معادله درجه دوم، تعیین علامت و نامعادله

معادلهٔ درجه دوم:

هر معادله به شکل $ax^{2}+bx+c=0$ که در آن $a\neq 0$ یک معادلهٔ درجه دوم نامیده می شود.

برای حل این معادله از روش ها زیر استفاده می کنیم:

روش اول) تجزیه:

به کمک اتحادها معادله را به صورت $a(x-x_{1})(x-x_{2})=0$ می نویسیم در این صورت $x=x_{1},x=x_{2}$ جواب های معادله اند. توجه داشته باشید که اگر A , B دو عبارت جبری باشند به طوری که $AB=0$ آنگاه یا $A=0$ است و یا $B=0$ است.

به طور مثال:

الف) $x^{2}-5x+6=0\Rightarrow (x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=2$ یا $x=3$

ب) $4x^{2}+4x-3=0\Rightarrow 4\left(x^{2}+x-\frac{3}{4}\right)=0\Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ یا $x=-\frac{3}{2}$

سؤال: اگر $x=1$ یک جواب معادلهٔ $(x-a)(x-3)=2$ باشد جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) ۱-   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ) گزینه۴

مقدار $x=1$ را در معادله جایگزین می کنیم:

$$(1-a)(1-3)=2\Rightarrow -2+2a=2\Rightarrow a=2$$

حال $a=2$ را در معادله جایگزین می کنیم:

$$(x-2)(x-3)=2\Rightarrow x^{2}-2x-3x+6=2\Rightarrow x^{2}-5x+4=0$$

به کمک تجزیه معادلهٔ آخر را حل می کنیم:

$x^{2}-5x+4=0\Rightarrow (x-1)(x-4)=0\Rightarrow x=1$ یا $x=4$

روش دوم) مربع کامل:

اگر به عبارت $x^{2}+ax$ جمله $\frac{a^{2}}{4}$ را اضافه کنیم به شکل مربع کامل می شود. ($\frac{a^{2}}{4}$ برابر مربع نصف ضریب x است.)

$$x^{2}+ax=x^{2}+ax+\frac{a^{2}}{4}-\frac{a^{2}}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^{2}-\frac{a^{2}}{4}$$

در این روش برای حل معادله سعی می کنیم به حالت $\left(x+\frac{a}{2}\right)^{2}=k$ برسیم که در این صورت $x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{k}$ می شود و سپس x به دست می آید.

به طور مثال برای حل معادلهٔ $x^{۲}-۶x+۲=۰$ به صورت زیر عمل می کنیم:

عدد ثابت ۲ را به سمت راست منتقل می کنیم:

$$۱)\ x^{۲}-۶x=-۲$$

مربع نصف ۶ را به دو طرف اضافه می کنیم:

$$۲)\ x^{۲}-۶x+۹=-۲+۹$$

سمت چپ را به شکل مربع کامل می نویسیم:

$$۳)\ (x-۳)^{۲}=۷$$

از دو طرف جذر می گیریم:

$$۴)\ x-۳=\pm\sqrt{۷}$$

جواب ها به دست آمدند:

$$۵)\ x=۳\pm\sqrt{۷}$$

⌘**سؤال: به ازای کدام مقدار m ، $۲-\sqrt{۳}$ یکی از ریشه های معادلهٔ $x^{۲}-۴x+m=۰$ است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ) گزینه۱

برای حل معادله m را به سمت راست منتقل میکنیم و مربع نصف ضریب x یعنی $\left(-\frac{۴}{۲}\right)^{۲}=۴$ را به دو طرف تساوی اضافه می کنیم:

$$x^{۲}-۴x+m=۰\Rightarrow x^{۲}-۴x=-m\Rightarrow x^{۲}-۴x+۴=۴-m\Rightarrow (x-۲)^{۲}=۴-m$$
$$\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۴-m}$$

یکی از جواب ها $۲-\sqrt{۳}$ است پس $۴-m=۳$ و در نتیجه $m=۱$ است.

نکته

برای آنکه $ax^{۲}+bx$ را مربع کامل بسازیم می توانیم از a فاکتور بگیریم و سپس عبارت $x^{۲}+\frac{b}{a}x$ را به شکل مربع کامل بنویسیم و با عبارت $\left(\frac{b}{۲\sqrt{a}}\right)^{۲}$ را به $ax^{۲}+bx$ اضافه و کم کنیم (ضریب x را نصف می کنیم $\left(\frac{b}{۲}\right)$ ، به جذر a تقسیم می کنیم $\left(\frac{b}{۲\sqrt{a}}\right)$ و سپس به توان ۲ می رسانیم: $\left(\frac{b}{۲\sqrt{a}}\right)^{۲}$

برای مثال برای مربع کامل سازی عبارت $۹x^{۲}+۱۲x$ ابتدا ۱۲ را نصف می کنیم، ۶ به دست می آید، ۶ را به جذر ۹ یعنی ۳ تقسیم می کنیم ، ۲ به دست می آید سپس مربع ۲ یعنی ۴ را به عبارت اضافه می کنیم:

$$۹x^{۲}+۱۲x=۹x^{۲}+۱۲x+۴-۴=(۳x+۲)^{۲}-۴$$

$$\xrightarrow{\text{نصف}} ۶ \xrightarrow{\div\sqrt{۹}} ۲ \xrightarrow{\text{به توان۲}}$$

⌘**سؤال:** معادلهٔ $۲x^۲ - ۷x + ۵ = ۰$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ) روش اول) دو طرف را بر ۲ تقسیم می کنیم:

$$۲x^۲ - ۷x + ۵ = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۷}{۲}x + \frac{۵}{۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۷}{۲}x = -\frac{۵}{۲} \Rightarrow x^۲ - \frac{۷}{۲}x + \frac{۴۹}{۱۶}$$

$$= -\frac{۵}{۲} + \frac{۴۹}{۱۶} \Rightarrow \left(x - \frac{۷}{۴}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow x - \frac{۷}{۴} = \pm\frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \frac{۷}{۴} \pm \frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۲} \text{ یا } ۱$$

روش دوم) دو طرف را در ۲ ضرب می کنیم:

$$۲x^۲ - ۷x + ۵ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱۴x + ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱۴x = -۱۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱۴x + \left(\frac{۷}{۲}\right)^۲ = -۱۰ + \left(\frac{۷}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \left(۲x - \frac{۷}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow ۲x - \frac{۷}{۲} = \pm\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{۷}{۲} \pm \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \text{ یا } ۱$$

روش سوم) روش کلی (روش Δ):

برای حل معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ ابتدا $\Delta = b^۲ - ۴ac$ را تشکیل می دهیم. سه حالت اتفاق می افتد:

✓ الف) اگر $\Delta > ۰$ آنگاه ریشه های معادله را از فرمول مقابل به دست می آیند. $\boxed{x_۱, x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}}$

✓ ب) اگر $\Delta = ۰$ آنگاه معادله یک ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبه دوم) دارد که از رابطهٔ مقابل به دست می آید: $\boxed{x_۱ = x_۲ = \frac{-b}{۲a}}$

✓ پ) اگر $\Delta < ۰$ آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد.

⌘**سؤال:** معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$ ب) $x^۲ + ax - ۴ + ۲a = ۰$

پاسخ) ابتدا Δ را پیدا می کنیم و سپس معادله را حل می کنیم:

الف) $۲x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۵)^۲ - ۴(۲)(۳) = ۲۵ - ۲۴ = ۱ \Rightarrow a = ۲, b = -۵, c = ۳$$

$$x_۱, x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(-۵) \pm \sqrt{۱}}{۴} = \frac{۵ \pm ۱}{۴} = ۱ \text{ یا } \frac{۳}{۲}$$

ب) $x^{2}+ax-4+2a=0$

$$\Delta=a^{2}-4\times1\times(-4+2a)=a^{2}+16-8a=(a-4)^{2}$$

$$x_{1},x_{2}=\frac{-a\pm\sqrt{(a-4)^{2}}}{2}=\frac{-a\pm(a-4)}{2}=\begin{cases}x_{1}=\dfrac{-a+a-4}{2}=-2\\[2mm] x_{2}=\dfrac{-a-a+4}{2}=2-a\end{cases}$$

⌘**سؤال**: معادلهٔ $(x+a)(x+4-a)+a^{2}=0$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. حدود a کدام است؟

۱) $a<1$ ۲) $a>1$ ۳) $a<2$ ۴) $a>2$

پاسخ) گزینه۱

ابتدا معادله را به شکل استاندارد $ax^{2}+bx+c=0$ می نویسیم:

$$(x+a)(x+4-a)+a^{2}=x^{2}+(a+4-a)x+a(4-a)+a^{2}=x^{2}+4x+4a$$

حال $\Delta>0$ را بررسی می کنیم:

$$\Delta=4^{2}-4(4a)=16-16a\Rightarrow16-16a>0\Rightarrow a<1$$

⌘**سؤال**: دردنبالهٔ $a,b,a+b,\ldots$ هندسی قدر نسبت را بیابید. $(a,b>0)$

پاسخ) b واسطهٔ هندسی a و $a+b$ است پس:

$$b^{2}=a(a+b)\qquad(1)$$

از طرفی قدر نسبت برابر $q=\frac{b}{a}$ است پس $b=aq$ است. حال در تساوی (۱) به جای b مساوی آن aq را جایگزین می کنیم:

$$b^{2}=a(a+b)\xrightarrow{b=aq}(aq)^{2}=a(a+aq)\Rightarrow a^{2}q^{2}=a^{2}+a^{2}q\xrightarrow{\text{تقسیم بر } a^{2}}$$

$$q^{2}=1+q\Rightarrow q^{2}-q-1=0$$

حال به کمک Δ فرمول معادله را حل می کنیم:

$$\Delta=b^{2}-4ac=(-1)^{2}-4(1)(-1)=5$$

$$q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\xrightarrow{q>0}q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

⌘**سؤال**: در معادلهٔ درجه دوم $x^{2}+3x+m-2=0$ رابطهٔ $x_{1}x_{2}+x_{1}^{2}=6$ برقرار است. مقدار m کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 3 ۴) 4 (ریاضی یازدهم)

پاسخ) گزینه۴

با توجه به مثال بالا $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-3$ است داریم:

$$x_1(x_1+x_2)=6\Rightarrow x_1(-3)=6\Rightarrow x_1=-2\xrightarrow{x_1+x_2=-3}x_2=-1$$

از طرفی $x_1x_2=\frac{c}{a}$ است پس:

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=m-2\Rightarrow m-2=(-1)(-2)\Rightarrow m=4$$

⌘**سؤال:** **اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه های معادلهٔ $2x^2+\sqrt{6}x+n=0$ باشند آنگاه مقدار n کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(ریاضی یازدهم)**

پاسخ) گزینه۱

مجموع ریشه ها برابر $\frac{-b}{a}$ و حاصل ضرب آنها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{-b}{a}=\frac{-\sqrt{6}}{2}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\\ \Rightarrow\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+2\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{n}{2}}=\frac{6}{4}\\ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{c}{a}=\frac{n}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 1+n=\frac{3}{2}\Rightarrow n=\frac{1}{2}$$

اگر α ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشد آنگاه:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$

به طور مثال $x=3$ ریشهٔ مضاعف $2x^2-12x+18=0$ است. پس:

$$2x^2-12x+18=2(x-3)^2$$

⌘**سؤال:** **به ازای کدام مقدار m عبارت $(3m-2)x^2+2mx+1=0$ به صورت مربع کامل یک عبارت جبری است؟**

۱) ۱ یا ۶ ۲) ۲ یا ۳ ۳) ۱ یا ۲ ۳) ۳ یا ۶

پاسخ) گزینه۳

با توجه به نکته بالا می بایست $\Delta=0$ باشد.

$$\Delta=(2m)^2-4(3m-2)(1)=4m^2-12m+8=4(m^2-3m+2)$$

$$\Delta=0\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow(m-1)(m-2)=0\Rightarrow m=1\ \text{یا}\ 2$$

📖 معادلاتی که منجر به حل معادلۀ درجه دوم می شوند:

بعضی معادلات با درجۀ بالاتر از ۲ وجود دارند که با نامگذاری مناسب برای بعضی از عبارت هایی که در معادله تکرار می شوند می توان به یک معادلۀ درجه ۲ رسید. در واقع با تغییر متغیر مناسب می توان به حل معادلۀ درجه دوم رسید.

⌘**سؤال**: معادله $(x^2-1)^2-13(x^2-1)+36=0$ را حل کنید.

پاسخ) فرض کنید $t=x^2-1$ کافی است در معادله به جای x^2-1 ، t را جایگزین کنیم:

$$\begin{matrix} t^2-13t+36=0 \\ (t-4)(t-9)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} t=4 \Rightarrow x^2-1=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \\ t=9 \Rightarrow x^2-1=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{10} \end{cases}$$

⌘**سؤال**: مجموع جواب های معادلۀ $x^2-2x+\dfrac{4}{(x-1)^2}=4$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ) گزینه۴

به دو طرف معادله یک واحد اضافه می کنیم و با فرض $t=(x-1)^2$ معادله را بازنویسی و حل می کنیم:

$$x^2-2x+1+\frac{4}{(x-1)^2}=5 \Rightarrow t+\frac{4}{t}=5 \Rightarrow \frac{t^2+4}{t}=5 \Rightarrow t^2+4=5t \Rightarrow t^2-5t+4=0$$

از حل معادلۀ بالا $t=1,t=4$ به دست می آید پس داریم:

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow (x-1)^2=1 \Rightarrow x-1=\pm 1 \Rightarrow x=0,2 \\ t=4 \Rightarrow (x-1)^2=4 \Rightarrow x-1=\pm 2 \Rightarrow x=3,-1 \end{cases} \Rightarrow$$ مجموع ریشه ها = ۴

⌘**سؤال**: اگر یکی از ریشه های $x^4+ax^2+b=0$ به صورت $x=\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$ باشد و بدانیم $a,b\in Z$ مقدار b کدام است؟

۱) -8 ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) -16

☜ پاسخ: **گزینه۲**

روش اول) اگر فرض کنیم $x^2=t$ است معادلۀ $x^4+ax^2+b=0$ به صورت $t^2+at+b=0$ خواهدبود. پس اگر $x=\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$ یک ریشه معادله اولیه باشد $(\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}})^2$ یک ریشۀمعادلۀ $t^2+at+b=0$ خواهد بود:

$$(\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}})^2=2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=4+2\sqrt{4-2}=4+2\sqrt{2}$$

ریشه های معادلۀ $t^2+at+b=0$ برابرند با $t=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ پس چون $t=4+2\sqrt{2}$ یک ریشه معادله است داریم:

$$\frac{-a+\sqrt{a^{۲}-۴b}}{۲}=۴+۲\sqrt{۲}\Rightarrow -a+\sqrt{a^{۲}-۴b}=۸+۴\sqrt{۲}\xrightarrow{۴\sqrt{۲}=\sqrt{۳۲}} -a+\sqrt{a^{۲}-۴b}=۸+\sqrt{۳۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a=۸\Rightarrow a=-۸\\ a^{۲}-۴b=۳۲\end{cases}\xrightarrow{a=-۸} ۶۴-۴b=۳۲\Rightarrow ۴b=۳۲\Rightarrow b=۸$$

روش دوم) فرض می‌کنیم $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ ریشه یک معادلهٔ درجه ۱ است. پس اگر $x=\sqrt{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ باشد با به توان ۲ رساندن دو طرف تساوی یک معادلهٔ درجه دوم ایجاد می شود که یک ریشه قرینه این عدد نیز دارد:

$$x^{۲}=۲-\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}+۲\sqrt{\underbrace{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}_{۴-۲}}\Rightarrow x^{۲}=۴+۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۴=۲\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^{۴}-۸x^{۲}+۱۶=۸\Rightarrow x^{۴}-۸x^{۲}+۸=۰\Rightarrow b=۸$$

⌘**سؤال: تعداد ریشهٔ** $x^{۲}-x+۲+\dfrac{۳}{x^{۲}-x+۱}=۵$ **کدام عدد است؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) صفر

☜ پاسخ: **گزینه ۳**

به کمک تغییر متغیر $t=x^{۲}-x+۱$ داریم:

$$\underbrace{x^{۲}-x+۲}_{t+۱}+\frac{۳}{\underbrace{x^{۲}-x+۱}_{t}}=۵\Rightarrow t+۱+\frac{۳}{t}=۵\Rightarrow t+\frac{۳}{t}=۴\xrightarrow[t\neq ۰]{\times t} t^{۲}+۳=۴t\Rightarrow t^{۲}-۴t+۳=۰$$

$$\Rightarrow (t-۱)(t-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۱\\ t=۳\end{cases}$$

چون $t=x^{۲}-x+۱$ است پس:

$$\begin{cases}x^{۲}-x+۱=۱\Rightarrow x^{۲}-x=۰\Rightarrow x(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰,x=۱\\ x^{۲}-x+۱=۳\Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲,x=-۱\end{cases}$$

پس معادله فوق دارای ۴ ریشهٔ ۲، ۱، ۰، ۱- است.

⌘**سؤال: هرگاه** $۴\left(\dfrac{x}{x^{۲}+۱}\right)^{۲}+\left(x+\dfrac{۱}{x}\right)+۱=۰$ **مقدار x کدام است؟**

۱) ۱-   ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۲-   ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

☜ پاسخ: **گزینه ۱**

$$۴\left(\frac{x}{x^{۲}+۱}\right)^{۲}+\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۱=۰\Rightarrow ۴\left(\frac{x}{x^{۲}+۱}\right)^{۲}+\left(\frac{x^{۲}+۱}{x}\right)+۱=۰$$

اگر $t=\frac{x^2+1}{x}$ باشد داریم $\frac{1}{t}=\frac{x}{x^2+1}$ پس به کمک این تغییر متغیر داریم:

$$\frac{4}{t^2}+t+1=0 \Rightarrow \xrightarrow[t\neq 0]{\times t^2} t^3+t^2+4=0$$

یکی از ریشه های معادله درجه سوم فوق $t=-2$ است پس عبارت t^3+t^2+4 بر $t+2$ بخش پذیر است و به کمک تقسیم می توانیم این عبارت را تجزیه کنیم:

$$t^3+t^2+4=(t+2)(t^2-t+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t^2-t+2=0 \Rightarrow \Delta=1-8=-7 \Rightarrow -7<0 \rightarrow \end{cases}$$

پس $t=-2$ است در نتیجه:

$$\frac{x^2+1}{x}=-2 \Rightarrow x^2+1=-2x \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

☜ **تذکر**: به کمک گزینه ها هم می توان نتیجه گرفت $x=-1$ است.

حل نامعادلات

مفهوم تعیین علامت یک عبارت

یک عبارت از لحاظ علامت میتونه سه وضعیت متفاوت داشته باشد.

۱. مثبت باشه
۲. منفی باشه
۳. فاقد علامت باشه

از اونجایی که ریشه‌ی صورت، عبارت رو صفر میکنه و ریشه‌ی مخرج، باعث تعریف نشدن عبارت میشه، میتونیم بگیم که:

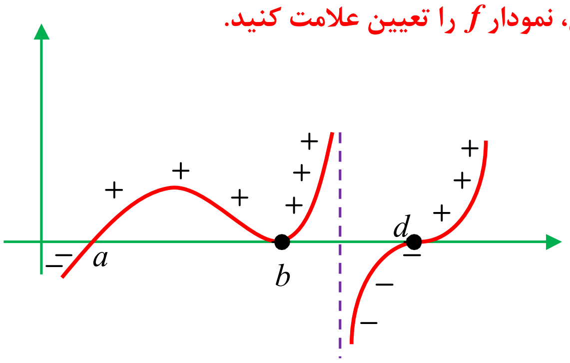
یک عبارت در ریشه های صورت و مخرج خودش، فاقد علامته

تعیین علامت یک تابع به کمک نمودار آن تابع

تعیین علامت یک تابع به کمک نمودار یعنی این که مشخص کنید:

۱. در چه محدوده ای از x، نمودار تابع در بالای محور x ها قرار داره (یعنی مثبته)
۲. در چه محدوده ای از x، نمودار تابع در پایین محور x ها قرار داره (یعنی منفیه)
۳. و در چه x یا xهایی، نمودار تابع با محور x ها برخورد داره ($y=0$) و یا اصلاً وجود نداره (تعریف نشده).

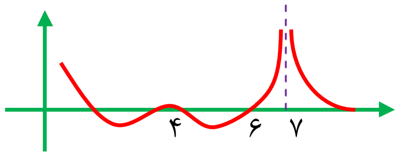
⌘**سؤال**: نمودار تابع $y = f(x)$ شکل مقابل است. به کمک جدول، نمودار f را تعیین علامت کنید.



$\Rightarrow$

x		a		b		c		d	
$f(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$+$	۰۰	$-$	۰	$+$

⌘**سؤال**: با توجه به نمودار مقابل، تابع f در کدام بازه همواره منفی می باشد؟



۱) $[۲,۴]$ ۲) $(۲,۶)$

۳) $(۴,۶)$ ۴) $(-\infty,۰)$

پاسخ: *گزینه* (۳)

بچه ها! اگه به شکل، خوب نگاه کنید می بینید که تابع در بازه‌ی $(۴,۶)$ همواره منفیه، یعنی گزینه (۳) صحیحه.

: آقا اجازه!! مگه تابع تو بازه‌ی $[۲,۴]$ همواره منفی نیست؟

نه عزیزم، اگه دقت کنی می بینی که $x = ۲$ و $x = ۴$ باعث صفر شدن تابع میشه، بنابراین تابع در بازه‌ی $[۲,۴]$، کوچکتر یا مساوی صفره نه همواره منفی.

انتقال نمودار یک تابع و تعیین علامت تابع انتقال یافته

بچه ها! عدد a به دو طریق می تونه به تابع $y = f(x)$ اضافه بشه:
- ممکنه به x اضافه بشه. $y = f(x+a)$
- ممکنه به $f(x)$ اضافه بشه. $y = f(x)+a$

- اگه a وارد خونه‌ی x بشه، اون موقع تابع $y = f(x)$ انتقال افقی (xای) پیدا می کنه. یعنی دامنه‌ی تابع جابه جا میشه:

$$y = f(x \overset{+a}{\downarrow}) \xrightarrow{\text{انتقال افقی}} y = f(x+a)$$

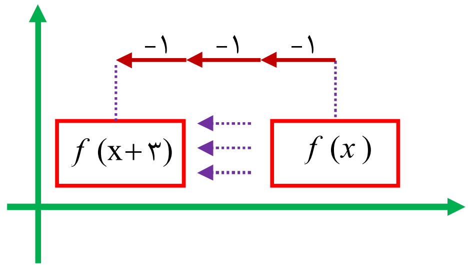
- اگه a نتونه وارد خونه‌ی x بشه، مجبوره در کنار $f(x)$ قرار بگیره که در این صورت تابع $y = f(x)$ انتقال عمودی ($f(x)$ای)، پیدا می کنه. یعنی برد تابع جابه جا میشه:

$$y = f(x) \overset{+a}{\downarrow} \xrightarrow{\text{انتقال عمودی}} y = f(x)+a$$

: آقا اجازه!! از کجا بفهمیم که: انتقال افقی تابع $y = f(x)$ رو به جلوست یا رو به عقب؛ انتقال عمودی تابع $y = f(x)$ رو به بالاست یا رو به پایین؟

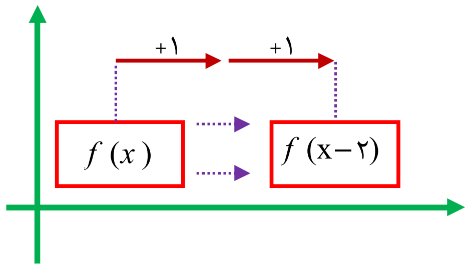
برای این که جواب سؤالات رو بگیرید به مثال های زیر توجه کن.

⌘**سؤال**: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+3)$ ، ابتدا ریشه‌ی $(x+3)$ رو بدست می آریم (یعنی $x=3$) و بعدش نمودار $y=f(x)$ رو به مقدار ۳- واحد انتقال افقی می دیم.



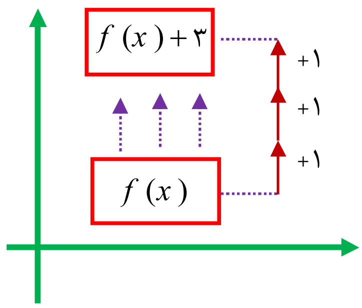
یعنی: $y=f(x)\xrightarrow{\text{انتقال افقی } (-3) \text{ واحد}} y=f(x+3)$

⌘**سؤال**: برای رسم نمودار تابع $y=f(x-2)$ ،ابتدا ریشه‌ی $(x-2)$ رو بدست می آریم (یعنی $x=2$) و بعد نمودار $y=f(x)$ رو به مقدار ۲+ واحد انتقال افقی می دیم.



یعنی: $y=f(x)\xrightarrow{\text{انتقال افقی } (+2) \text{ واحد}} y=f(x-2)$

⌘**سؤال**: برای رسم تابع $y=f(x)+3$ کافیه نمودار تابع $y=f(x)$ رو به مقدار ۳+ واحد انتقال عمودی بدیم.

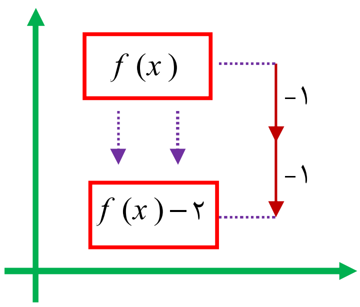


یعنی: $y=f(x)\xrightarrow{\text{انتقال عمودی } (+3) \text{ واحد}} y=f(x)+3$

⌘**سؤال**: برای رسم تابع $y=f(x)-2$ کافیه نمودار تابع $y=f(x)$ رو به مقدار ۲- واحد انتقال عمودی بدیم.

یعنی: $y=f(x)\xrightarrow{\text{انتقال عمودی } (-2) \text{ واحد}} y=f(x)-2$

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{انتقال افقی } (-a) \text{ واحد}} y=f(x+a)$$
$$y=f(x)\xrightarrow{\text{انتقال عمودی } (+a) \text{ واحد}} y=f(x)+a$$



⌘**سؤال: بچه ها! لطفاً بگید که چه جوری میشه توابع زیر رو به کمک انتقال رسم کرد.**

: آقا اجازه!! به روی چشم.

۱. $y=(x+2)^2$: باید تابع پایه‌ی $y=(x)^2$ رو ۲- واحد به طرف چپ انتقال افقی بریم تا تابع $y=(x+2)^2$ تشکیل بشه.

۲. $y=x^3-1$: باید تابع پایه‌ی $y=(x)^3$ رو ۱- واحد انتقال عمودی بدیم تا $y=x^3-1$ ایجاد بشه.

۳. $y=\sqrt{x-2}+1$: باید تابع پایه‌ی $y=\sqrt{x}$ رو ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال بدیم.

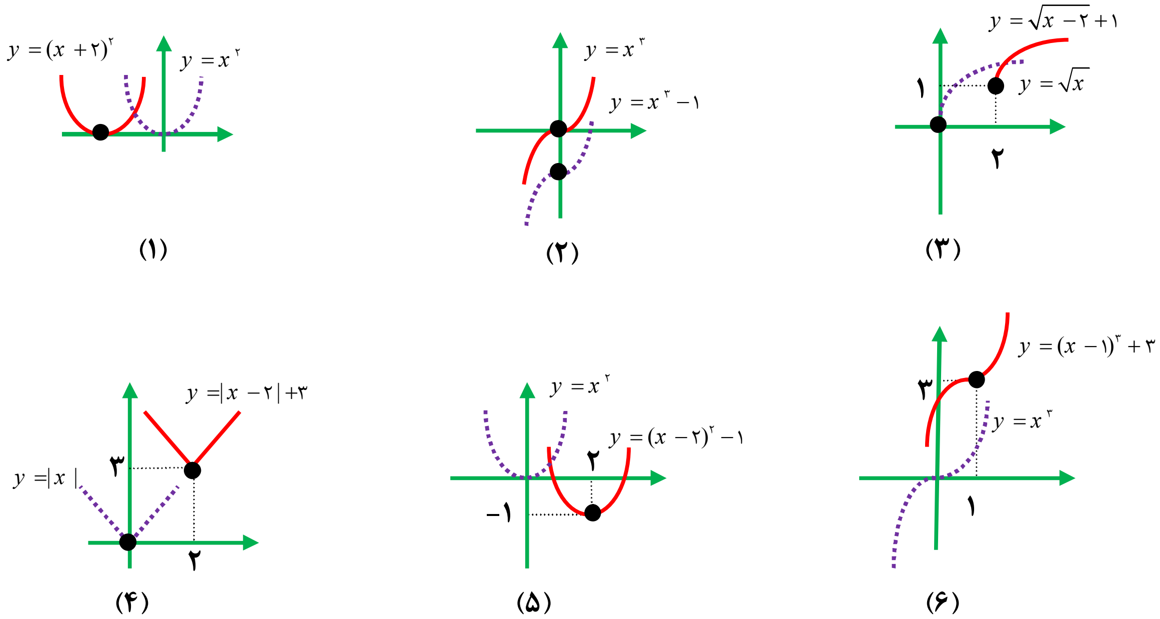
۴. $y=|x-2|+3$: باید تابع پایه‌ی $y=|x|$ رو ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا انتقال بدیم.

۵. $y=x^2-4x+3$: اول تابع رو بازنویسی می کنیم. یعنی: $y=(x-2)^2-1$

حالا تابع پایه‌ی $y=(x)^2$ رو ۲ واحد به راست و ۱ واحد به پایین انتقال می دیم تا به $y=(x-2)^2-1$ برسیم.

۶. $y=x^3-3x^2+3x+2$: ابتدا تابع رو بازنویسی می کنیم. یعنی: $y=(x-1)^3+3$

حالا تابع پایه‌ی $y=(x)^3$ رو ۱ واحد به راست و ۳ واحد به بالا انتقال می دیم تا به $y=(x-1)^3+3$ برسیم.



بچه ها! به نظر شما برای رسم تابع $y=f(-2x+4)+1$ نمودار تابع $y=f(-2x)$ رو چه جوری انتقال بدیم؟

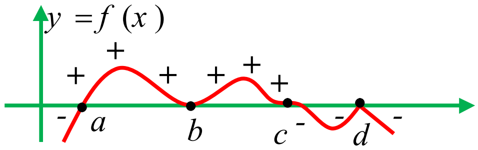
: آقا اجازه!! کافیه نمودار $y=f(-2x)$ رو ۴- واحد انتقال افقی و ۱+ واحد انتقال عمودی بدیم.

اشتباه کردی عزیزم. معلومه که هنوز جمله‌ی زیر، تو ذهنت حک نشده!

$\boxed{\text{مقدار انتقال افقی یک تابع به اندازه‌ی ریشه‌ی درون پرانتزه}}$

$$y=f(-2x)\xrightarrow[\text{(+1)واحد انتقال عمودی}]{\text{(+2)واحد انتقال افقی}}y=f(\overbrace{-2x+4}^{x=+2})+1$$

نقش ریشه‌ی یک تابع در تعیین علامت اون تابع



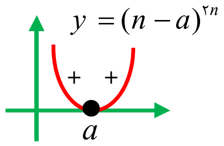
بچه ها! از نگاه نموداری ریشه‌ی یک تابع یعنی طول نقطه‌ی برخورد اون تابع با محور x ها. (شکل زیر) بنابراین c,b,a و d ریشه های تابع روبرو هستند.

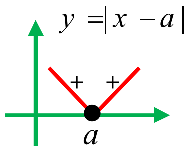
اگه کمی دقت کنید می بینید که علامت تابع در ریشه های c و a عوض میشه ولی در یشه های d و b علامت تابع تغییری نمی کنه.

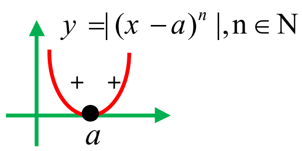
قرارداد:

- اگه علامت یک تابع در اطراف ریشه ای **عوض نشه** به اون ریشه می گیم **ریشه‌ی زوج.**
- اگه علامت یک تابع در اطراف ریشه ای **عوض بشه** به اون ریشه می گیم **ریشه‌ی فرد.**

توجه: توابع زیر، ریشه هاشون زوجه. چون علامت تابع در اطراف این ریشه ها عوض نمی شه. ($a>0$)

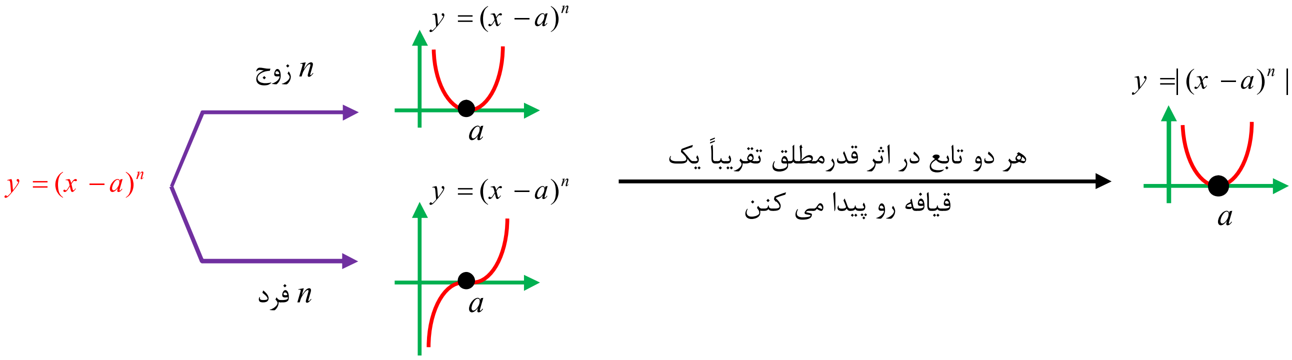
۱) 

۲) 

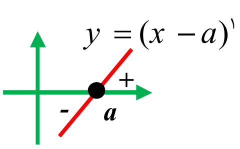
۳) 

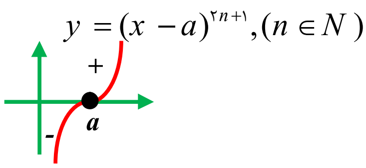
 : آقا اجازه!! اگه ممکنه درباره‌ی نمودار شماره‌ی ۳ کمی توضیح بدید.

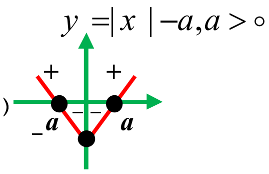
بچه ها! برای رسم نمودار $y=\left|(x-a)^n\right|$ با شرط $(n\in N, n\geq 2)$ ابتدا بی خیال قدرمطلق شید و نمودار $y=(x-a)^n$ رو رسم کنید و در انتها، نمودار رسم شده رو توی قدرمطلق قرار بدید. یعنی:



توجه: توابع زیر، ریشه هاشون فرده. چون علامت تابع در اطراف این ریشه ها عوض میشه. ($a>0$)

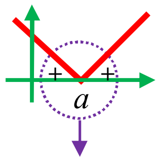
۱) 

۲) 

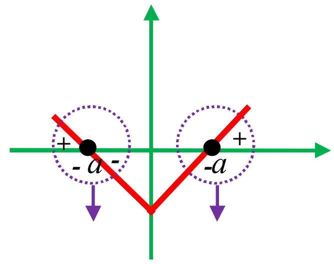
۳) 


: آقا اجازه!! چه میشه که ریشه‌ی تابع $y=|x-a|$ زوج باشه اما ریشه‌ی تابع $y=|x|-a$ فرد؟

عزیزم، جواب سؤال شما کاملاً واضحه. اگه به نمودار این دو تابع دقت کنی می بینی که تابع $y=|x-a|$ در اطراف $x=a$ تغییر علامت نمی ده اما تابع $y=|x|-a$ در اطراف هر دو ریشه ای یعنی $x=a$ و $x=-a$ تغییر علامت میده:



بدون تغییر $\Leftarrow$ $x=a$ ریشه زوج



$x=a$ ریشه فرد $\Rightarrow$ تغییر علامت $\Leftarrow$ $x=-a$ تغییر علامت ریشه فرد

نتیجه:

- تابعی که دارای عامل هایی مثل $(x-a)^{2n}$ و $|(x-a)^n|$ و $\sqrt[n]{(x-a)^{\text{زوج}}}$ هست، در اطراف $x=a$ تغییر علامت **نمی ده.**
- تابعی که دارای عامل هایی مثل $(x-a)^{2n-1}$ و $|x|-a$ یا x^n-a^n یا $\sqrt[\text{فرد}]{(x-a)^{\text{فرد}}}$ هست، در اطراف $x=a$ تغییر علامت **می ده.**

مثال آموزشی: بچه ها اگه بخواید تابعی مثل $f(x)=\dfrac{(x^۴-x^۳)(x-۳)^۴}{(x^۲-۴)|x+۳|}$ تابع رو تعیین علامت کنید کافیه سه مرحله‌ی زیر رو طی کنید.

۱. تابع رو تا حد امکان تجزیه کنید و برای هر عامل تجزیه شده، مقدار و نوع ریشه رو معلوم کنید. یعنی:

$$f(x)=\frac{\overset{\substack{\text{فرد}\\ x=۰\\ \uparrow}}{x^۳}\quad \overset{\substack{\text{فرد}\\ x=۱\\ \uparrow}}{(x-۱)}\quad \overset{\substack{\text{زوج}\\ x=۳\\ \uparrow}}{(x-۳)^۴}}{\underset{\substack{\downarrow\\ x=۲\\ \text{فرد}}}{(x-۲)}\quad \underset{\substack{\downarrow\\ x=-۲\\ \text{فرد}}}{(x+۲)}\quad \underset{\substack{\downarrow\\ x=-۳\\ \text{زوج}}}{|x+۳|}}$$

۲. ریشه های به دست اومده روبه ترتیب صعودی در جدول تعیین علامت جایگذاری کنید. بعدش در یکی از ناحیه ها (ترجیحاً ناحیه‌ی آخر) X دلخواهی رو انتخاب کنید و درون تابع قرار بدید تا علامت تابع در اون ناحیه معلوم بشه.

توجه: $f(۴)=\dfrac{\overset{\oplus}{(۴)^۳}\,\overset{\oplus}{(۴-۱)}\,\overset{\oplus}{(۴+۳)^۴}}{\underset{\oplus}{(۴-۲)}\,\underset{\oplus}{(۴+۲)}\,\underset{\oplus}{|۴+۳|}}>۰$

	ز	ف	ف	ف	ف	ز	ناحیه آخر ۴
x	-۳	-۲	۰	۱	۲	۳	
$f(x)$	∞	∞	۰	۰	∞	۰	+

۳. از ناحیه ای که علامتش رو معلوم کردید حرکت کنید، اگه به ریشه‌ی فرد برخورد کردید علامت تابع رو عوض کنید و اگه با ریشه‌ی زوج مواجه شدید، علامت تابع رو تغییر ندید.

	ز		ف		ف		ف		ف		ز	
x	-3		-2		0		1		2		3	
$f(x)$	+ 0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	⊕

بدون تغییر   تغییر   تغییر   تغییر   تغییر   بدون تغییر

⌘**سؤال: کسر** $\dfrac{(x-1)(x-2)^3}{(x-3)^5(x-4)^7}$ **در کدام فاصله همواره منفی است؟**

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(2,3)$ ۳) $(3,4)$ ۴) $(2,+\infty)$

پاسخ: گزینه (۳)

$$f(x)=\frac{\underset{\text{فرد } x=1}{(x-1)}\ \ \underset{\text{فرد } x=2}{(x-2)^3}}{\underset{\text{فرد } x=3}{(x-3)^5}\ \ \underset{\text{فرد } x=4}{(x-4)^7}}$$

x		1		2		3		4	5
$f(x)$	+	0	−	0	+	∞	−	∞	+
			جواب				جواب		

بچه ها! سؤال گفته در چه محدوده ای از x ، علامت $f(x)$ همواره منفیه. با توجه به جدول بالا میشه گفت، فقط در بازه های $x\in(1,2)\cup(3,4)$ علامت $f(x)$ همواره منفیه و شما گزینه‌ی (۳) رو در محدوده‌ی جواب می بینید.

⌘**سؤال: نامعادلات زیر را حل کنید.**

۱) $\dfrac{x^3+x^2}{x-1}\le 0$

۱) اول باید $f(x)$ رو تجزیه و بعد تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2(x+1)}{x-1}\ \Rightarrow$$

		ف		ز		ف	۲
x		-1		0		1	
$f(x)$	+	0	−	0	−	∞	+

۲) حالا باید محدوده ای از x ها رو مشخص کنیم که $f(x)$ در اون محدوده منفی یا صفر بشه.

x		-1		0		1	
$f(x)$	+	0	−	0	−	∞	+

$\xrightarrow{\text{مجموعه جواب نامعادله}}$ $\boxed{x\in[-1,1)}$

۲) $\dfrac{۴x-x^۲}{x^۲-۹}>۰$

۱) اول باید $f(x)$ رو تجزیه و بعد تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=\frac{x(۴-x)}{(x-۳)(x+۳)} \Rightarrow$$

		ف		ف		ف		ف	۵
x		-۳		۰		۳		۴	
$f(x)$	$-$	∞	$+$	۰	$-$	∞	$+$	۰	$-$

۲) محدوده ای از x ها رو مشخص کنیم که در اون محدوده $f(x)$ مثبت باشه.

x		-۳		۰		۳		۴
$f(x)$	$-$	∞	$+$	۰	$-$	∞	$+$	۰

$\xrightarrow{\text{مجموعه جواب نامعادله}}$ $\boxed{x\in(-۳,۰)\cup(۳,۴)}$

حل نامعادله‌ی $f(x)>g(x)$ به کمک تعیین علامت

توجه: بچه ها! همیشه یادتون باشه در حل نامعادلات به روش تعیین علامت، باید یک طرف نامعادله، صفر باشه.

حالا فکر می کنید اگر بخواید نامعادله‌ی $f(x)>g(x)$ رو از روش تعیین علامت حل کنید چی کار باید بکنید؟

: آقا اجازه!! خُب معلومه:

۱. $g(x)$ رو می فرستیم اونطرف تا نامعادله به صورت $f(x)-g(x)>۰$ در بیاد. (یعنی یک طرف نامعادله صفر بشه)

۲. $f(x)-g(x)$ رو از اول تجزیه و بعد تعیین‌علامت می‌کنیم. (اگه عمل تجزیه‌کردن‌رو انجام‌ندیم تعیین‌علامت امکان‌پذیر نیست.)

۳. مجموعه‌ی جواب، محدوده ای از x ها خواهد بود که در اون محدوده $f(x)-g(x)$ مثبت باشه.

⌘**سؤال:** مجموعه جواب نامعادله‌ی $\dfrac{۴}{x-۲}<x-۲$ را بیابید.

۱) $\dfrac{۴}{x-۲}-(x-۲)<۰$

۲) $\dfrac{۴-(x-۲)^۲}{x-۲}<۰ \Rightarrow \dfrac{۴-(x^۲-۴x+۴)}{x-۲}<۰ \Rightarrow \boxed{\overbrace{\dfrac{x(۴-x)}{x-۲}}^{y}}<۰ \Rightarrow$

ناحیه آخر

		ف		ف		ف	۵
x		۰		۲		۴	
y	$+$	۰	$-$	∞	$+$	۰	$-$

$\xrightarrow{\text{محدوده هایی از } x \text{ که در اون محدوده } y \text{ منفی هست.}}$ $\boxed{x\in(۰,۲)\cup(۴,+\infty)}$

⌘**سؤال:** مجموعه جواب نامعادله‌ی $\dfrac{x-۱}{x-۲}<\dfrac{۳x-۳}{x-۲}$ کدام است؟

۱) $۲\le x\le ۳$ ‏ ۲) $۱<x<۲$ ‏ ۳) $x<۱$ یا $x>۲$ ‏ ۴) φ

پاسخ: گزینه (۲)

$$\frac{۳x-۳}{x-۲}-\frac{x-۱}{x-۲}<۰ \Rightarrow \frac{۳x-۳-x+۱}{x-۲}<۰ \Rightarrow \frac{۲x-۲}{x-۲}<۰ \Rightarrow$$

$f(x)=\dfrac{۲(x-۱)}{(x-۲)} \Rightarrow$

$x=۱$ فرد

$x=۲$ فرد

ناحیه آخر

		ف		ف	۳
x		۱		۲	
$f(x)$	$+$	۰	$-$	∞	$+$

$\xrightarrow{\text{محدوده هایی از } x \text{ که در اون محدوده } f(x) \text{ منفی هست.}}$ $x\in(۱,۲)$

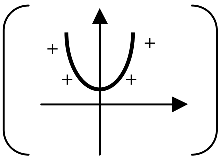
ضرب کردن «دو طرف یک نامعادله» در «عبارتی که تغییر علامت می ده» ممنوع!

بچه ها! می دونید که اگه یک نامساوی رو در مقداری مثبت ضرب کنیم جهت نامساوی عوض نمی شه و اگه در مقداری منفی ضرب کنیم جهت نامساوی عوض میشه.

حالا سوال اینکه در بین سه نامعادله‌ی $\boxed{\dfrac{1}{x^2+1} > 2-x}$ (۱) ، $\boxed{\dfrac{1}{-|x|-1} > 2-x}$ (۲) ، $\boxed{\dfrac{2}{x-1} < x-2}$ (۳) **کدوم یکی رو نمی تونم در مخرجش ضرب کنم؟**

: آقا اجازه!! بزارید ما جواب بدیم.

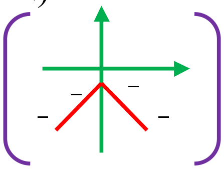
نامعادله‌ی (۱): از اونجایی که x^2+1 همواره مثبته بدون اینکه جهت نامساوی عوض بشه. یعنی:



پس می تونم x^2+1 رو در نامعادله‌ی (۱) ضرب کنم

$$\frac{1}{x^2+1} > 2-x \xrightarrow{\times \overbrace{x^2+1}^{\text{مثبت}}} 1 > (2-x)(x^2+1)$$

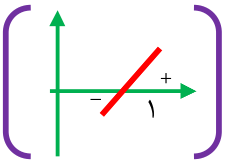
نامعادله‌ی (۲): چون که $-|x|-1$ همواره منفیه



پس می تونم $(-|x|-1)$ رو در نامعادله‌ی (۲) ضرب کنم ولی باید حواسم جمع باشه که جهت نامساوی رو عوض کنم. یعنی:

$$\frac{1}{-|x|-1} > 2-x \xrightarrow{\times \overbrace{-|x|-1}^{\text{منفی}}} 1 < (2-x)(-|x|-1)$$

نامعادله‌ی (۳): عبارت $(x-1)$ در $x=1$ تغییر علامت میده



، یعنی نه همواره مثبته و نه همواره منفی.

پس حق ندارم $(x-1)$ رو در نامعادله‌ی (۳) ضرب کنم. چون که اصلاً نمی دونم جهت نامساوی روبایـد عوض کنم یا نه.

$$\frac{2}{x-1} > x-2 \xrightarrow{\times \overbrace{x-1}^{?}} 1 \overbrace{\boxed{\ > \ <\ }}^{?} (x-2)(x-1)$$

آفرین گُلَم. شما نمی تونید دو طرف یک نامعادله رو در عبارتی که تغییر علامت می ده ضرب کنید.

شما نمی تونید دو طرف یک نامعادله رو به عبارتی که تغییر علامت می ده تقسیم کنید.

: آقا اجازه؟ پس چی کار باید بکنیم؟

عزیزم، همون طور که خودت گفتی دو طرف نامعادله‌ی شماره (۳) رو نمی تونیم در $(x-1)$ ضرب کنیم. بنابراین:

$$\frac{2}{x-1} > x-2 \Rightarrow \frac{2}{x-1} - (x-2) > 0 \Rightarrow \frac{2-(x-1)(x-2)}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{2-(x^2-3x+2)}{x-1} > 0$$

$$\boxed{\overbrace{\frac{x(3-x)}{x-1}}^{f(x)} > 0} \Rightarrow$$

x		ف 0		ف 1		ف 3	
$f(x)$	$+$		$-$	$\|\|$	$+$		$-$

$$\xrightarrow{f(x)>0} x \in (-\infty, 0) \cup (1, 3)$$

⌘**سؤال: مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2-3x+2\le 0$ کدامست؟**

$$f(x)=x^2-3x+2 \Rightarrow \text{ریشه‌ها} \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow$$

x		1		2	
$f(x)=1x^2-3x+2$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$

موافق مخالف موافق

$\xrightarrow{f(x)\le 0} x\in[1,2]$

⌘**سؤال: مجموعه جواب نامعادله‌ی $-x^2+2x-4\ge 0$ را پیدا کنید.**

$$\boxed{\overbrace{-x^2+2x-4}^{f(x)}}\ge 0$$

$$f(x)=-x^2+2x-4 \xrightarrow{\Delta=4-4(-1)(-4)=-12<0} \begin{cases} \Delta<0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$f(x)<0$

همونطور که می بینید همه‌ی نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست (یعنی منفی)، در صورتی که مسئله میگه محدوده ای از x ها رو پیدا کن که در اون محدوده، نمودار $f(x)$ بالاتر ازمحور x ها یا روی محور x ها باشه (یعنی بزرگتر یا مساوی صفر). نتیجه اینکه چنین محدوده ای که مسئله از ما می خواد، وجود نداره. یعنی (ϕ= مجموعه جواب)

تجزیه‌ی یک تابع به کمک ریشه های آن تابع

☜ **آیا $x=1$ و $x=2$ ریشه های تابع $f(x)=x^2-3x+2$ هستن یا نه؟**

بله هستن. چون اگه $x=1$ و $x=2$ رو درون تابع قرار بدیم مقدار تابع صفر میشه. یعنی:

$$\begin{cases} f(1)=(1)^2-3(1)+2=1-3+2=0 \\ f(2)=(2)^2-3(2)+2=4-6+2=0 \end{cases}$$

آیا به نظر شما میشه تابع $f(x)=x^2-3x+2$ رو تجزیه کرد؟

بله میشه: $f(x)=(x-1)(x-2)$

☜ **فکر می کنید چه رابطه ای بین ریشه های این تابع و عامل های تجزیه شده وجود داره؟**

$x=1$ ریشه‌ی عامل $(x-1)$ و $x=2$ ریشه‌ی عامل $(x-2)$ هست.

☜ **آیا به نظر شما میشه گفت که اگه $x=a$ ریشه‌ی چند جمله ای $f(x)$ باشه، اون موقع $(x-a)$ یکی از عامل های $f(x)$ هست؟**

با توجه به بحث های بالا میشه چنین نتیجه ای رو گرفت. یعنی :

$\boxed{\text{ریشه‌ی چند جمله ای } f \quad x=a \Rightarrow \text{عامل چند جمله ای } f \text{ خواهد بود } (x-a) \Rightarrow f(x)=(x-a)g(x)}$

⌘**سؤال:** تابع $f(x)=۲x^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ دارای سه ریشه‌ی $x=۲, x=۱$ و $x=-۳$ می باشد. عرض از مبدأ تابع کدامست؟

$$\begin{cases} f(x)=۲x^{۳}+bx^{۲}+cx+d \\ f(x)=۲(x-۱)(x-۲)(x+۳) \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ تابع}=f(۰)} f(۰)=۲(-۱)(-۲)(۳)=۱۲$$

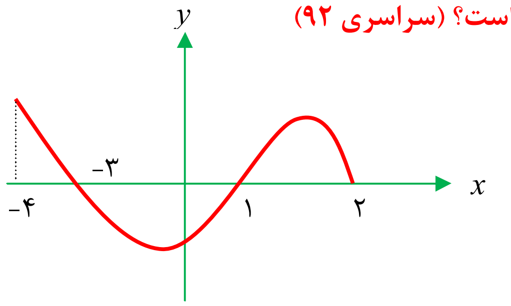
⌘**سؤال:** به ازای چه مقادیری از m نامساوی $\frac{x^{۲}+۴x+m}{x^{۲}+x+۲}<۲$ به ازای هر x برقرار است؟

$$x^{۲}+x+۲ \rightarrow \begin{cases} a>۰ \\ \Delta<۰ \end{cases} \xrightarrow{\qquad} \text{همواره مثبت}$$

$$x^{۲}+۴x+m<۲x^{۲}+۲x+۴ \rightarrow x^{۲}-۲x+(۴-m)>۰$$

$$\text{باید} \begin{cases} a>۰ \qquad ۱>۰ \\ \Delta'<۰ \rightarrow ۱-(۴-m)<۰ \rightarrow ۱-۴+m<۰ \rightarrow m<۳ \end{cases}$$

⌘**سؤال:** شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)



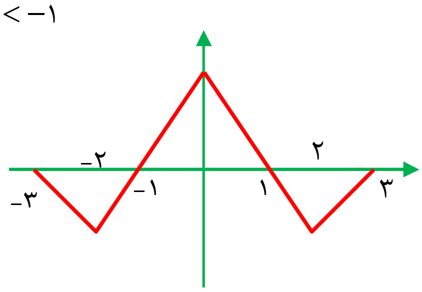
$$\sqrt{xf(x)}\geq ۰ \rightarrow \begin{cases} x>۰ \xrightarrow{f(x)\geq ۰} ۱\leq x\leq ۲ \cup -۴\leq x\leq -۳ \xrightarrow{x>۰} ۱\leq x\leq ۲ \\ x=۰ \xrightarrow{\qquad} xf(x)\geq ۰ \quad \checkmark \\ x<۰ \xrightarrow{f(x)\leq ۰} -۳\leq x\leq ۱ \xrightarrow{x<۰} -۳\leq x<۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow ۱\leq x\leq ۲ \cup \{۰\} \cup -۳\leq x<۰ \rightarrow ۱\leq x\leq ۲ \cup -۳\leq x\leq ۰$$

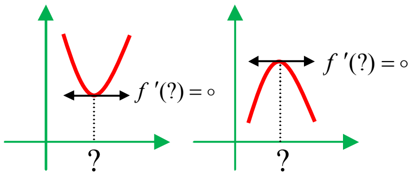
⌘**سؤال:** نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل مقابل است. به ازای چه مقادیری از x عبارت $\frac{۱}{\sqrt{xf(x)}}$ بامعنی می‌شود؟

$$xf(x)>۰ \rightarrow \begin{cases} x>۰ \xrightarrow{f(x)>۰} -۱<x<۱ \xrightarrow{x>۰} ۰<x<۱ \\ x<۰ \xrightarrow{f(x)<۰} -۳<x<-۱ \cup ۱<x<۳ \xrightarrow{x<۰} -۳<x<-۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow ۰<x<۱ \cup -۳<x<-۱$$



رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم به کمک نقطه‌ی اکسترمم و علامت a



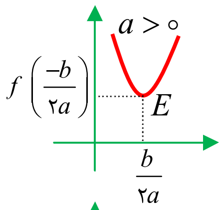
Max و min یک تابع درجه‌ی دو، تنها نقطه ای از نموداره که شیب منحنی (مشتق)، در اون نقطه صفره. بنابراین برای پیدا کردن طول نقطه‌ی اکسترمم کافیه مشتق تابع رو برابر صفر قرار بدیم.

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b \xrightarrow{f'(x)=0} 2ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}$$ **(طول نقطه‌ی اکسترمم)**

حالا اگه طول نقطه‌ی اکسترمم رو درون تابع قرار بدیم، عرض نقطه‌ی اکسترمم هم به دست می آید.

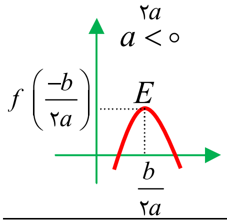
(عرض نقطه‌ی اکسترمم) $$f(x)=ax^2+bx+c \xrightarrow{x=\frac{-b}{2a}} \boxed{f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}}$$

در تابع درجه‌ی دوم، نقطه‌ی $E\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ اکسترمم هم به دست می آد.



شما با داشتن نقطه‌ی اکسترمم و معلوم بودن علامت a می تونید نمودار تابع درجه‌ی دو رو رسم کنید:

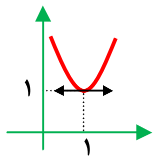
I) اگه علامت a مثبت باشه کافیه نمودار رو از نقطه‌ی اکسترمم با دستهای رو به بالا رسم کنید:



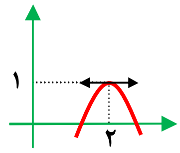
II) اگه علامت a منفی باشه کافیه نمودار رو از نقطه‌ی اکسترمم با دستهای رو به بالا رسم کنید:

⌘**سؤال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.**

$$f(x)=x^2-2x+2 \Rightarrow E\left(-\frac{b}{2a}=1, f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(1)=1-2+2=1\right) \Rightarrow E(1,1), a>0 \longrightarrow$$



$$f(x)=-x^2+4x-3 \Rightarrow E\left(-\frac{b}{2a}=2, f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(2)=-4+8-3=1\right) \Rightarrow E(2,1), a<0 \longrightarrow$$

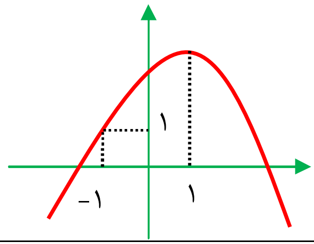


⌘**سؤال: اگر $f(2x-1)=4x^2-4x$ رأس سهمی $g(x)=f(2x+1)$ کدام است؟**

۱) $A\left(\frac{1}{2},1\right)$ ۲) $A\left(-\frac{1}{2},1\right)$ ۳) $A\left(\frac{1}{2},-1\right)$ ۴) $A\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

$$f(2x-1)=4x^2-4x+1-1=(2x-1)^2-1$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2-1 \Rightarrow f(2x+1)=(2x+1)^2-1=4x^2+4x+1-1=4x^2+4x$$
$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2(4)}=-\frac{1}{2}$$
$$y_S=4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}\right)=1-2=-1 \Rightarrow S\left(-\frac{1}{2},-1\right)$$

⌘سؤال: نمودار $f(x)=ax^{۲}+(a+۳)x+c$ به صورت شکل مقابل است؟ مقدار f کدام است؟

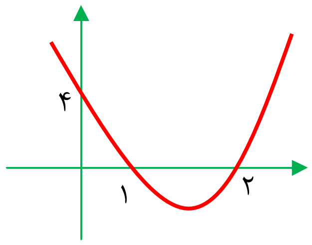


$$x=۱=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow\frac{-(a+۳)}{۲a}=۱\Rightarrow ۲a=-a-۳\Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow f(x)=-x^{۲}+۲x+c\xrightarrow{(-۱,۱)}۱=-۱-۲+c\Rightarrow c=۴$$

$$\Rightarrow f(x)=-x^{۲}+۲x+۴\Rightarrow y_{max}=f(۱)=-۱+۲+۴=۵$$

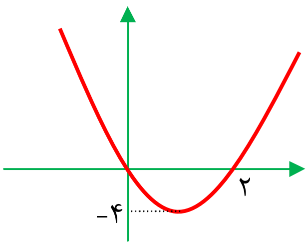
⌘مثال صفحه ۱۶ کتاب درسی :



$$y=a(x-۱)(x-۲)\xrightarrow{f(۰)=۴}۴=a(۰-۱)(۰-۲)$$

$$\Rightarrow a=۲\Rightarrow y=۲(x-۱)(x-۲)=۲x^{۲}-۶x+۴$$

⌘تمرین ۶ صفحه ۱۸ : الف)



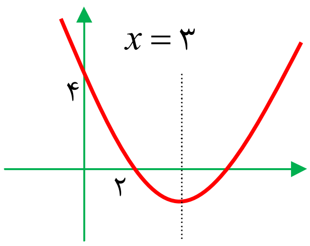
در رأس سهمی $\left(\frac{۰+۲}{۲}=۱\right)$ عرض برابر ۴- است.

$$y=a(x-۰)(x-۲)=\mathrm{ax(x-۲)}\xrightarrow{f(۱)=-۴}-۴=a(۱)(۱-۲)\Rightarrow a=-۴$$

$$\Rightarrow y=-۴x(x-۲)=-۴x^{۲}+۸x$$

⌘تمرین ۶ صفحه ۱۸ : ب)

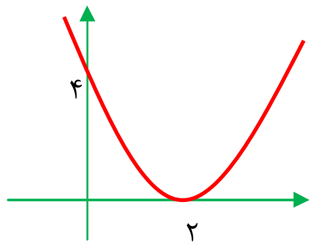
ریشهٔ دیگر معادلهٔ درجهٔ دوم $۴=۱+۳$ است پس:



$$y=a(x-۲)(x-۴)\xrightarrow{f(۰)=۴}۴=a(۰-۲)(۰-۴)\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۲)(x-۴)=\frac{۱}{۲}(x^{۲}-۶x+۸)$$

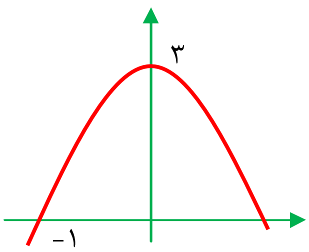
⌘تمرین ۶ صفحه ۱۸ : پ)



$$y=a(x-۲)^{۲}\xrightarrow{f(۰)=۴}۴=a(۰-۲)\Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow y=(x-۲)^{۲}$$

⌘تمرین ۶ صفحه ۱۸ : ت)

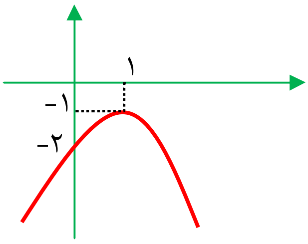


ریشه دیگر معادله $x=۱$ است.

$$y=a(x+۱)(\mathrm{x}-۱)\xrightarrow{f(۰)=۳}۳=a(۰+۱)(۰-۱)\Rightarrow a=-۳$$

$$\Rightarrow y=-۳(x+۱)(x-۱)=-۳(x^{۲}-۱)=-۳x^{۲}+۳$$

⌘تمرین ۶ صفحه ۱۸ : ج)

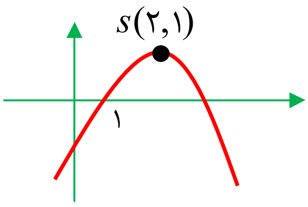


$$y=a(x-۱)^۲-۱ \xrightarrow{f(۰)=-۲} -۲=a(\Rightarrow-۱)^۲-۱$$

$$\Rightarrow -۲=a-۱ \Rightarrow a=-۱ \Rightarrow y=-(x-۱)^۲-۱=-(x^۲-۲x+۱)-۱$$

$$\Rightarrow y=-x^۲+۲x-۲$$

⌘تمرین ۶ صفحه ۱۸ : ث)



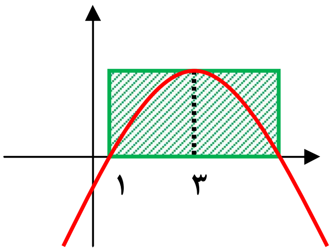
$$y=a(x-۲)^۲+۱ \xrightarrow{f(۱)=۰} ۰=a(۱-۲)^۲+۱$$

$$\Rightarrow ۰=a+۱ \Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow y=-(x-۲)^۲+۱=-(x^۲-۴x+۴)+۱$$

$$=-x^۲+۴x-۴+۱=-x^۲+۴x-۳$$

⌘سؤال: در شکل زیر مساحت مستطیل سایه زده شده برابر ۱۲ است. نمودار سهمی محور y ها را در نقطه ای با کدام عرض قطع می کند؟



$x=۳$ خط تقارن سهمی می باشد پس نقطه $(۵,۰)$ نقطه دیگر برخورد سهمی با محور x هاست بنابراین طول مستطیل سایه زده شده برابر ۴ است. از آنجا که مساحت مستطیل برابر ۱۲ می باشد. طول ضلع دیگر مستطیل برابر ۳ است پس با توجه به شکل عرض سهمی برابر ۳ می باشد. یعنی نقطه (۳، ۳) رأس سهمی است. معادله سهمی به صورت $y=a(x-۳)^۲+۳$ است با توجه به آن که نقطه $(۱,۰)$ روی این سهمی است پس:

$$۰=a(۱-۳)^۲+۳ \Rightarrow ۰=۴a+۳ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۴}$$

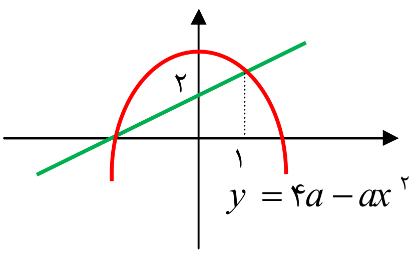
$$\Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}(x-۳)^۲+۳ \xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}} y(۰)=-\frac{۳}{۴}(۰-۳)^۲+۳$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۴}(۹)+۳=-\frac{۲۷}{۴}+۳=-۳/۷۵$$

⌘سؤال: با توجه به شکل مقابل مقدار a کدام است.

$$۴a-ax^۲=a(۴-x^۲)=۰ \Rightarrow x=\pm۲$$

سهمی مورد نظر محور طول ها را در دو نقطه به طول های ۲ و ۲- قطع می کند پس مطابق شکل داده شده از نقطه $(-۲,۰)$ می گذرد ضمناً عرض از مبدأ خط برابر ۲ است. یعنی خط از نقطه $(۰,۲)$ می گذرد. معادله خط برابر است با:

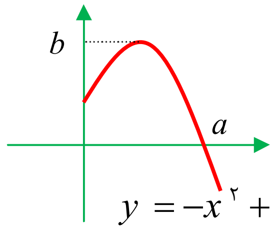


$$\frac{y-۰}{x+۲}=\frac{۲-۰}{۰+۲} \Rightarrow y=x+۲$$

خط و سهمی در نقطه ای به طول یک متقاطع هستند پس:

$$۴a-a\times۱^۲=۱+۲ \Rightarrow ۳a=۳ \Rightarrow a=۱$$

⌘**سؤال: در شکل زیر a , b را بدست آورید.**



$$y=-x^{۲}+۲x+۳=-(x+۱)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۳,-۱$$

مقدار a طول ریشه بزرگتر معادله است پس a=۳ از طرفی b عرض سهمی است:

$$b=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱۶}{۴(-۱)}=۴\Rightarrow a+b=۷$$

⌘**سؤال: با فرض اینکه $۲x+y=۲$ کمترین مقدار $x^{۲}-۶y$ کدام است؟**

۱) -۳۶ ۲) -۴۸ ۳) -۱۲ ۴) -۶

$$۲x+y=۲\Rightarrow y=۲-۲x$$
$$x^{۲}-۶y=x^{۲}-۶(۲-۲x)=x^{۲}+۱۲x-۱۲=x^{۲}+۱۲x+۳۶-۳۶-۱۲$$
$$=(x+۶)^{۲}-۴۸\Rightarrow(x+۶)^{۲}\geq ۰\Rightarrow(x+۶)^{۲}-۴۸\geq -۴۸$$

⌘**سؤال: اگر در سهمی $\frac{m}{۲}x^{۲}+(۲-m^{۲})x+m$ طول نقطه مینیمم و در صورت وجود $x=۱$ باشد، عرض از مبدأ سهمی کدام است؟**

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(۲-m^{۲})}{۲\left(\frac{m}{۲}\right)}=\frac{m^{۲}-۲}{m}=۱\rightarrow m^{۲}-۲=m\rightarrow m^{۲}-m-۲=۰\rightarrow(m-۲)(m+۱)=۰\rightarrow\begin{cases}m=۲\\m=-۱\end{cases}$$

چون تو سؤال گفته طول نقطه مینیمم پس باید ضریب $x^{۲}$ مثبت باشد یعنی : $m=۲$

$$x^{۲}-۲x+۲\Rightarrow \text{عرض از مبدأ}\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$$

⌘**سؤال: نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $y=mx^{۲}-x+m$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات است حدود m کدام است.**

۱) $۰<m<۱$ ۲) $۰<m<\frac{۱}{۲}$ ۳) $|m|<۱$ ۴) $|m|<\frac{۱}{۲}$

چون نقطهٔ مینیمم تابع، در ناحیهٔ چهارم است پس طول آن مثبت و عرض آن منفی است بنابراین:

$$x_{\min}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۱}{۲m}=\frac{۱}{۲m}>۰\Rightarrow m>۰\qquad(۱)$$

$$y_{\min}=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{۱-۴m^{۲}}{۴m}<۰\xrightarrow{(۱)}۱-۴m^{۲}>۰\Rightarrow ۴m^{۲}<۱\Rightarrow-\frac{۱}{۲}<m<\frac{۱}{۲}\xrightarrow{(۱)}۰<m<\frac{۱}{۲}$$

⌘**سؤال: بیشترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۲}+۴x+۵$ برابر ۹ است. معادلهٔ محور تقارن این تابع کدام است.**

۱) $x=۱$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۴$

$$\frac{-\Delta}{۴a}=۹\Rightarrow\Delta=-۳۶a\Rightarrow ۱۶-۴a=-۳۶a\Rightarrow ۱۶=-۳۲a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

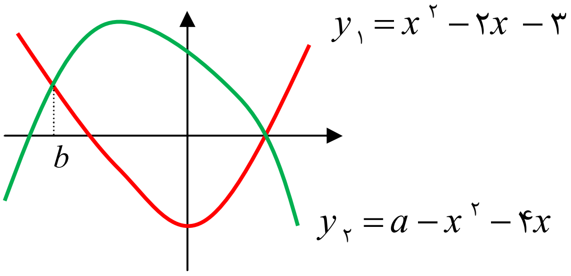
$$\text{محور تقارن}=\frac{-b}{۲a}=-\frac{۴}{۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)}=۴\Rightarrow x=۴$$

⌘**سؤال: حدود m کدام باشد تا هیچ نقطه ای از تابع $y=x^{۲}-۴x+m$ دارای فاصلهٔ ۵ از محور x ها نباشد.**

۱) $m>۹$ ۲) $m<-۲$ ۳) $-۲<m<۳$ ۴) $-۵<m<-۲$

$$x^{۲}-۴x+m=۵\Rightarrow x^{۲}-۴x+m-۵=۰$$
$$\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow ۱۶-۴(m-۵)<۰\Rightarrow ۴m>۳۶\Rightarrow m>۹$$

⌘**سؤال: با توجه به شکل مقدار b کدام است؟**



دو سهمی در سمت مثبت محور x ها با هم تقاطع دارند.

$$x^{۲}-۲x-۳=۰\Rightarrow(x+۱)(x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=۳\longrightarrow \text{ریشه تقاطع روی محور } x \text{ ها}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(۳,۰)\xrightarrow{\text{در } y_{۲} \text{ صدق می کند.}}۰=a-۹-۴(۳)\Rightarrow a=۲۱$$
$$\Rightarrow y^{۲}=۲۱-x^{۲}-۴x=-x^{۲}-۴x+۲۱$$

حال دو معادله را با هم برابر قرار می دهیم تا مختصات دومین نقطه تقاطع دو سهمی بدست می آید:

$$x^{۲}-۲x-۳=-x^{۲}-۴x+۲۱\Rightarrow ۲x^{۲}+۲x-۲۴=۰\Rightarrow x^{۲}+x-۱۲\Rightarrow(x+۳)(x-۴)=۰$$

پس طول نقطه دیگر تقاطع ۴− است ($b=-۴$).

⌘**سؤال: با فرض $x>۰$ کمترین مقدار تابع $f(x)=۴x+\frac{۹}{x}$ کدام است؟**

$$y=۴x+\frac{۹}{x}\Rightarrow yx=۴x^{۲}+۹\Rightarrow ۴x^{۲}-yx+۹=۰\Rightarrow\Delta\geq ۰$$
$$\Rightarrow y^{۲}-۴\times۴\times۹\geq۰\Rightarrow y^{۲}\geq ۴^{۲}\times۳^{۲}\Rightarrow y\geq ۴\times۳=۱۲$$

(روش دوم) $۴x+\frac{۹}{x}\geq ۲\sqrt{(۴x)\left(\frac{۹}{x}\right)}=۲\sqrt{۳۶}=۲\times ۶=۱۲$

$$a+b\geq ۲\sqrt{ab}\qquad a,b>۰$$
$$a+b\leq -۲\sqrt{ab}\qquad a,b<۰$$

⌘ **سؤال:** جدول تعیین علامت عبارت $P=(x-۲)(x^{۲}+ax+۶)$ به صورت زیر است. مقدار a کدام است؟

x					
P	$-$	|	$-$	|	$+$

۱) ۵　　۲) -۵　　۳) $-۲\sqrt{۶}$　　۴) $\sqrt{۶}$

☜ پاسخ: **گزینه ۲**

در جدول تعیین علامت یک چند جمله ای اگر اطراف یک ریشه علامت عبارت بدون تغییر بماند پس آن ریشه، یک ریشهٔ مضاعف است. در عبارت $p=(x-۲)(x^{۲}+ax+۶)$ یکی از ریشه ها ۲ است. پس یا عبارت $x^{۲}+ax+۶$ یک ریشهٔ ۲ دارد تا عامل p $(x-۲)^{۲}$ داشته باشد یا خود عبارت $x^{۲}+ax+۶$ یک ریشه مضاعف دارد پس:

الف) اگر $x=۲$ یک ریشه $A=x^{۲}+ax+۶$ باشد داریم:

$$۲^{۲}+۲a+۶=۰\Rightarrow ۲a=-۱۰\Rightarrow a=-۵$$

ب) اگر $x=۲$ یک ریشه A نباشد و Δ عبارت A صفر باشد (A مربع کامل باشد):

$$\Delta=a^{۲}-۲۴=۰\Rightarrow a=\pm\sqrt{۲۴}=\pm ۲\sqrt{۶}$$

اگر $a=-۵$ باشد $p=(x-۲)(x^{۲}-۵x+۶)$ است و ریشه های p به صورت زیرند:

$$(x-۲)(x^{۲}-۵x+۶)=۰\Rightarrow (x-۲)(x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow (x-۲)^{۲}(x-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۲\\ x=۳\end{cases}$$

پس جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		۲		۳	
p	$-$	۰	$-$	۰	$+$

اما اگر $a=-۲\sqrt{۶}$ باشد آنگاه $p=(x-۲)(x-\sqrt{۶})^{۲}$ است چون ریشهٔ بزرگتر معادله یعنی $\sqrt{۶}$ همان ریشهٔ مضاعف است پس در اطراف $\sqrt{۶}$ تغییر علامت نداریم و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		۲		$\sqrt{۶}$	
p	$-$	۰	$+$	۰	$+$

پس a نمی تواند $-۲\sqrt{۶}$ باشد.

اگر $a=۲\sqrt{۶}$ باشد $p=(x-۲)(x+\sqrt{۶})^{۲}$ است. چون ریشهٔ بزرگتر معادله ۲ است پس جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$-\sqrt{۶}$		۲	
p	$-$	۰	$-$	۰	$+$

پس a می تواند مقادیر ۵- یا $۲\sqrt{۶}$ را اختیار کند که در بین گزینه ها ۵- وجود دارد.

⌘ **سؤال:** مجموعه جواب نامعادله $\dfrac{(x+۲)^۲(x^۲-۳x+۲)}{(-x^۲+x)^۳}\geq ۰$ کدام است؟

۱) $(۰,۲]\cup\{-۲\}$ ۲) $(۰,۱)\cup(۱,۲]\cup\{-۲\}$

۳) $(۰,۲]$ ۴) $[-۲,۰]\cup(۱,۲]$

☜ پاسخ: **گزینه۲**

$$P(x)=\frac{(x+۲)^۲(x^۲-۳x+۲)}{(-x^۲+x)^۳}\geq ۰$$

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$$

$$x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۱\\x=۲\end{cases}$$

$$-x^۲+x=۰\Rightarrow x(-x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۰\\x=۱\end{cases}$$

x		-۲		۰		۱		۲	
$(x+۲)^۲$	+	۰	+		+		+		+
$x^۲-۳x+۲$	+		+		+	۰	−	۰	+
$(-x^۲+x)^۳$	−		−	۰	+	۰	−		−
$p(x)$	−	۰	−		+		+	۰	−
				ت. ن		ت. ن			

	-۲		۰		۱		۲	
−		−		+		+		−
			ت.ن		ت.ن			

مجموعه جواب: $(۰,۱)\cup(۱,۲]\cup\{-۲\}$

⌘ **سؤال:** عبارت $A=\dfrac{x^۳-x^۲-x+۱}{۲x+m-۱}$ به ازای کدام مقدار m همواره نامنفی است؟ $(x\neq -۱)$

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) صفر

☜ پاسخ: **گزینه۱**

ابتدا صورت کسر را تجزیه می کنیم:

$$A=\frac{x^۲(x-۱)-(x-۱)}{۲x+m-۱}=\frac{(x-۱)(x^۲-۱)}{۲x+m-۱}=\frac{(x-۱)(x-۱)(x+۱)}{۲x+m-۱}=\frac{(x-۱)^۲(x+۱)}{۲x+m-۱}$$

چون $(x-۱)^۲$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است باید عبارت $\dfrac{(x+۱)}{۲x+m-۱}$ همیشه بزرگتر یامساوی صفر باشد و این در صورتی ممکن است که $m-۱=۲$ یعنی $m=۳$ باشد زیرا:

$$m=۳\Rightarrow A=\frac{x+۱}{۲x+۳-۱}=\frac{x+۱}{۲x+۲}$$

$$=\frac{x+۱}{۲(x+۱)}\overset{x\neq -۱}{=\!=\!=}\frac{۱}{۲}\Rightarrow A=\frac{۱}{۲}(x-۱)^۲\geq ۰$$

⌘ **سؤال**: اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+1}{3}+\frac{2x-1}{2}>\frac{x+a}{6}$ به صورت $x>-\frac{1}{7}$ باشد آنگاه مقدار حقیقی a برابر با کدام گزینه زیر است؟

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) -2 ۴) -3

☜ پاسخ: **گزینه۳**

$$\frac{x+1}{3}+\frac{2x-1}{2}>\frac{x+a}{6}\xrightarrow{\times 6}2(x+1)+3(2x-1)>x+a$$

$$\Rightarrow 2x+2+6x-3>x+a\Rightarrow 8x-1>x+a\Rightarrow 8x-x>a+1\Rightarrow 7x>a+1\Rightarrow x>\frac{a+1}{7}$$

از طرفی مجموعه جواب این نامعادله به صورت $x>-\frac{1}{7}$ می باشد بنابراین داریم:

$$\frac{a+1}{7}=-\frac{1}{7}\Rightarrow a+1=-1\Rightarrow a=-2$$

⌘ **سؤال**: مجموعه جواب نامعادله $\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}\geq 2$ شامل چند عدد صحیح می باشد؟

۱) ۴   ۲) ۲   ۳) ۵   ۴) ۳

☜ پاسخ: **گزینه۴**

$$\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}-2\geq 0\Rightarrow\frac{4-2x-2x^2}{x^2}\geq 0\Rightarrow\frac{-2x^2-2x+4}{x^2}\geq 0\Rightarrow p(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2}\leq 0$$

$$\begin{cases}x^2+x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-2\end{cases}\\x^2=0\Rightarrow x=0\end{cases}\qquad\Rightarrow\frac{(x-1)(x+2)}{x^2}\leq 0$$

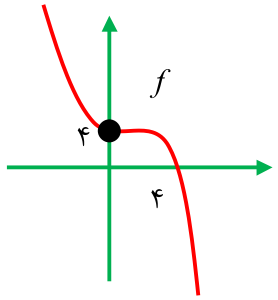
x		-2		0		1	
x^2+x-2	+	0	−		−	0	+
x^2	+		+	0	+		+
$p(x)$	+		−		−	0	+

	-2		0		1	
+		−	ت.ن	−		+

$$p(x)\leq 0\Rightarrow -2\leq x<0\ \text{یا}\ 0<x\leq 1\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=-1\\x=1\end{cases}$$

مجموعه جواب شامل ۳ عدد صحیح است.

⌘ **سؤال**: شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ می باشد عبارت $A=\dfrac{xf(x)(۲x^{۲}+۱)}{(۳-x)|x+۲|}$ در بازه $(۰,a)$ همواره مثبت است. بیشترین مقدار a کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۴

☜ پاسخ: **گزینه ۲**

تابع f در بازه $(-\infty,۴)$ مثبت و در بازه $(۴,+\infty)$ منفی است. جدول تعیین علامت را رسم می کنیم:

x		-۲		۰		۳		۴	
$f(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$\lvert x+۲\rvert$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$۳-x$	$+$	۰	$+$		$+$	۰	$-$		$-$
A	$-$		$-$	۰	$+$		$-$	۰	$+$
		ت.ن				ت.ن			

توجه کنید که عبارت $۲x^{۲}+۱$ همواره مثبت است و تأثیری در تعیین علامت ندارد. با توجه به جدول تعیین علامت عبارت در بازه $(۰,۳)$ مثبت است که از مقایسه آن با بازه $(۰,a)$ در صورت سوال مقدار $a=۳$ به دست می آید.

⌘ **سؤال**: اگر $f(x)=(x-۱)(x-۲)$ و به ازای $a\le x\le b$ شرط $f(x)\le ۲$ برقرار باشد بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) -۳　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۱

☜ پاسخ: **گزینه ۲**

$$f(x)\le ۲\Rightarrow (x-۱)(x-۲)\le ۲\Rightarrow x^{۲}-۳x+۲\le ۲\Rightarrow x^{۲}-۳x\le ۰\Rightarrow x(x-۳)\le ۰$$

x		۰		۳	
x	$-$	۰	$+$		$+$
$x-۳$	$-$		$-$	۰	$+$
$x(x-۳)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

	۱		۲	
$+$		$-$		$+$

$$\Rightarrow x\in[۰,۳]\Rightarrow \max(b-a)=۳-۰=۳$$

⌘ **سؤال:** اگر برای تعیین علامت $q(x), p(x)$ به ترتیب از راست به چپ جداول زیر رسم شده باشد آنگاه $m \times n$ کدام است؟ ($p(x) = ax^2 + bx + c$ ، $q(x) = cx^2 + bx + a$ و $a, c > 0$)

x		$\frac{1}{3}$		m	
$p(x)$	+	۰	−	۰	+

x		۲		n	
$q(x)$	+	۰	−	۰	+

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{1}{6}$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

اگر x_0 ریشه معادله $p(x) = 0$ باشد داریم:

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0$$

تقسیم طرفین بر x_0^2 :

$$a + b\left(\frac{1}{x_0}\right) + c\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow c\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_0}\right) + a = 0 \quad (1)$$

رابطه درجه دوم $q(x) = cx^2 + bx + a$ را در نظر بگیرید طبق رابطه (۱) ریشه معادله $q(x) = 0$ برابر با $\frac{1}{x_0}$ است.

پس نتیجه می گیریم ریشه های معادله های $q(x) = 0$ و $p(x) = 0$ عکس یکدیگر هستند. طبق جدول های تعیین علامت داده شده می توان نتیجه گرفت ریشه های $q(x) = 0$ برابر با $x = 2$ و $x = n$ و ریشه های دو عبارت دو به دو باید عکس هم باشند یعنی:

$$m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow m \times n = \frac{3}{2}$$

⌘ **سؤال:** اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{bx + a}{ax + 1} \geq a$ برابر با بازه $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ باشد آنگاه کدام یک از گزینه های زیر همواره صحیح است؟ ($a^2 \neq b, a, b \neq 0$)

۱) $b = 6, a = 2$ ۲) $b = 6, a = -2$

۳) $b > 4, a = 2$ ۴) $b < 4, a = 2$

☜ **پاسخ: گزینه۴**

$$\frac{bx + a}{ax + 1} - a \geq 0 \Rightarrow \frac{bx + a - a^2x - a}{ax + 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(b - a^2)x}{ax + 1} \geq 0 \begin{cases} (b - a^2)x = 0 \xrightarrow{a^2 \neq b} x = 0 \\ ax + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

با توجه به این که مجموعه جواب نامعادله بازه $\left(-\frac{۱}{۲},۰\right]$ می باشد بنابراین $-\frac{۱}{a}$ باید برابر $-\frac{۱}{۲}$ بوده و علامت عبارت بین دو عدد $-\frac{۱}{۲}$ و ۰ در جدول تعیین علامت مثبت باشد بنابراین طبق جدول زیر ضریب x در صورت باید منفی باشد داریم:

$$-\frac{۱}{a}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a^۲)x}{ax+۱}\geq ۰ \xrightarrow{a=۲} \frac{(b-۴)x}{۲x+۱}\geq ۰$$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$+\infty$
$(b-۴)x$		+		+	۰	−	
$۲x+۱$		−	۰	+		+	
$\frac{(b-۴)x}{۲x+۱}$		−	ت. ن	+	۰	−	

بنابراین $b-۴<۰$ می باشد یعنی $b<۴$.

⌘ سؤال: مجموعه جواب حقیقی نامعادله $x^۳-۳x^۲+۳x-۱>\frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲$ کدام است؟

۱) $\{x : x>-۳\}$ ۲) $\{x : x<-۱\}$ ۳) $\{x : x<-۲\}$ ۴) $\{x : -۳<x<-۱\}$

☜ پاسخ: **گزینه ۳**

$$x^۳-۳x^۲+۳x-۱>\frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲\Rightarrow(x-۱)^۳>\frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲\Rightarrow\frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲-(x-۱)^۳<۰$$

$$\Rightarrow(x-۱)^۲\left(\frac{۳}{۲}x-(x-۱)\right)<۰\Rightarrow\underbrace{(x-۱)^۲\left(\frac{۱}{۲}x+۱\right)}_{P}<۰$$

x		-۲		۱	
P	−	۰	+	۰	+

$$\Rightarrow x<-۲$$