بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۱)

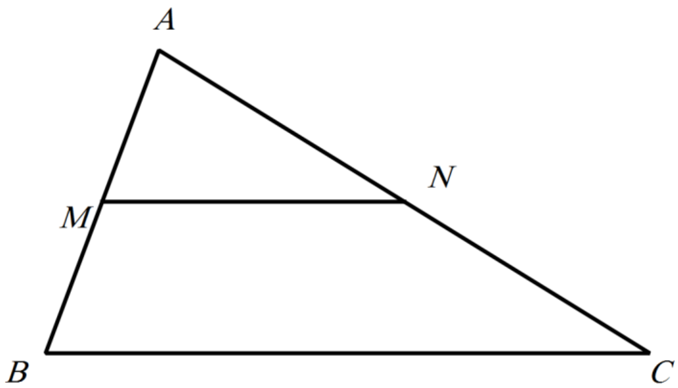
فصل ۲

درس دوم: قضیه تالس

قضیه تالس را ریاضیدانی به نام تالس در ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح برای اندازه گیری ارتفاع اهرام مصر به کار برد که امروزه یکی از مشهورترین قضایای هندسه است.

قضیه تالس

هر گاه در یک مثلث، خط راستی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع چهار پاره خط جدا می کند که اندازه آن ها تشکیل یک تناسب می دهد:

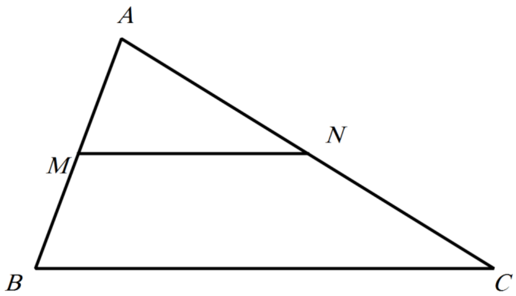


$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

این قضیه تالس به تالس جزء به جزء مشهور است. قضیه تالس را می توان به صورت زیر تعمیم داد که آن را تالس جزء به کل می نامند.

تعمیم قضیه تالس

اگر خطی دو ضلع از مثلثی را قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی را از مثلث اصلی جدا می کند که اندازه ضلع های آن با اندازه ضلع های مثلث اصلی متناسب است:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

جزء به کل وارونه

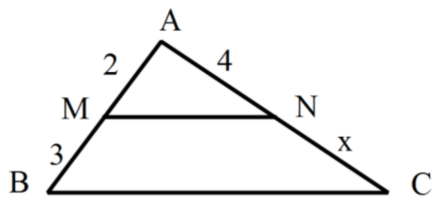
تالس جزء به کل را از سمت قاعده به راس هم می توان نوشت، اما در این حالت نسبت $\frac{MN}{BC}$ برابر با آن ها نیست. یعنی فقط زمانی می توانیم تناسب را به صورت سه جزئی بنویسیم که جزء به کل از سمت راس به قاعده باشد:

$$\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA}$$

تذکر ۱

در مسائلی که پاره خط MN داده یا خواسته نشده است، از هر سه فرمول فوق می توان استفاده کرد. استفاده از هر سه حالت به یک جواب می رسد. فقط بستگی به شرایط و تشخیص ما دارد که در مسئله داده شده کدام یک سریع تر به جواب می رسد. برای درک بهتر به نمونه های زیر دقت کنید:

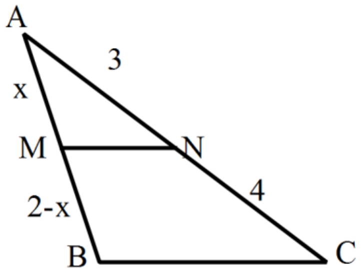
مثال ۱ در شکل زیر $AM = ۲$، $MB = ۳$ و $AN = ۴$ است. مقدار NC را بیابید.



$$\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{x} \rightarrow x = ۶$$

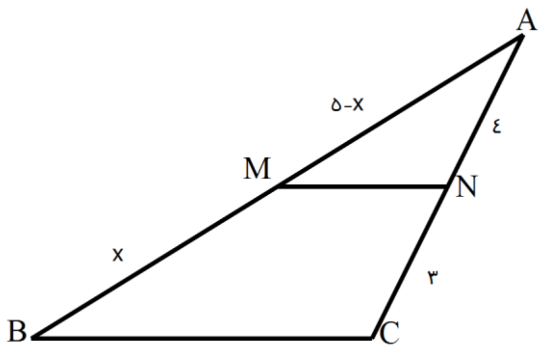
می توانستیم این سوال را به صورت جزء به کل بنویسیم ایرادی نداشت ولی محاسبه آن طولانی تر بود.

مثال ۲



$$\frac{x}{۲} = \frac{۳}{۷} \rightarrow x = \frac{۶}{۷}$$

مثال ۳



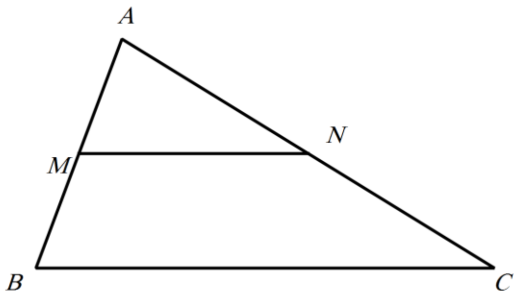
$$\frac{x}{۵} = \frac{۳}{۷} \rightarrow x = \frac{۱۵}{۷}$$

تذکر ۲

در مسائلی که MN داده یا خواسته شده باشد، باید حتما از تالس جزءبه کل آن هم از راس به سمت قاعده استفاده کرد.

عکس قضیه تالس

اگر خطی روی دو ضلع مثلثی، چهار پاره خط با اندازه های متناسب جدا کند، آن گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow MN \parallel BC$$

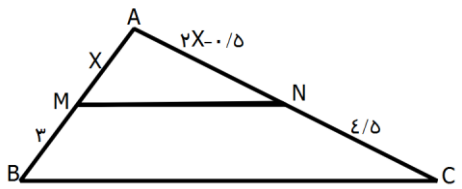
مسایل مربوط به تالس از تنوع بالایی برخوردار است و طیف گسترده ای از مسایل را دربرمی گیرد، بنابراین تسلط به آن نیاز به یک دسته بندی مناسب و منطقی دارد که در زیر به چند نوع از آنها می پردازیم.

دسته اول

در این نوع یک پاره خط موازی قاعده مثلثی رسم شده و طول چهار قطعه روی دو ساق مثلث نوشته شده است که ممکن است بعضی از آنها مجهول باشند. در این حالت کافی است یک تالس جزءبه جزء بنویسید و مجهول را پیدا کنید. البته همانطور که دیدید در این موارد حتی ممکن است از تالس جزء به کل هم استفاده کنیم.

مثال ٤

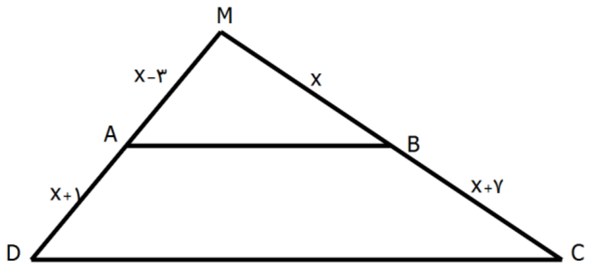
در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. مقدار x را بدست آورید.



$$\frac{x}{۳}=\frac{۲x-۰/۵}{۴/۵}\Rightarrow x=۱$$

مثال ٥

ذوزنقه ABCD مطابق شکل مفروض است و امتداد ساق های آن در نقطه M متقاطعند. مقدار x را بیابید.

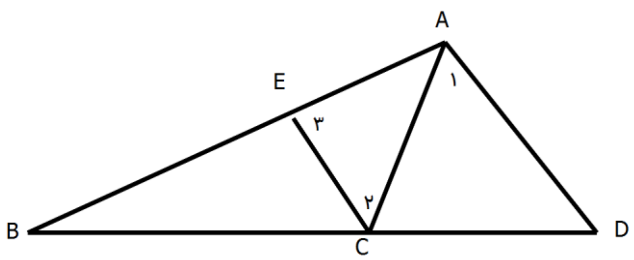


چون ABCD ذوزنقه است، پس $AB \parallel CD$ می باشد و حالا داریم :

$$\frac{x-۳}{x+۱}=\frac{x}{x+۷}\ \xRightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\ \frac{x-۳}{۴}=\frac{x}{۷}\Rightarrow ۷x-۲۱=۴x\Rightarrow x=۷$$

مثال ٦

در شکل زیر داریم $\hat{۳}=\hat{۲}=\hat{۱}$. اگر $AB=۱۵$ و $AC=۶$ باشد، حاصل $\frac{CD}{BD}$ کدام است؟



چون $\hat{۲} = \hat{۱}$ پس طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب می توان نتیجه گرفت $CE \parallel AD$.

همچنین $\hat{۳} = \hat{۲}$ نشان می دهد مثلث ACE متساوی الساقین است، یعنی $AE = AC = ۶$.

حال با توجه به این اطلاعات بدست آمده متوجه می شویم بهتر است از تالس جزء به کل از قاعده به سمت راس استفاده کنیم:

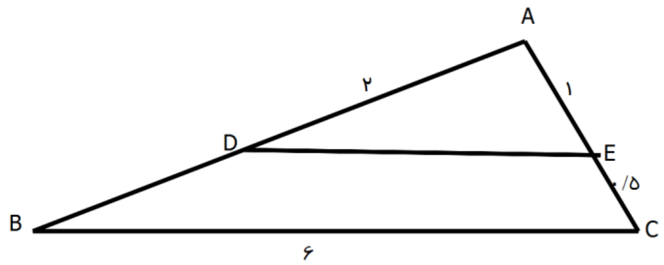
$$\frac{CD}{BD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

دسته دوم

در این نوع یک پاره خط موازی قاعده رسم می شود و طول آن داده یا خواسته می شود که در این حالت باید از تالس جزء به کل استفاده کرد.

مثال ۷

در شکل زیر $DE \parallel BC$: با توجه به اندازه پاره خط ها، طول های DE و AB را بیابید.

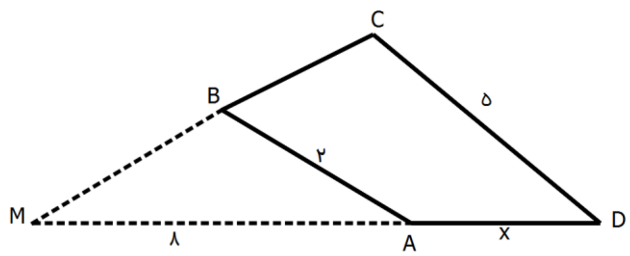


$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Longrightarrow \frac{۱}{۱.۵} = \frac{DE}{۶} \Rightarrow DE = ۴$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Longrightarrow \frac{۲}{AB} = \frac{۴}{۶} \Longrightarrow AB = ۳$$

مثال ۸

در چهارضلعی ABCD اگر زوایای A و D مکمل هم باشند و امتداد اضلاع BC و AD در نقطه M به فاصله ۸ واحد از راس متقاطع باشند، اندازه ضلع AD کدام است؟



چون A و D مکملند، زاویه خارجی A برابر D است و در نتیجه $AB \parallel CD$ است. پس طبق تالس داریم:

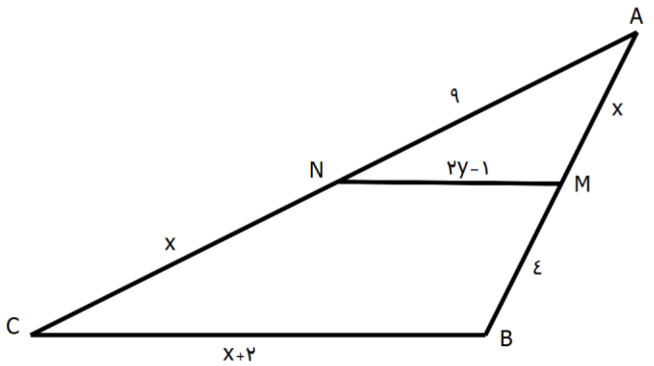
$$AB \parallel CD: \frac{۸}{۸ + x} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{۸}{x} = \frac{۲}{۳} \Longrightarrow x = ۱۲$$

دسته سوم

ترکیب تالس جزء به جزء و تالس جزء به کل: معمولا در این نوع سوالها دو مجهول وجود دارد.

مثال ۹

در شکل زیر $MN \parallel BC$، مقادیر x و y را بدست آورید.

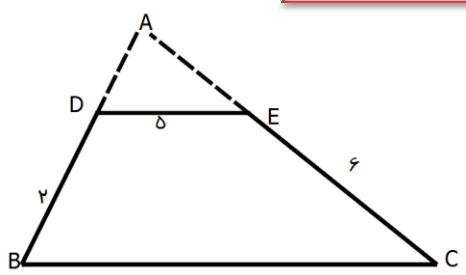


$$\frac{x}{۴} = \frac{۹}{x} \Longrightarrow x^{۲} = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$$

$$\frac{x}{x+۴} = \frac{۲y-۱}{x+۲} \Longrightarrow \frac{۶}{۱۰} = \frac{۲y-۱}{۸} \Longrightarrow ۲y - ۱ = ۴.۸ \Longrightarrow y = \frac{۵.۸}{۲} = ۲.۹$$

مثال ۱۰

در شکل زیر محیط مثلث ADE برابر ۲۱ است. محیط ذوزنقه DECB را بیابید.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Longrightarrow \frac{AD}{۲} = \frac{AE}{۶} \Longrightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow AD = x \text{ و } AE = ۳x$$

$$\text{محیط} ADE = x + ۳x + ۵ = ۲۱ \Longrightarrow x = ۴$$

$$\frac{۵}{y} = \frac{x}{x+۲} \Longrightarrow \frac{۵}{y} = \frac{۴}{۶} \Longrightarrow y = ۷/۵$$

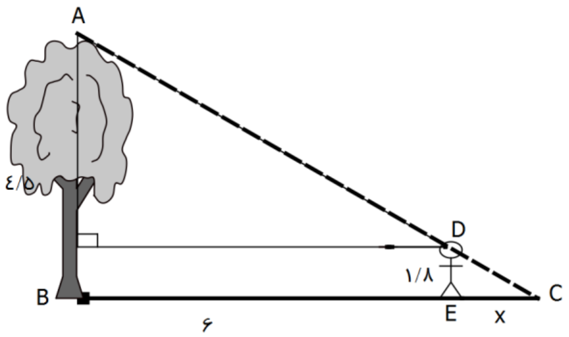
$$\text{محیط ذوزنقه} = ۲ + ۵ + ۶ + \frac{۷}{۵} = ۲۰/۵$$

دسته چهارم

تالس جزء به کل کاربردی: در این نوع مسائل که می خواهیم طول سایه یا بلندی یک درخت یا ساختمان را پیدا کنیم، باید یک مثلث قائم الزاویه و خطی که موازی ضلع قائم آن است پیدا کنیم و اطلاعات داده شده را روی آن مثلث منتقل کنیم و سپس با استفاده از تالس جزء به کل مجهول خواسته شده را پیدا کنیم.

مثال ۱۱

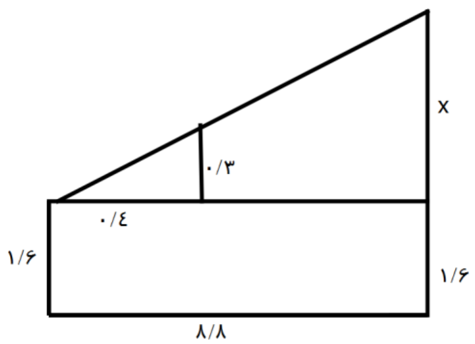
شخصی با قد ۱۸۰ سانتی متر در فاصله ۶ متری از درختی به ارتفاع ۴/۵ متر ایستاده است. طول سایه این شخص روی زمین چقدر است؟

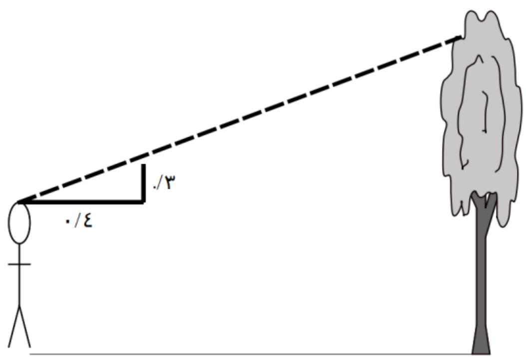


$$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{BC}\Longrightarrow\frac{۱.۸}{۴.۵}=\frac{x}{x+۶}\Longrightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{x}{x+۶}\Longrightarrow x=۴$$

مثال ۱۲

شخصی برای پیدا کردن ارتفاع یک درخت، یک تکه مقوا به شکل زیر ساخت. اگر او در فاصله ۸/۸ متری از درخت بایستد، می تواند با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث نوک درخت را ببیند. فاصله تقریبی چشم او از زمین ۱/۶ متر است. ارتفاع تقریبی درخت را بیابید.

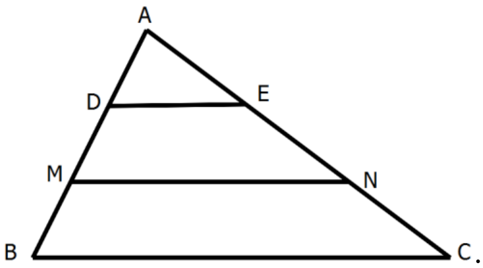




$$\frac{۰.۳}{x}=\frac{۰.۴}{۸.۸}\Longrightarrow x=۶.۶\qquad\Longrightarrow \text{ارتفاع درخت}=x+۱.۶=۸.۲$$

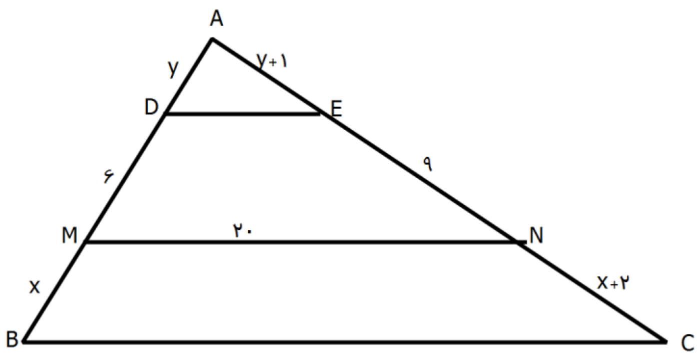
دسته پنجم تالس با دو خط موازی قاعده

در این نوع دو پاره خط موازی قاعده مثلث رسم می شود و معمولا حداقل دو مجهول در مسئله وجود دارد. در این موارد یک بار مثلث AMN را در نظر می گیریم و با استفاده از موازی بودن DE و MN از تالس استفاده می کنیم و یک بار هم مثلث ABC را در نظر می گیریم و از موازی بودن MN و BC یا DE و BC استفاده میکنیم.



مثال ۱۳

در شکل زیر DE و MN موازی قاعده BC هستند. حاصل BC-DE را بیابید.



$$\Delta AMN: DE \parallel MN \Rightarrow \frac{y}{۶}=\frac{y+۱}{۹} \Longrightarrow y=۲$$

$$\Delta ABC: MN \parallel BC \Rightarrow \frac{y+۶}{x}=\frac{y+۱۰}{x+۲} \Longrightarrow \frac{۸}{x}=\frac{۱۲}{x+۲} \Longrightarrow x=۴$$

حال برای پیدا کردن DE از تالس جزءبه کل در مثلث AMN استفاده می کنیم.

$$\frac{DE}{۲۰}=\frac{y}{y+۶}=\frac{۲}{۸} \Longrightarrow DE=۵$$

برای پیدا کردن BC نیز از تالس جزءبه کل در مثلث ABC استفاده می کنیم

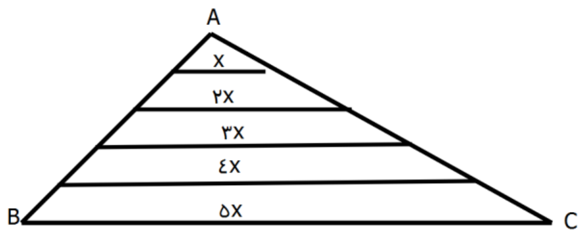
$$\frac{۲۰}{BC}=\frac{۸}{۱۲} \Longrightarrow BC=۳۰ \Longrightarrow BC-DE=۲۵$$

دسته ششم

حالت خاص تالس

پاره خطی که وسط های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می کند، بر طبق تالس نصف ضلع سوم و بر طبق عکس تالس موازی ضلع سوم است.

نتیجه: اگر یک ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم و از هریک خطوطی موازی قاعده رسم کنیم تا ضلع مقابل را قطع کنند، پاره خط های تولید شده تشکیل تصاعد عددی می دهند.



مثال ١٤

در مثلث ABC به اضلاع $AB = ۷$ و $AC = ۴$، وسط های اضلاع را به هم وصل کرده ایم.اگر محیط یکی از مثلث های بدست آمده ۸ باشد، اندازه ضلع BC را بیابید.

چون اضلاع هریک از مثلث های بدست آمده نصف اضلاع ABC است، بنابراین:

$$\frac{۴}{۲}+\frac{۷}{۲}+\frac{BC}{۲}=۸ \Longrightarrow BC=۵$$

دسته هفتم

حالت دبلیو تالس

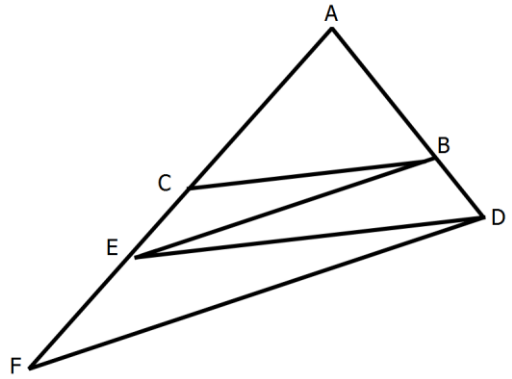
در این نوع سوال ها یک علامت شبیه W در شکل دیده می شود. ابتدا یک مسئله ثابت می کنیم. سپس راه حل این مسائل را بیان می کنیم.

مثال ١٥

در شکل زیر $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ می باشد. ثابت کنید $AE^۲ = AC.AF$.

فرض کنیم $AC = x$ و $EC = y$ باشد. چون $BC \parallel DE$ است پس $AB = kx$ و $BD = ky$ خواهد بود. بنابراین

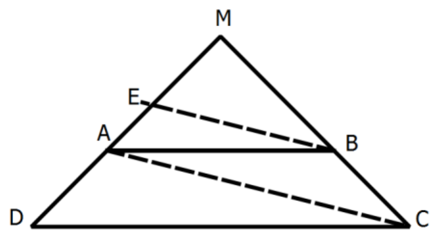
$$BE \parallel DF \Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{kx}{kx+ky}=\frac{x}{x+y}=\frac{AC}{AE} \Longrightarrow AE^۲ = AC.AF$$



حال این رابطه را در مسایل مورد استفاده قرار می دهیم.

مثال ۱۶

در ذوزنقه ABCD پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، اندازه MD را بیابید.



اگر فرض کنیم $ME = x$ باشد، در این صورت

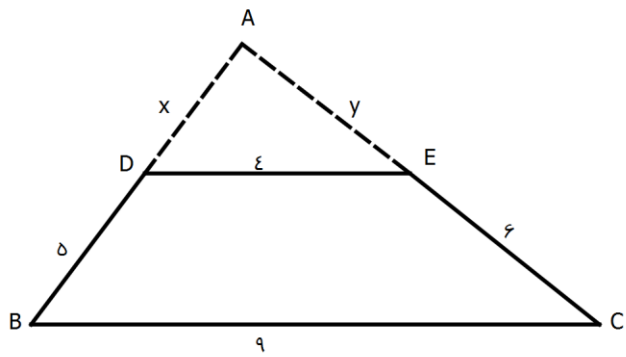
$$MA^{۲} = ME.MD \Longrightarrow (x+۳)^{۲} = x(x+۱۰) \Longrightarrow x^{۲}+۶x+۹ = x^{۲}+۱۰x$$

$$\Longrightarrow ۴x = ۹ \Longrightarrow x = ۲.۲۵ \Longrightarrow MD = ۲.۲۵ + ۱۰ = ۱۲/۲۵$$

تمرین های تکمیلی

مثال ۱۷

در ذوزنقه ای اندازه قاعده ها ۴و ۹ واحد و اندازه ساق ها ۶ و ۵ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها دربیرون ذوزنقه تشکیل می شود را بیابید. (سراسری تجربی ۹۴)



چون DE و BC موازی هستند، در مثلث ABC تالس جزء به کل می نویسیم.

$$\frac{x}{x+۵}=\frac{۴}{۹}=\frac{y}{y+۶}$$

بنابراین

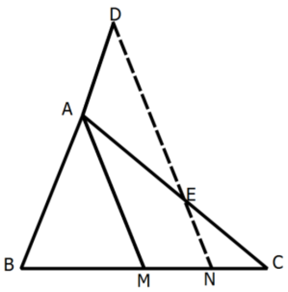
$$\frac{x}{x+۵}=\frac{۴}{۹}\Longrightarrow x=۴$$

$$\frac{y}{y+۶}=\frac{۴}{۹}\Longrightarrow y=۴/۸$$

$$ADE \text{ محیط مثلث } = x+y+۴=۱۲/۸$$

مثال ۱۸

در مثلث ABC، پاره خط ND موازی میانه AM و $AB=\frac{۲}{۳}AC$ است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ را بیابید.(سراسری ریاضی ۹۴)



از روی شکل واضح است که AM و DN موازی هستند و می توانیم در مثلث های AMC و BDN تالس بنویسیم.

$$\Delta BDN: AM \parallel DN \longrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{MN}{BM}$$

$$\Delta AMC: EN \parallel AM \longrightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{MN}{CM}$$

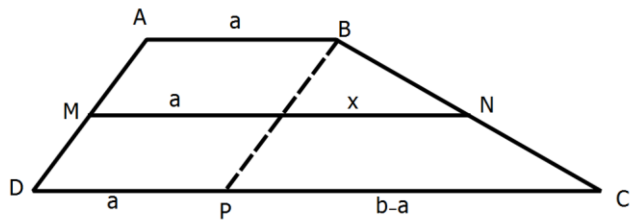
از تقسیم طرفین دو رابطه بالا داریم:

$$\frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{AE}{AC}} = \frac{\frac{MN}{BM}}{\frac{MN}{MC}} \Rightarrow \frac{AD \times AC}{AB \times AE} = \frac{MN \times MC}{BM \times MN} = ۱ \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{AC}{AB} = ۱ \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{AC}{\frac{۲}{۳}AC} = ۱$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۱۹

نشان دهید خطی که وسط های دو ساق ذوزنقه ای را به هم وصل می کند میانگین دو قاعده است.

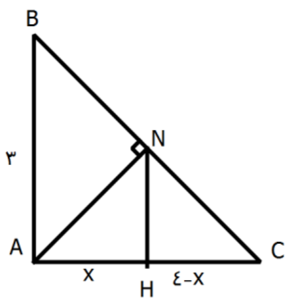


فرض کنیم قاعده های ذوزنقه a و b باشند. از راس B خطی به موازات ساق AD رسم می کنیم و در مثلث BPC تالس را می نویسیم.

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b-a}} = \frac{\boldsymbol{AM}}{\boldsymbol{AD}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2}} \rightarrow \boldsymbol{MN} = \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}$$

مثال ۲۰

مطابق شکل ارتفاع هردو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. x را بیابید. (سراسری ریاضی ۸۹)



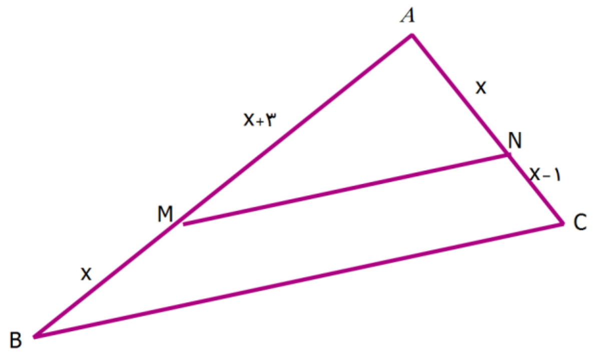
دو ضلع مثلث قائم الزاویه ABC معلوم است: $AB = ۳$ و $AC = x + ۴ - x = ۴$ بنابراین اندازه وتر نیز مشخص می شود: $BC = ۵$. از طرفی قطعه های ایجاد شده توسط ارتفاع روی وتر مثلث قائم الزاویه، متناسب با مربع اضلاع کناری هستند. بنابراین $BN = ۹k$ و $CN = ۱۶k$ خواهد بود. حال داریم:

$$NH \parallel AB \longrightarrow \frac{۹k}{۲۵k} = \frac{x}{۴} \Longrightarrow x = ۱/۴۴$$

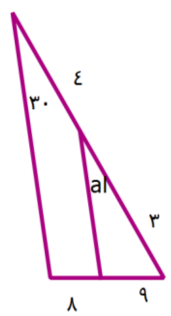
تمرینات تکمیلی

درست یا نادرست؟

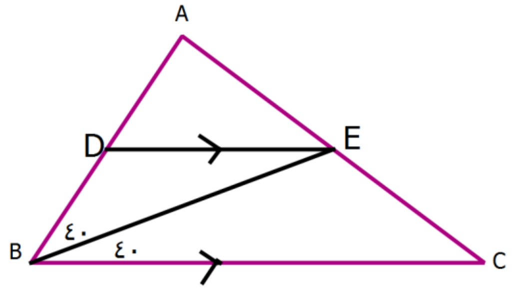
۱- در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. مقدار x برابر $\frac{۳}{۲}$ است.



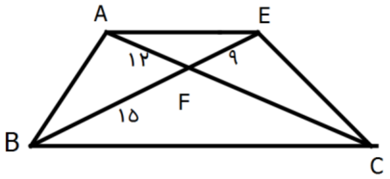
۲- در شکل زیر مقدار α برابر ۳۰ درجه است.



۳- در شکل رو به رو، تناسب $\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC}$ برقرار است.



۴- در ذوزنقه مقابل طول پاره خط CF برابر ۱۸ است.



چهار گزینه ای

۵- در ذوزنقه ای اندازه قاعده ها ۴ و ۹ و اندازه ساق ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می شود کدام است؟

الف) ۱۱/۴ ب)۱۱/۶ پ)۱۲/۲ ت) ۱۲/۸

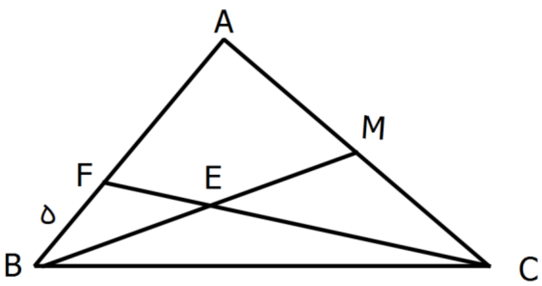
۶- در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد نیمسازهای داخلی دو زاویه متقابل قطر دیگر مستطیل را در M و N قطع می کنند. اندازه MN چقدر است؟

الف) $\frac{۲}{۳}$ ب)$\frac{۵}{۷}$ پ)$\frac{۵}{۶}$ ت) $\frac{۵}{۳}$

۷- در یک مربع به ضلع $۴\sqrt{۲}$ خط واصل از راس به وسط ضلع مقابل آن، قطر مربع را در M قطع می کند. فاصله نقطه M از مرکز مربع کدام است؟

الف) $\frac{۵}{۳}$ ب)$\frac{۴}{۳}$ پ)$\frac{۳}{۴}$ ت) ۱

۸- در شکل رو به رو BM میانه و BE=EM است. اگر BF=۵ باشد،AB کدام است؟

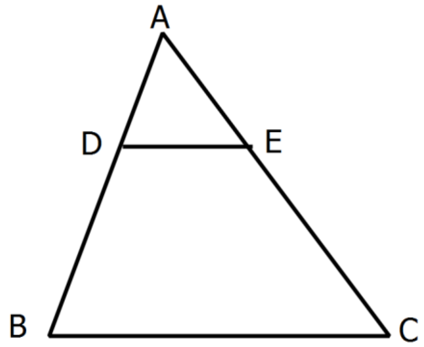


الف) ۱۰ ب)۱۲

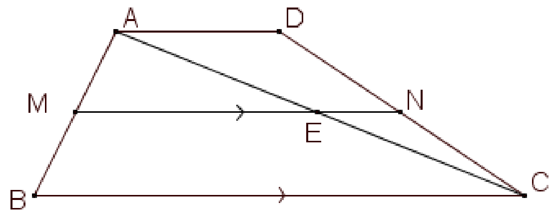
پ)۱۵ ت)۲۰

سوالات تشریحی

۹- در شکل زیر $DE \parallel BC$ و مساحت ذوزنقه $DEBC$ پنج برابر مساحت مثلث ADE است. نسبت $\frac{DB}{DA}$ را بیابید.



۱۰-در ذوزنقه ABCD نقاط M و N به ترتیب روی ساقهای AB و DC طوری قرار دارند که MN با قاعده ها موازی است.ثابت کنید$\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}$



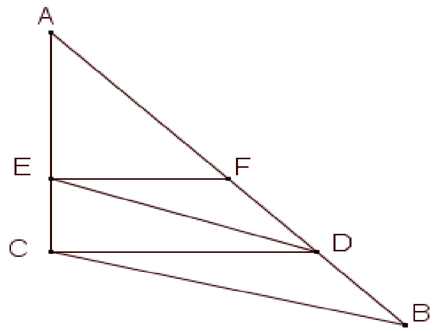
$\Delta ABC: ME \parallel BC \rightarrow$ ... ...

$\Delta ADC: NE \parallel AD \rightarrow$ ... ...

۱۱- برای به دست آوردن طول یک درخت، طول سایه درخت را اندازه گرفته ایم این طول ۳۰ متر می باشد. طول شاخصی که در زمین در راستای سایه درخت زده ایم ،۵۰ سانتیمتر و طول سایه آن ۲ متر است. با رسم شکل مناسب طول درخت را محاسبه کنید.

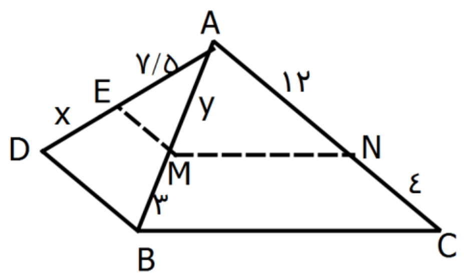
۱۲-در مثلث ABC ، DE با BC موازی است و EF با CD.

ثابت کنید: $\frac{AF}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}$



۱۳-روی ضلع BC از مثلث ABC نقطه دلخواه M را اختیار می کنیم و از آن خطی موازی میانه AD رسم می کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آنها را در Eو F قطع کند. ME+MF را حساب کنید.

۱۴- در شکل مقابل $BC \parallel MN$ و $BD \parallel ME$ می باشد. X+y را بیابید.



۱۵- در ذوزنقه ای قاعده بزرگ دو برابر قاعده کوچک است. خطی موازی قاعده ها رسم شده است. اگر بر اثر برخورد آن با قطرها و ساق های ذوزنقه ، سه پاره خط مساوی روی آن ایجاد شده باشد، آن گاه این خط ساق های ذوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می کند؟

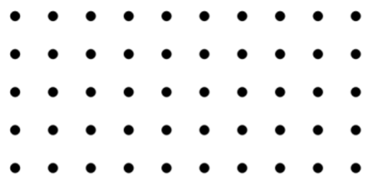
هندسه (۱)

فصل ۳

درس دوم: نقاط شبکه ای و مساحت

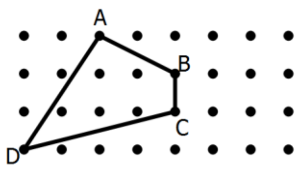
تعریف

مطابق شکل نقطه هایی که روی خط های افقی و عمودی واقعند بطوریکه فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی یا عمودی برابر واحد است را نقاط شبکه ای می نامند.



چند ضلعی های شبکه ای

اگر تمام راس های یک چندضلعی روی نقاط شبکه ای باشد، چندضلعی شبکه ای نامیده می شود.



نقاط مرزی

نقاط شبکه ای واقع بر راس ها و ضلع های چند ضلعی شبکه ای را نقاط مرزی می نامند و تعداد آنها را با b نشان می دهند.

نقاط درونی

نقاط واقع در درون چند ضلعی شبکه ای را نقاط درونی می نامند و تعداد آنها را با i نشان مثلا چندضلعی فوق ۵ نقطه درونی و چهار نقطه مرزی دارد.

هر چند ضلعی شبکه ای حداقل سه نقطه مرزی دارد ولی می تواند هیچ نقطه درونی نداشته باشد.

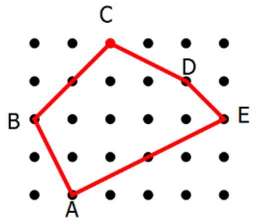
فرمول پیک

اگر تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه ای b و تعدادنقاط درونی آن i باشد، مساحت آن برابر است با: $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$

این رابطه توسط جورج الکساندر پیک در سال ۱۸۹۹ ارائه شد.

مثال ۱

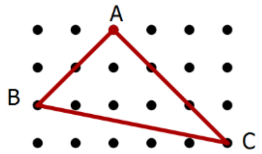
مساحت چند ضلعی شبکه ای ABCDE را حساب کنید.



$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۷}{۲}+۸-۱=۱۰/۵$$

مثال ۲

اندازه بزرگترین ارتفاع مثلث شبکه ای زیر را بدست آورید.



بزرگترین ارتفاع بر کوچکترین ضلع وارد می شود و کوچکترین ضلع ABاست

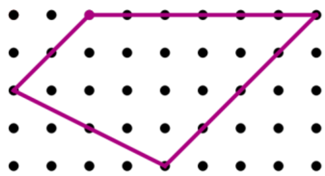
که اندازه آن با فیثاغورث روی شبکه $۲\sqrt{۲}$ بدست می آید.

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۶}{۲}+۴-۱=۶$$

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times CH\rightarrow ۶=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۲}\times CH\rightarrow CH=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

مثال ۳

ارتفاع ذوزنقه شبکه ای در شکل زیر را بیابید.



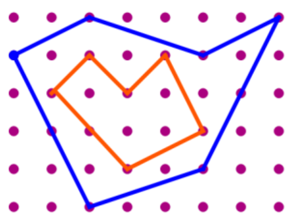
$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۱۴}{۲}+۱۲-۱=۱۸$$

حال قاعده های ذوزنقه نیز $۲\sqrt{۲}$ و $۴\sqrt{۲}$ بدست می آیند و لذا ارتفاع برابر است با:

$$۱۸=\frac{۱}{۲}\left(۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}\right)\times h\rightarrow h=۳\sqrt{۲}$$

مثال ۴

با توجه به مساحت چند ضلعی های شبکه ای، مساحت ناحیه بین دو چند ضلعی را محاسبه کنید.



$$S_۱=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۸}{۲}+۱۷-۱=۲۰$$

$$S_۲=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۷}{۲}+۴-۱=۴/۵$$

$$S=۲۰-۶.۵=۱۳/۵$$

مثال ۵

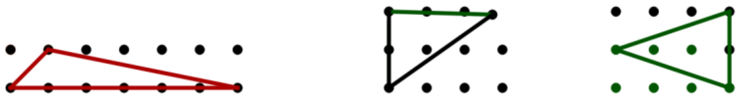
مساحت یک چند ضلعی شبکه ای ۳ واحد است.

الف) جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و درونی را در حالت هایی که امکان دارد، مشخص کنید.

باید $\frac{b}{۲}+i-۱=۳$ باشد، در نتیجه $b+۲i=۸$ می باشد. از طرفی می دانیم $i\geq ۰$ و $b\geq ۳$ پس داریم.

i	۰	۱	۲
b	۸	۶	۴

ب) اگر این چند ضلعی شبکه ای مثلث باشد در هر کدام از حالت ها شکلی برای آن رسم کنید.



نکته

اگر مساحت یک چند ضلعی شبکه ای S باشد، تعداد مقادیر متمایز ممکن برای نقاط درونی i همواره با تعداد مقادیر متمایز ممکن برای نقاط مرزی b برابر است و از رابطه زیر بدست می آید:

$$[S+۰/۵] = \text{تعداد } i\text{ها} = \text{تعداد } b \text{ ها}$$

مثال ۶

مساحت یک مثلث شبکه ای ۵/۵ واحد است. تعداد نقاط مرزی این مثلث چند عدد متفاوت می تواند داشته باشد؟

$$\text{تعداد } b\text{ها} = [S+۰/۵] = [۶] = ۶$$

تذکر

اگر برای نقاط مرزی یا درونی شرایطی داده شود b را از تساوی $S=\frac{b}{۲}+i-۱$ بر حسب i پیدا می کنیم و یک جدول رسم کرده و به i عدد می دهیم و مقادیر b را زیر آن می نویسیم.

مثال ۷

مساحت یک چهار ضلعی شبکه ای با حداقل ۲ نقطه درونی ۷ واحد است. تعداد نقاط مرزی این چهار ضلعی چند مقدار مختلف می پذیرد؟

$$\frac{b}{۲}+i-۱=۷ \rightarrow b+۲i=۱۶ \rightarrow b=۱۶-۲i \xrightarrow{i\geq ۲, b\geq ۳}$$

i	۲	۳	۴	۵	۶
b	۱۲	۱۰	۸	۶	۳

پس پنج حالت مختلف را در بر میگیرد.

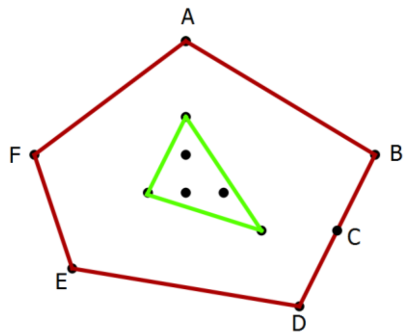
مثال ۸

در شکل فاصله افقی و عمودی نقاط متوالی برابر یک واحد است. اگر مساحت شکل برابر ۶ باشد، تعداد نقاط درونی شکل را بیابید.

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱ \rightarrow ۶=\frac{۱۲}{۲}+i-۱ \rightarrow i=۱$$

مثال ۹

در شکل زیر اگر مساحت ناحیه بین مثلث و جند ضلعی برابر ۳۶/۵ باشد، تعداد نقاط درونی شکل $ABCDEF$ را بیابید.



$$S_{ABCDEF}=\frac{۶}{۲}+i-۱=۲+i$$

$$\text{مثلث } S=\frac{۳}{۲}+۳-۱=۳/۵$$

بنابراین : مساحت مثلث – مساحت ABCDEF = مساحت داده شده

$$۳۶.۵=۲+i-۳.۵ \rightarrow i=۳۸$$

مثال ۱۰

در یک چند ضلعی شبکه ای، تعداد نقاط درونی سه برابر تعداد نقاط مرزی است. اگر مساحت این چند ضلعی برابر ۱۳ باشد، تعداد نقاط درونی را بیابید.

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱ \rightarrow ۱۳=\frac{b}{۲}+۳b-۱ \rightarrow b=۴ \rightarrow \text{تعداد نقاط درونی } i=۱۲$$

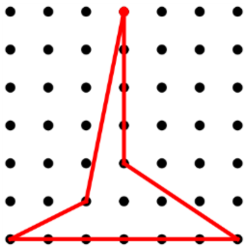
تمرینات تکمیلی

۱-کامل کنید.

الف)یک چند ضلعی شبکه ای حداقل .... نقطه مرزی می تواند داشته باشد.

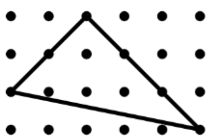
ب) یک چند ضلعی شبکه ای حداقل .... نقطه درونی می تواند داشته باشد.

۲- در شکل زیر مساحت شکل را بیابید.

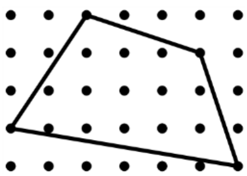


۳-در یک چندضلعی شبکه ای اگر یک واحد از تعداد نقاط درونی کم و ۴ واحد به تعداد نقاط مرزی افزوده شود، مساحت آن دوبرابر می شود. تعداد نقاط درونی این چند ضلعی چقدر است؟

۴-اندازه بزرگترین ارتفاع مثلث شبکه ای شکل زیر را بیابید.



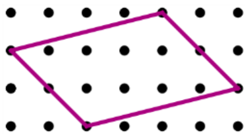
۵-اگر وسط های اضلاع چهار ضلعی شبکه ای زیر را متوالیا به هم وصل کنیم، مساحت چهارضلعی به وجود آمده را بیابید.



۶- مساحت یک چهار ضلعی شبکه ای $\frac{۱۷}{۲}$ است. تعداد نقاط درونی این چهارضلعی چند مقدار متفاوت می تواند بپذیرد؟

۷-مساحت یک چهارضلعی شبکه ای ۹ می باشد. برای تعداد نقاط مرزی این چهارضلعی چند مقدار دورقمی مختلف می توان در نظر گرفت؟

۸-اندازه بزرگترین ارتفاع متوازی الاضلاع شبکه ای شکل زیر کدام است؟



الف) $\frac{۵}{\sqrt{۲}}$ ب) $\frac{۳}{\sqrt{۲}}$

پ) $\frac{۷}{\sqrt{۲}}$ ت) $\frac{۹}{\sqrt{۲}}$

۹-کم ترین مساحت ممکن برای مثلث های شبکه ای که مجموع تعداد نقاط درونی و نقاط مرزی آن ها ۶ باشد، کدام است؟

الف) ۱/۵ ب) ۲ پ) ۲/۵ ت) ۳/۵

۱۰-کم ترین محیط از بین تمام مثلث های شبکه ای که در آن ها $b + ۲i = ۳$ می باشد، کدام است؟

الف) $۲\sqrt{۲}$ ب) ۳ پ) $۱ + \sqrt{۲}$ ت) $۲ + \sqrt{۲}$

رحیمه قربانیان / سرگروه ریاضی ناحیه ۵ تبریز