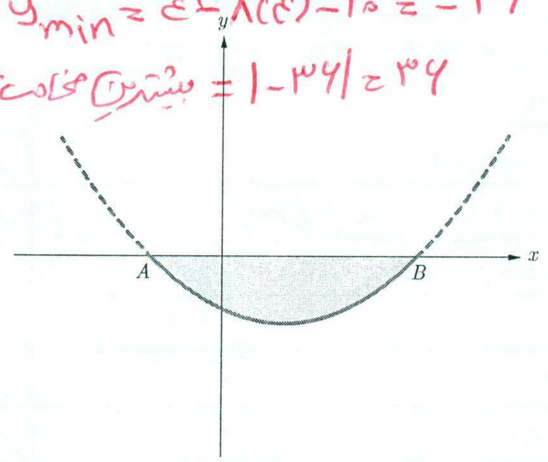
$AB = |10-(-2)| = 12$

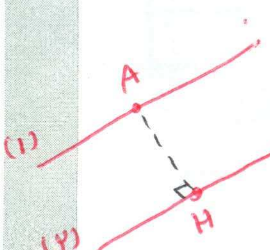
پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow y_{min} = 4^2 - 8(4) - 20 = -36$

رأس سهمی

بیشترین ضخامت عدسی $= |-36| = 36$





۴ ثابت کنید فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ (1) و $ax+by+c'=0$ (2) برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

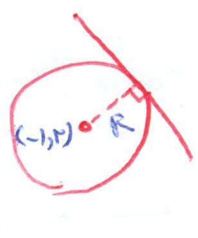
نقطه $A(x_0,y_0)$ روی خط شماره (1) قرار دارد

$A(x_0,y_0) \rightarrow ax_0+by_0=-c$

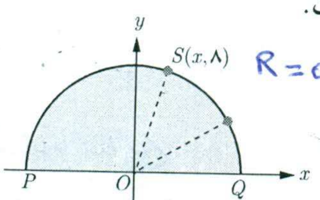
$AH = \frac{|ax_0+by_0+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۵ خط $4x+3y=5$ بر دایرهٔ C به مرکز $O(-1,2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

$R = \frac{|4(-1)+3(2)-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$



۶ نقطهٔ $S(x,۸)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) مقدار x را به‌دست آورید. $R=OS=\sqrt{x^2+8^2}=10 \quad x^2=36 \quad x=6$

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید $P\hat{S}Q$ قائمه است.

$S\begin{vmatrix}6\\8\end{vmatrix} \; P\begin{vmatrix}-10\\0\end{vmatrix} \to m_{PS}=\frac{0-8}{-10-6}=\frac{1}{2}$

$S\begin{vmatrix}6\\8\end{vmatrix} \; Q\begin{vmatrix}10\\0\end{vmatrix} \to m_{SQ}=\frac{0-8}{10-6}=-2$

$m_{PS}\times m_{QS}=\frac{1}{2}\times -2=-1 \quad PS\perp QS$

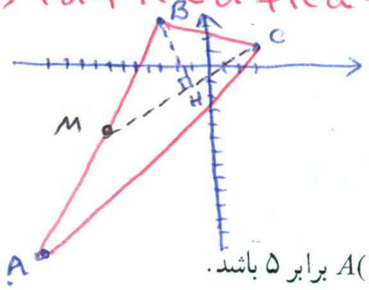
$P\hat{S}Q=90$ می

۷ اگر فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$AH=\frac{|a(1)+4(2)-1|}{\sqrt{a^2+4^2}}=\frac{|a+7|}{\sqrt{a^2+16}}=2 \quad 2\sqrt{a^2+16}=|a+7| \quad (2\sqrt{a^2+16})^2=|a+7|^2$

$\to 4a^2+64=a^2+14a+49 \to 3a^2-14a+15=0 \quad \frac{1}{3}(3a-9)(3a+5) \to a=3 ,\; a=\frac{5}{3}$

۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-۱۱,-۱۳)$، $B(-۳,۳)$، $C(۳,۱)$ می‌باشند.



الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به‌دست آورید.

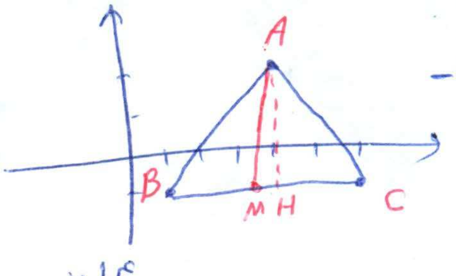
ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

جواب پایین صفحه

۹ نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(۲,۴)$ برابر ۵ باشد.

جواب پایین صفحه

۱۰ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۸,-۲)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به‌دست آورید. جواب پایین صفحه



-۱۰

$H\begin{vmatrix}4\\-1\end{vmatrix}$

$M\begin{vmatrix}\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}\\ \frac{-1+(-1)}{2}=-1\end{vmatrix} \to M\begin{vmatrix}\frac{7}{2}\\-1\end{vmatrix}$

$\to MH=\left|4-\frac{7}{2}\right|=\frac{1}{2}$

M وسط BC است

۹- نقطه M روی $y=2x$

$M\begin{vmatrix}x\\2x\end{vmatrix} \quad MO+MA=5$

$\sqrt{x^2+4x^2}+\sqrt{(x-2)^2+(2x-4)^2}=5$

$\sqrt{5x^2}+\sqrt{5(x-2)^2}=5$

$|x|+|x-2|=\sqrt{5}$

$x<0$: $-x-x+2=\sqrt{5}$

$2x=2-\sqrt{5}$

$x=1-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ق ق

$0<x<2$: $x-x+2=\sqrt{5}$

$2=\sqrt{5}$ غیرممکن

$x>2$: $x+x-2=\sqrt{5}$

$\to 2x=2+\sqrt{5}$

$x=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ ق ق

$M\begin{vmatrix}1-\frac{\sqrt{5}}{2}\\2-\sqrt{5}\end{vmatrix} \quad M\begin{vmatrix}1+\frac{\sqrt{5}}{2}\\2+\sqrt{5}\end{vmatrix}$

-۸

M وسط AB $\begin{vmatrix}\frac{-10-3}{2}=-\frac{13}{2}\\ \frac{-13+3}{2}=-5\end{vmatrix}$

$m_{MC}=\frac{1-(-5)}{3-(-\frac{13}{2})}=\frac{6}{\frac{19}{2}}=\frac{12}{19}$

$y-1=\frac{12}{19}(x-3)\to 19y-19=12x-36$

$\to 12x-19y-17=0$

معادله میانه CM

$BH=\frac{|12(-3)-19(3)-17|}{\sqrt{12^2+19^2}}=\frac{110}{\sqrt{505}}$

ب) در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف هم اند

$\begin{cases}\frac{-3+x_D}{2}=\frac{-10+3}{2}\\ \frac{3+y_D}{2}=\frac{-13+1}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}-3+x_D=-7 & x_D=-4\\ 3+y_D=-12 & y_D=-15\end{cases}$