

# مجموعه، الگو و دنباله



ملاسعیدی @sinxcosx



09168324500



مجموعه های متناهی و نامتناهی

درس اول

متمم یک مجموعه

درس دوم

الگو و دنباله

درس سوم

دنباله های حسابی و هندسی

درس چهارم

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$$

مجموعه اعداد اول

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد حسابی

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا

مجموعه اعدادی که بتوان آنها را به صورت  $Q'$ : مجموعه اعداد گنگ نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

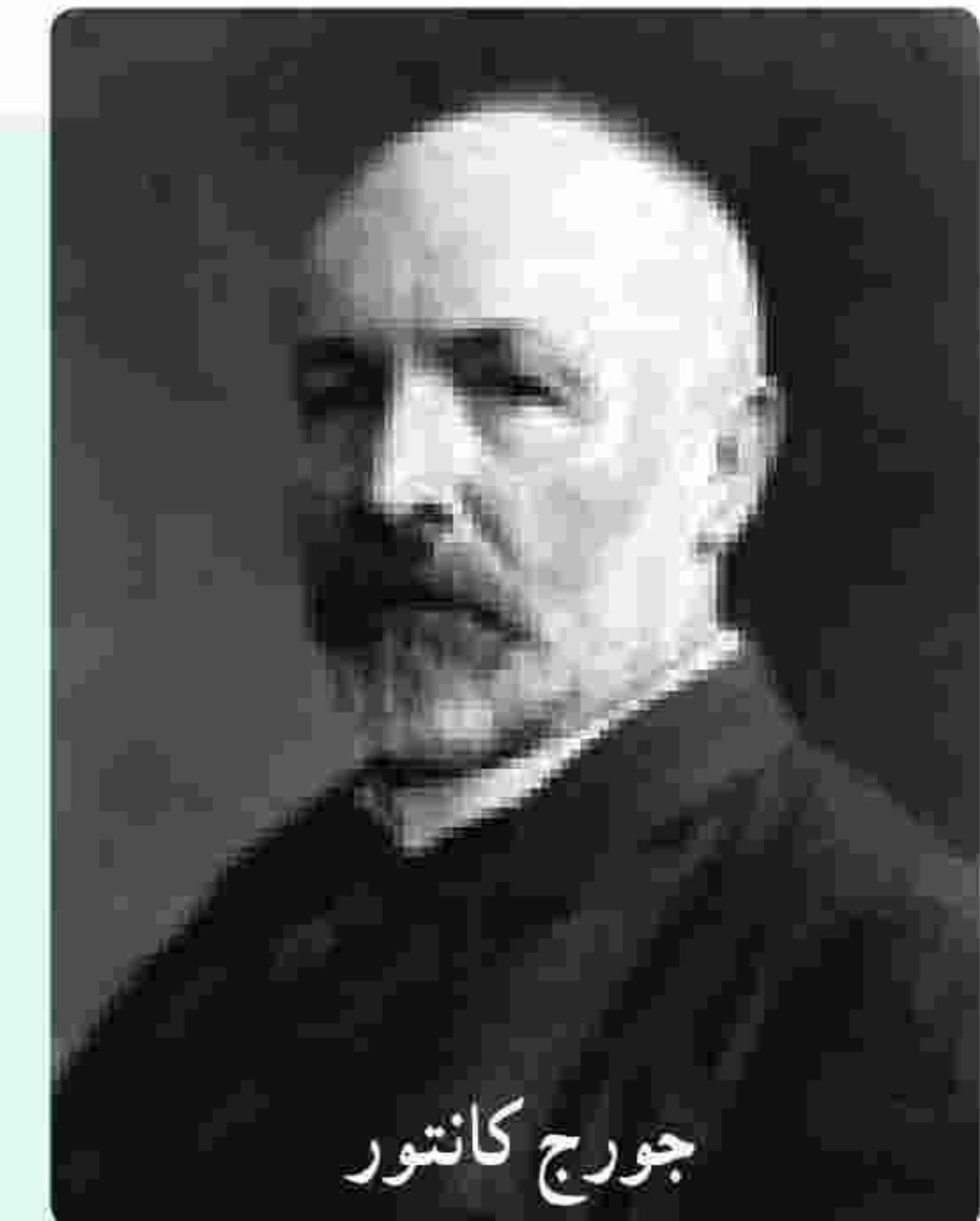
$$\mathbb{R} = Q \cup Q'$$

مجموعه اعداد حقیقی

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

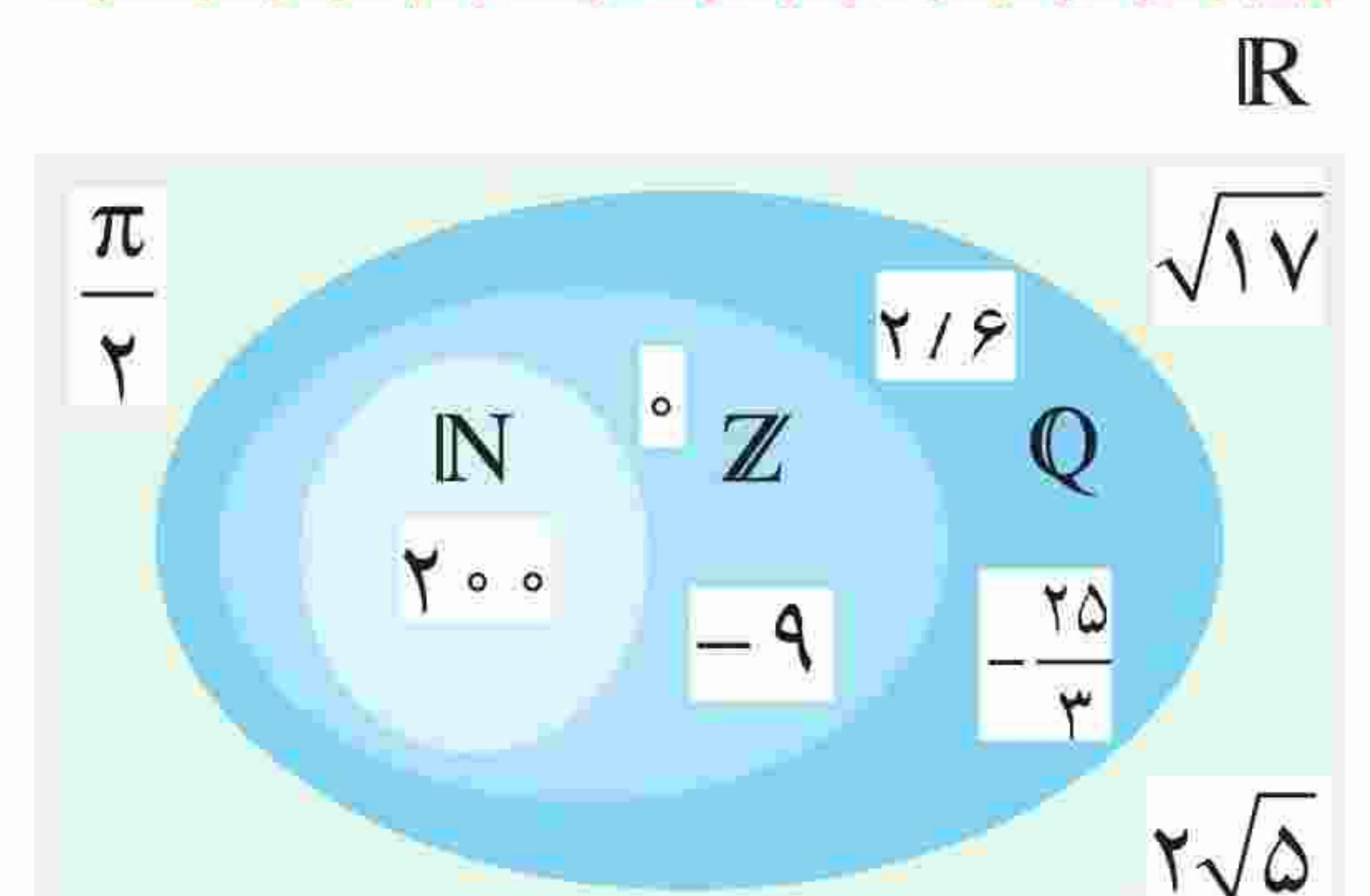
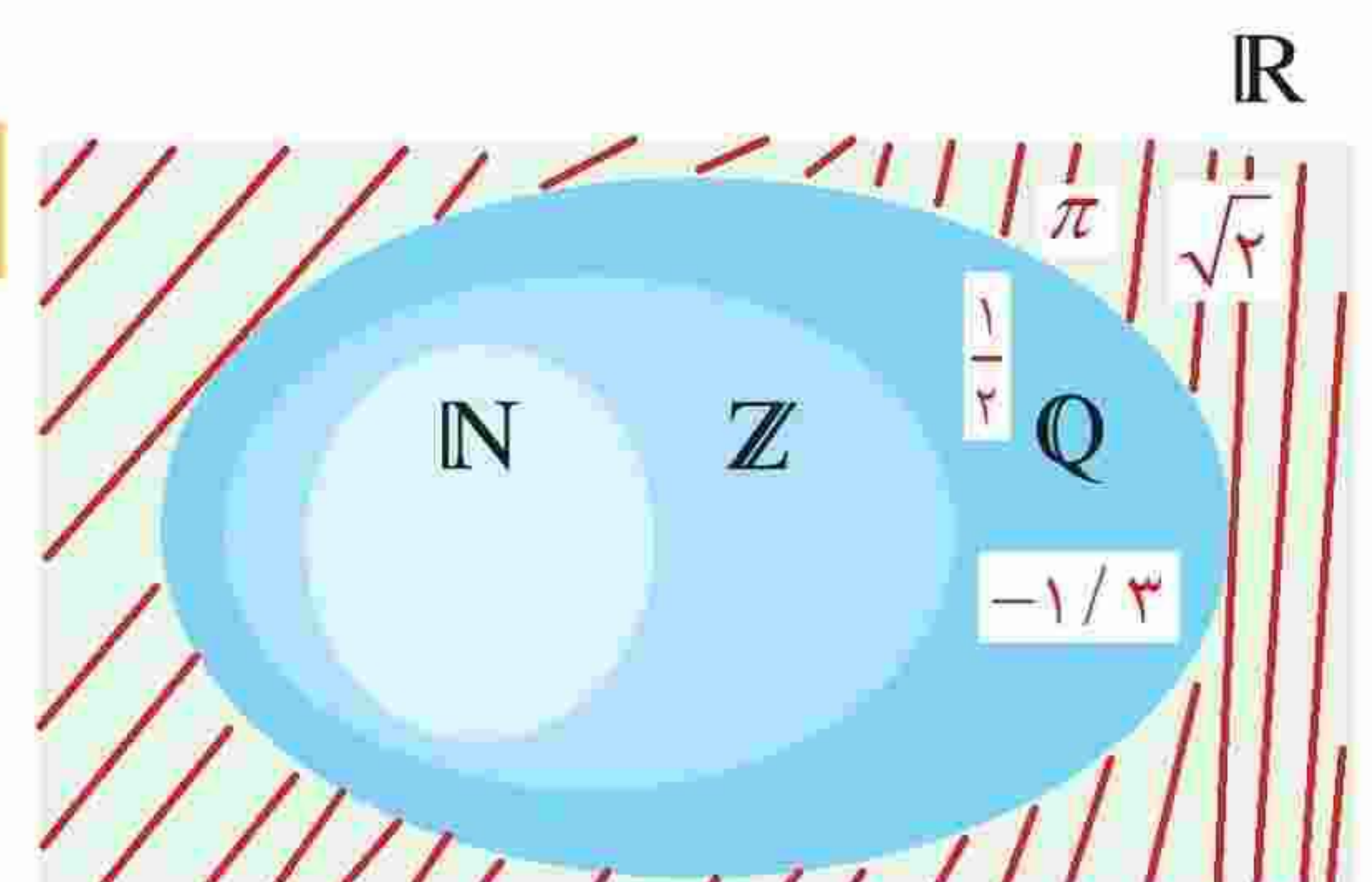


جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی دربارهٔ مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

کاردرکلاس



الف) مجموعه  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو

آن مجموعه‌ی اعداد گنگ است که با نماد  $Q'$  نمایش می‌دهیم

در شکل هاشور قرمز زده شده است. دو عضو آن عبارتند از:  $\sqrt{2}, \pi$

ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب

بنویسید.  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

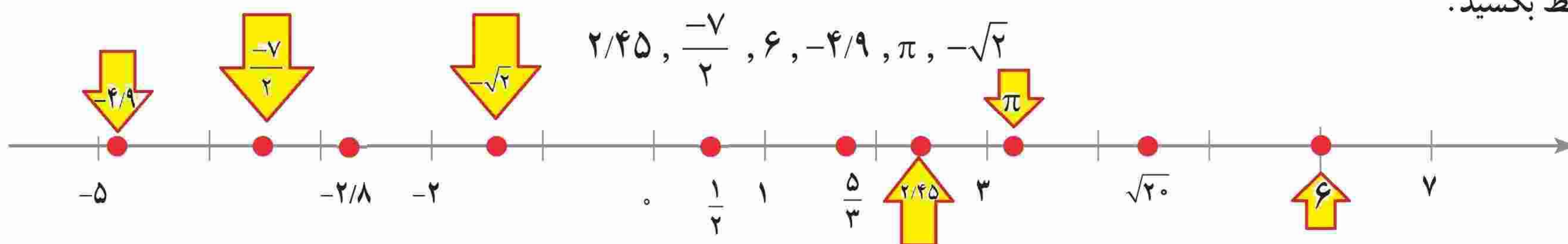
$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{6}, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.  $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$

ث) مجموعه  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$  چند عضو دارد؟ یک عضو دارد زیرا  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

توجه داشته باشید که  $\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset$

هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟ زیر آنها خط بکشید.



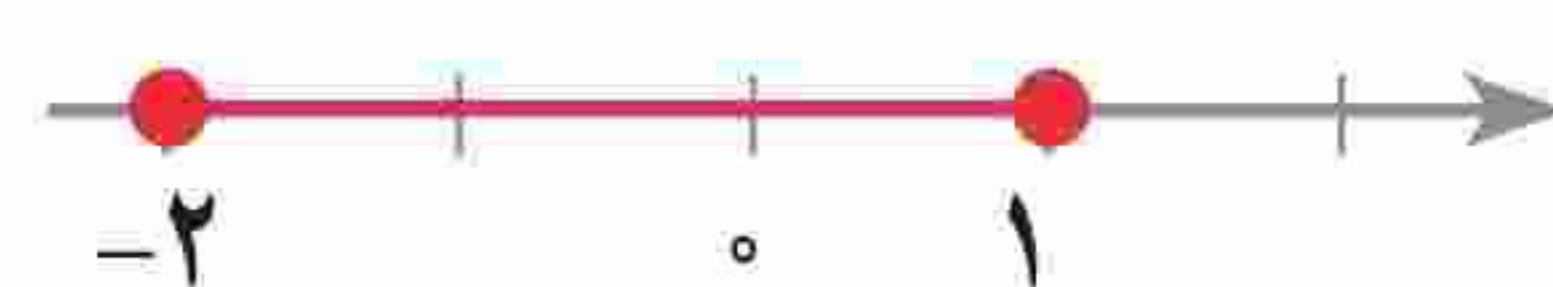
### بازه‌ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $A$  مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین  $-2$  و  $1$  به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ . اعضای  $A$  را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای

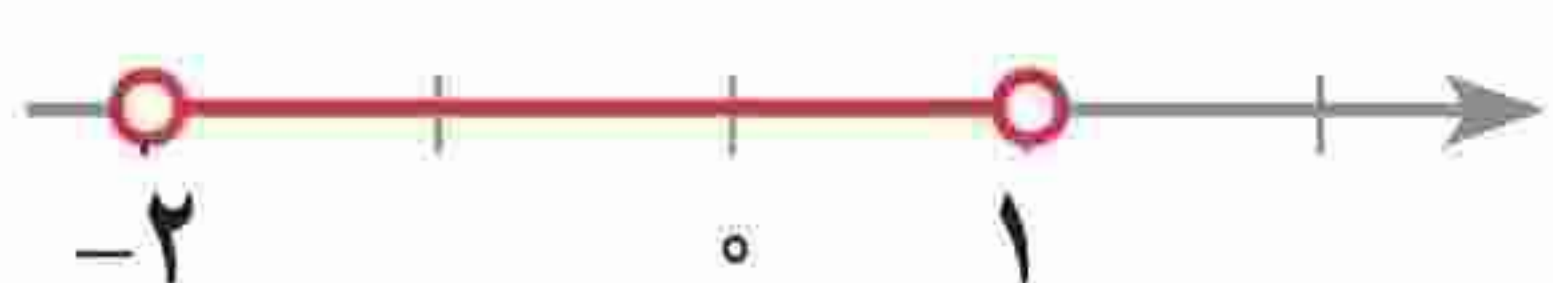


زیرمجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$  را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص‌اند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بنابراین  $A$  را با نماد  $[-2, 1]$  نشان می‌دهیم و آن را **بازه بسته** از  $-2$  تا  $1$  می‌نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی  $-2$  و  $1$  را از  $A$  حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$  به دست می‌آید که آن را **بازه باز** بین  $-2$  و  $1$  می‌نامیم و با نماد  $(-2, 1)$  نشان می‌دهیم. به طور خلاصه:

بازه بسته بین  $-2$  و  $1$  :  $A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$



بازه باز بین  $-2$  و  $1$  :  $B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$



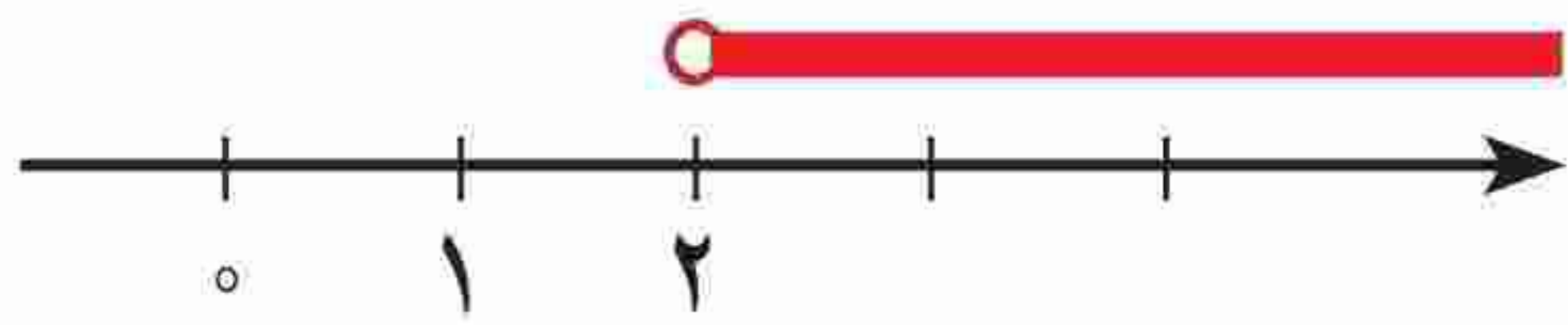
بازه‌های نیم باز هم به روش مشابه تعریف می‌شوند.

### شعاعیت

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که  $a < b$  آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم باز	$(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
نیم باز	$[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله  $2x > 4$  به صورت  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$  است. اعضای  $C$  را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید  $C$  را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد  $+\infty$  (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه  $C$  را در قالب بازه با نماد  $(2, +\infty)$  نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$  نمایش بازه‌ای به صورت  $(-\infty, 1]$  خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که  $+\infty$  و  $-\infty$  اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

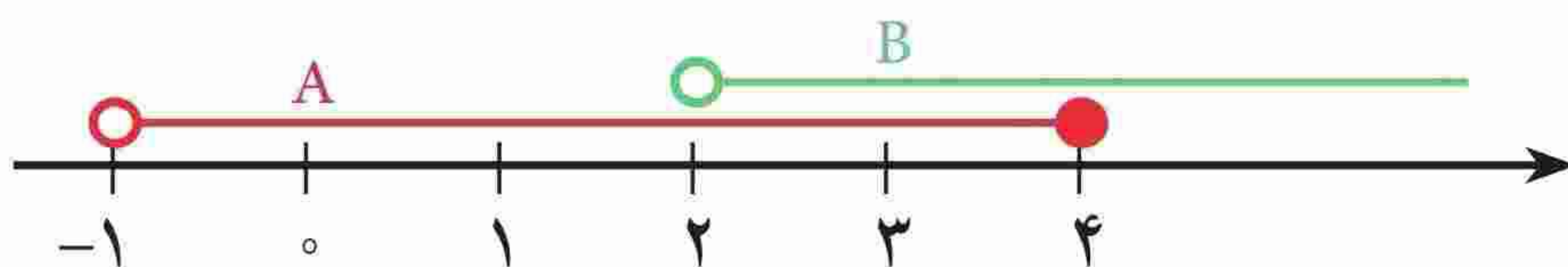
### فعالیت

اگر  $a$  عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	
نیم باز	$[3, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	

### مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه  $A = (-1, 4]$  و  $B = (2, +\infty)$  را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که  $A \cup B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از  $(-1)$ ، یعنی:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که  $A \cap B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴؛ یعنی:

$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

توضیح دهید که چرا  $2 \notin A \cap B$ .

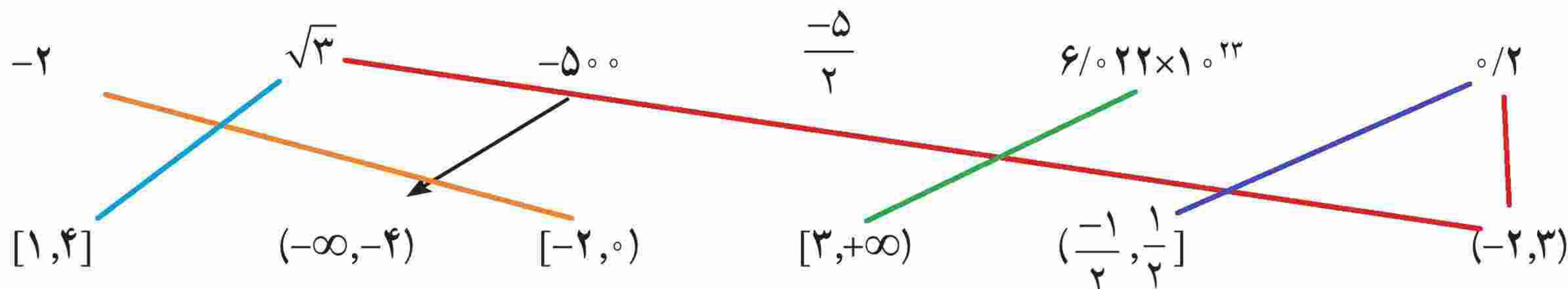
زیرا ۲ در بازه  $B$  نیست، پس در اشتراک وجود ندارد.

۱ درست یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید :

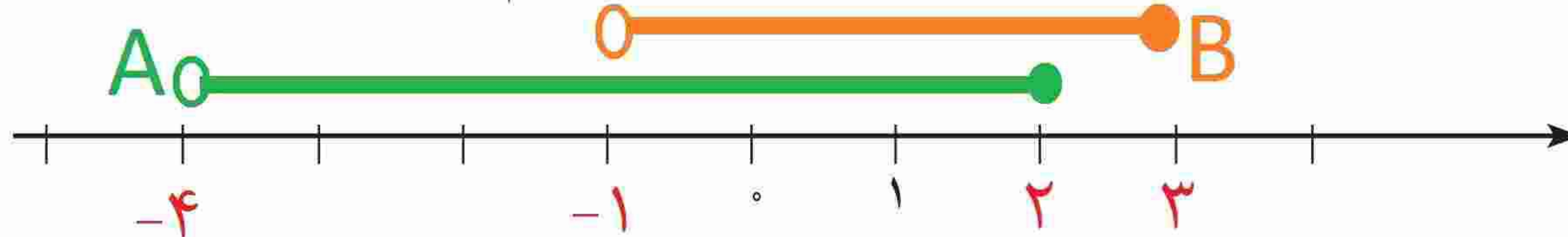
$\checkmark$  الف)  $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{4}, 2)$      $\times$  ب)  $-2 \in (-2, 0]$      $\checkmark$  پ)  $0 \in (-2, 0]$      $\checkmark$  ت)  $-2 \in \{-2, 0\}$      $\times$  ث)  $-1 \in \{-2, 0\}$

$\times$  ج)  $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$      $\checkmark$  چ)  $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$      $\checkmark$  ح)  $\emptyset \subseteq (-17, 0]$      $\times$  خ)  $[2, 5) = (2, 5]$      $\times$  د)  $\sqrt{2} \in (0, 1)$

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2]$  و  $B = (-1, 3]$  را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



الف)  $A \cap B = (-1, 2]$     ب)  $A \cup B = (-4, 3]$     پ)  $A - B = (-4, -1]$     ت)  $B - A = (2, 3]$

### مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

#### فعالیت

فرض کنید  $A$  مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و  $B$  مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف)  $A = \{1, 2, 3\}$

این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب)  $B = \{3, 2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$

ب)  $A$  چند عضو دارد؟  $3$  عضو دارد

پ) درباره تعداد اعضای  $B$  چه می‌توان گفت؟ دارای بی شمار عضو است.

مجموعه‌هایی مانند  $A$  را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق،  $B$  یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های نامتناهی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
۴ عضو دارد {۲, ۳, ۵, ۷}	✓		مجموعه اعداد اول یک رقمی
۷۵۰۰۰۰۰۰۰۰	✓		مجموعه انسان‌های روی زمین
		✓	مجموعه اعداد طبیعی فرد
۵۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰	✓		مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
		✓	مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
۱۸۰	✓		مجموعه دانش آموزان مدرسه شما
۱۰۹ - ۱۰۱۰	✓		مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰	✓		مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
		✓	مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
		✓	مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
		✓	بازه (۱, ۰)
۶/۰۲ × ۱۰ <sup>۲۳</sup>	✓		مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب



جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و به دلیل همین وسعت، به آن **جنگل‌های آمازون** گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانه آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانه دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجه یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که ۳۹۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰ اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونه مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟

۲ دو مجموعه متناهی نام ببرید. ۱- مجموعه ی دبیران ریاضی آبادان ۲- مجموعه ی ماشین های پلاک آبادان

۳ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیر مجموعه دیگری باشد. مجموعه ی اعداد طبیعی که زیر مجموعه ی اعداد حسابی است.

۴ دو مجموعه نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که  $A \subseteq B$  بوده و  $B - A$  تک عضوی باشد.

$$B = [1, 2] \quad A = [1, 2) \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B - A = \{2\} \end{cases}$$

**تذکر:** تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.



طرحی از سلول‌های عصبی منفر

الف  $\frac{1}{3}$  عددی بین  $0$  و  $1$  است. چهار عدد گویای دیگر از بازه  $(0, 1)$  بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.  $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 0.2, 0.0001$

ب آیا می‌توان بین  $0$  و  $1$  به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه  $(0, 1)$  چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نامتناهی اند

ت در مورد متناهی یا نامتناهی بودن  $Q$  چه می‌توان گفت؟ نامتناهی است.

ث اگر  $A$  دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه  $A$  یک مجموعه نامتناهی... خواهد بود.

تمرین

۱ فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد  $5$  باشد.

الف  $U$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.  $U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots\}$

ب  $U$  متناهی است یا نامتناهی؟ نامتناهی

پ یک زیر مجموعه متناهی از  $U$  بنویسید.  $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

ت دو زیر مجموعه نامتناهی مانند  $C$  و  $D$  از  $U$  بنویسید؛ به طوری که  $C \subseteq D$ .

$$D = \{10, 20, 30, \dots\}, \quad C = \{20, 40, 60, \dots\}$$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب مجموعه شماره‌های طبیعی عدد  $36$ . متناهی

پ بازه  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ . نامتناهی

ت  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$ . متناهی زیرا  $A = \emptyset$

ث مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد  $100$ . نامتناهی

۳ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.  $\{2\} \rightarrow \bigcap (2, +\infty), [0, 2]$

۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

ب  $(2, 6] = (-\infty, 6] \cap (2, 9)$

الف  $(-3, 5] = (-3, 0) \cup (-2, 5]$

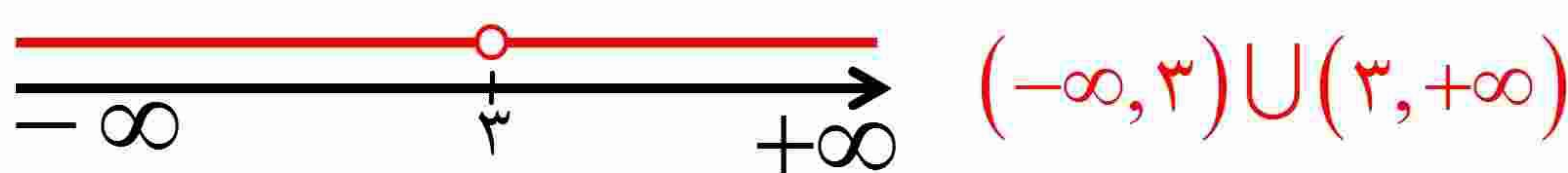
ت  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

پ  $(6, 10] = (3, +\infty) \cap (6, 10]$

ج  $[2, 3] = [2, 4) - (3, +\infty)$

ث  $(4, +\infty) = (3, +\infty) - [2, 4)$

۵ مجموعه  $\mathbb{R} - \{3\}$  را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



۶ اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  متناهی باشد، آنگاه  $B$  متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ متناهی

عدد آووگادرو

در شیمی تعداد  $6.022 \times 10^{23}$  عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می‌نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب را که  $18$  گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به  $20$  میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است! به نظر شما، مجموعه مولکول‌های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟



درس دوم: متمم یک مجموعه

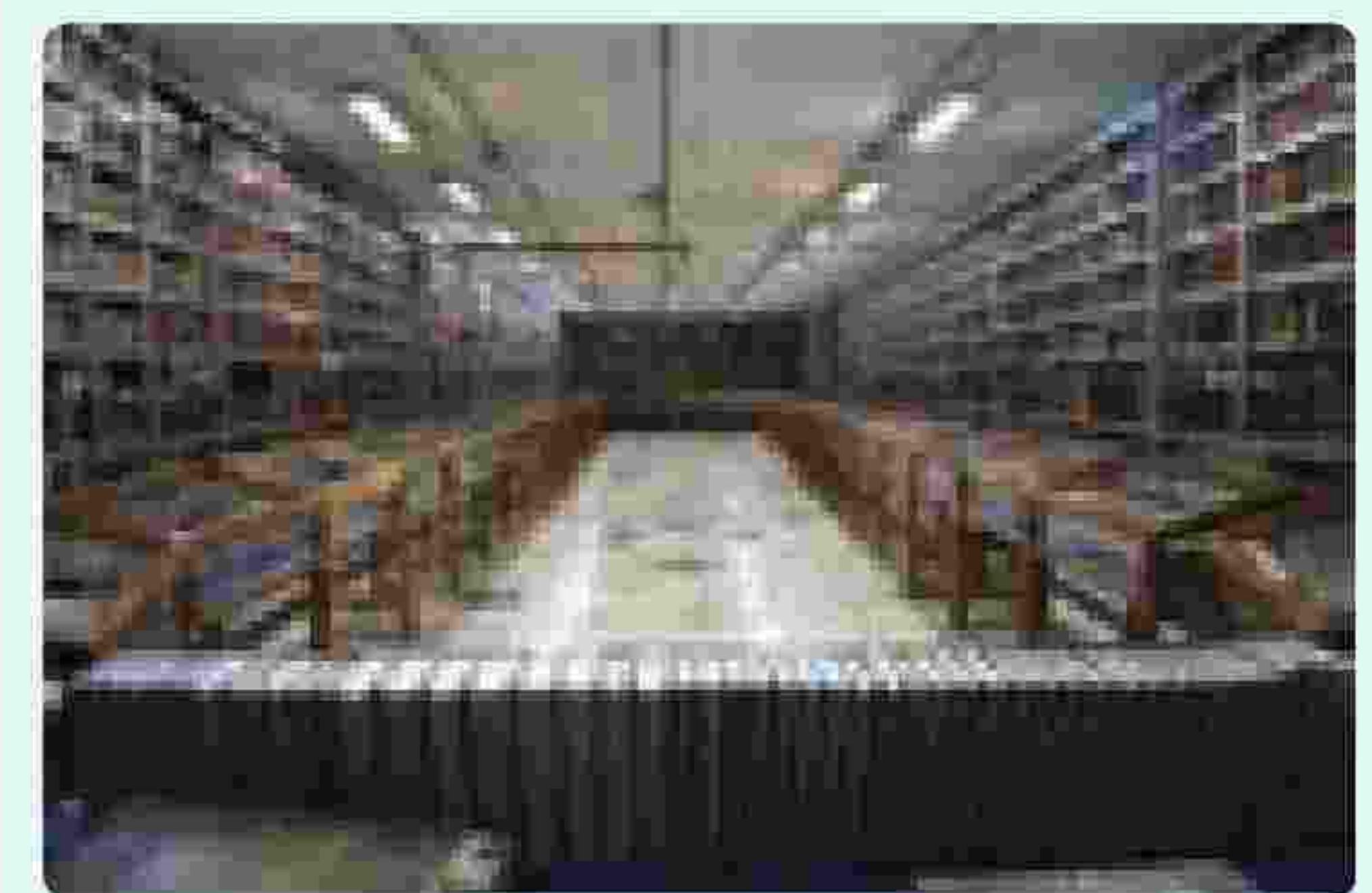
مجموعه مرجع

فرض کنیم  $U$  نشان دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و  $A$  مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با  $A'$  نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال  $U$  را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و  $A'$  را متمم مجموعه  $A$  می‌نامیم.



کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به‌شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

تعداد	نوع کتاب
۴۲۰۰۰ جلد	کتاب‌های خطی
۱۰۰۰۰۰۰ جلد	کتاب‌های چاپی
۱۰۴۲۰۰۰ جلد	کل کتاب‌ها



در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با  $U$  نشان می‌دهیم.

هرگاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه  $U-A$  را **متمم**  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.

فعالیت

**الف** دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$

**ب**  $A$  را با نمایش اعضا و  $B$  را به صورت یک بازه بنویسید.

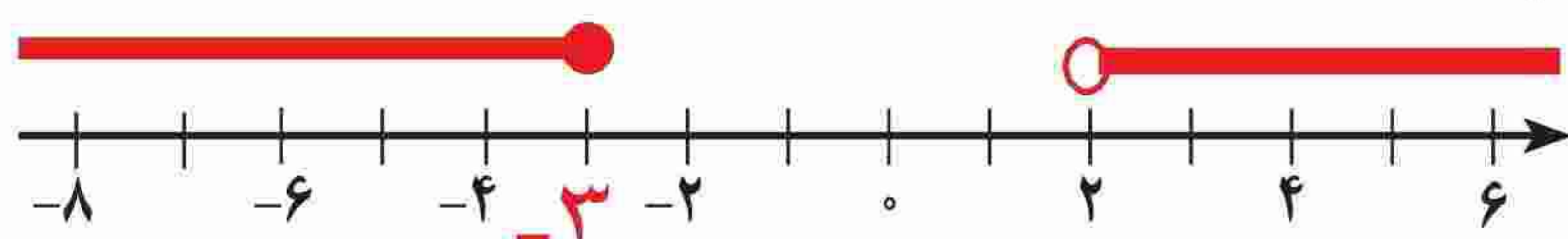
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = (-3, 2]$$

**پ** در مورد  $A$ ، اگر مجموعه مرجع را  $\mathbb{Z}$  در نظر بگیریم،  $A'$  را مشخص کنید.

$$A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -4, -3, 3, 4, \dots\} = \{\pm 3, \pm 4, \dots\}$$

**ت** در مورد  $B$  با فرض این که  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد،  $B'$  را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

$U$ : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

$A$ : کتاب‌های خطی

$A'$ : کتاب‌های چاپی



درس دوم: متمم یک مجموعه

۱ اگر  $U$  مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و  $A$  مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه  $A'$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$$A' = U - A$$

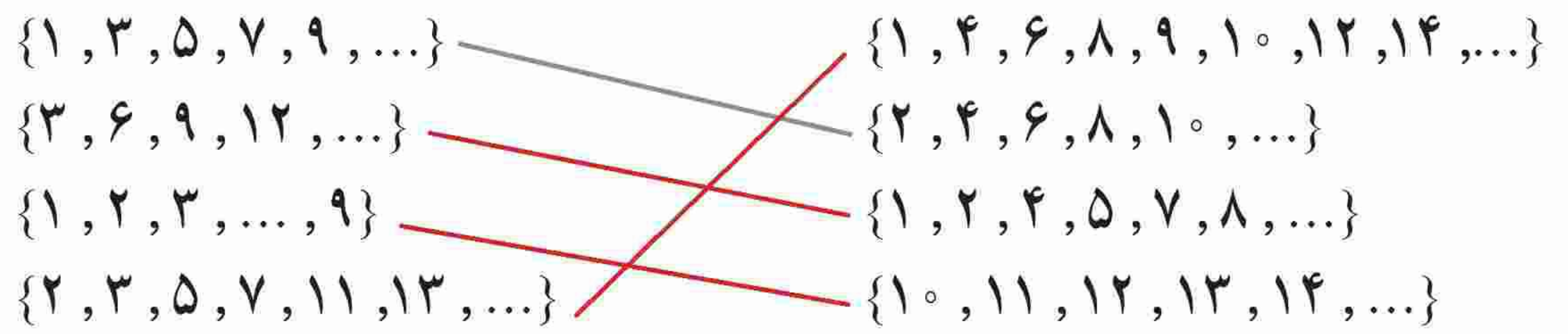
= { سیستان و بلوچستان و هرمزگان و بوشهر و خوزستان و گلستان و مازندران و گیلان و اردبیل }



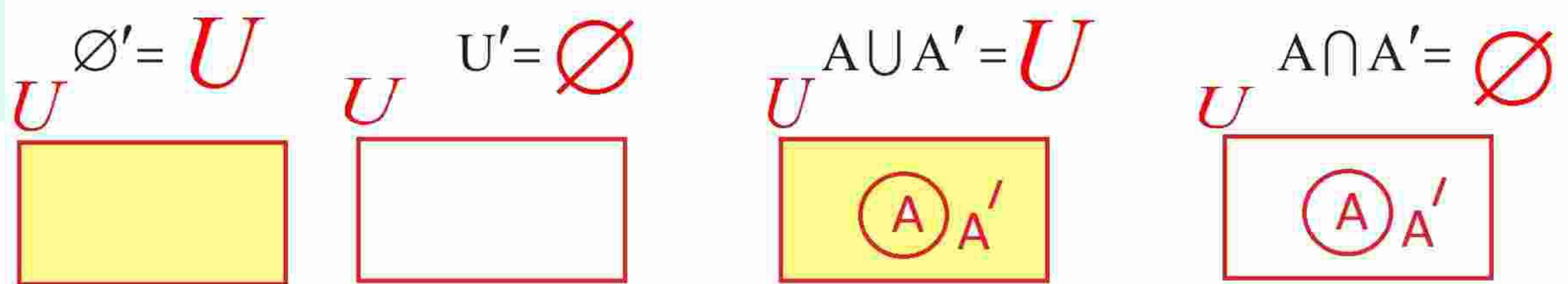
۲ فرض کنیم  $U$  مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و  $B$  مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت  $B'$  چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

$$B' = U - B = \text{مجموعه ی اتومبیل های با پلاک زوج}$$

۳ با فرض آنکه  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.



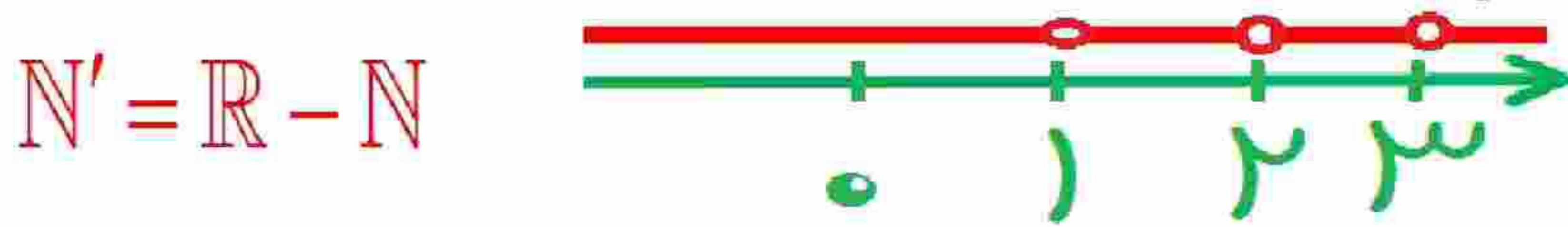
۴  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  زیرمجموعه دلخواهی از آن می باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.



۵ الف) اگر  $\mathbb{Z}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه  $\mathbb{N}'$  را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$$\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

ب) اگر  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت  $\mathbb{N}'$  را روی محور نمایش دهید.



۶ فرض کنیم  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{2, 4\}$ . ابتدا  $A'$  و  $B'$  را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

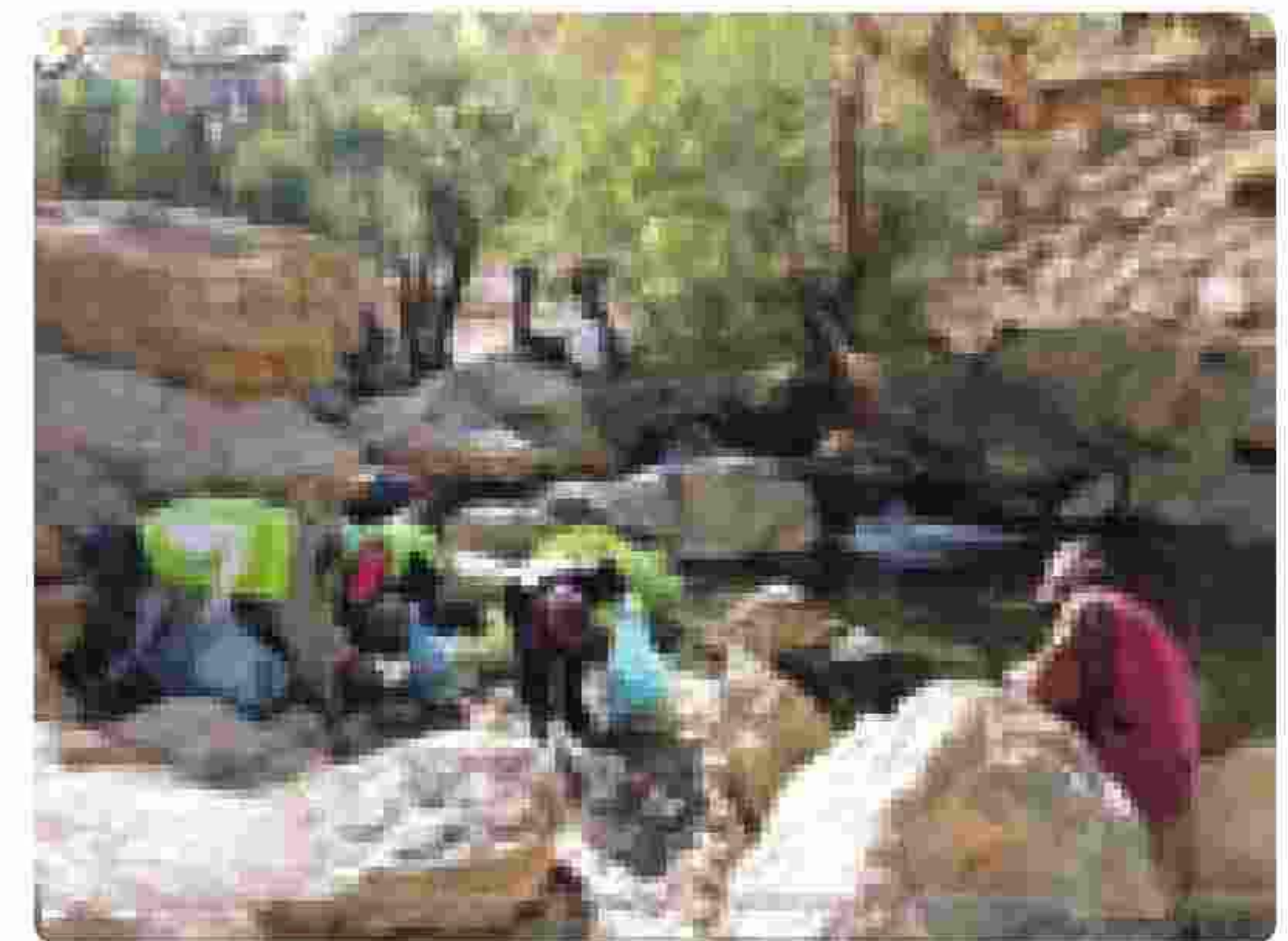
$(A)'$	$A' = \{4, 5\}$	$B' = \{1, 3, 5\}$
$\{1, 2, 3\}$		$\Rightarrow (A)'' = A$
$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5\}$	$\{5\}$
	$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$	
$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{2\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$
	$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$	
$A - B$	$A - (A \cap B)$	
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$

### تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر  $A$  یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت  $n(A)$  استفاده می‌شود. مثلاً اگر  $G = \{2, 3, 5, 7\}$  در این صورت می‌توانیم بنویسیم  $n(G) = 4$ . در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای  $n(A \cup B)$  به دست آوریم.

### فعالیت

۱ یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند. اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه  $A = \{\text{آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\}$  و اعضای دانشجوی آن مجموعه  $B = \{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه}\}$  هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر  $A \cap B = \emptyset$ .

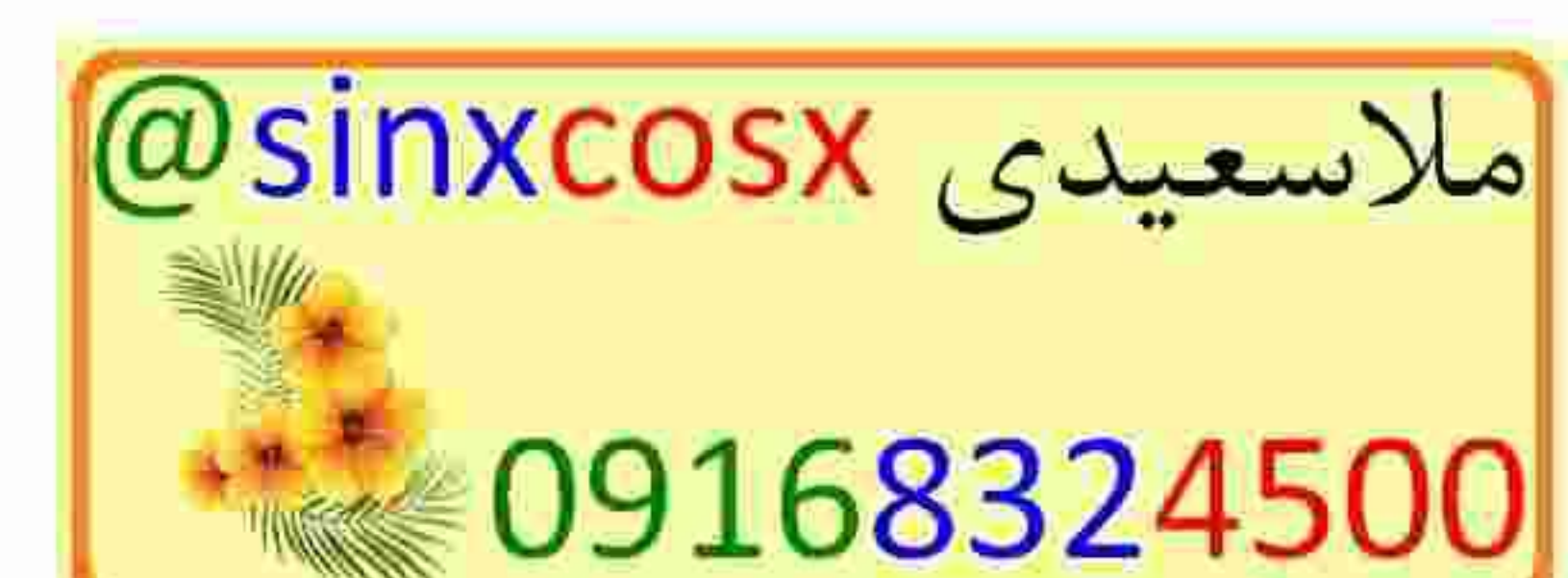
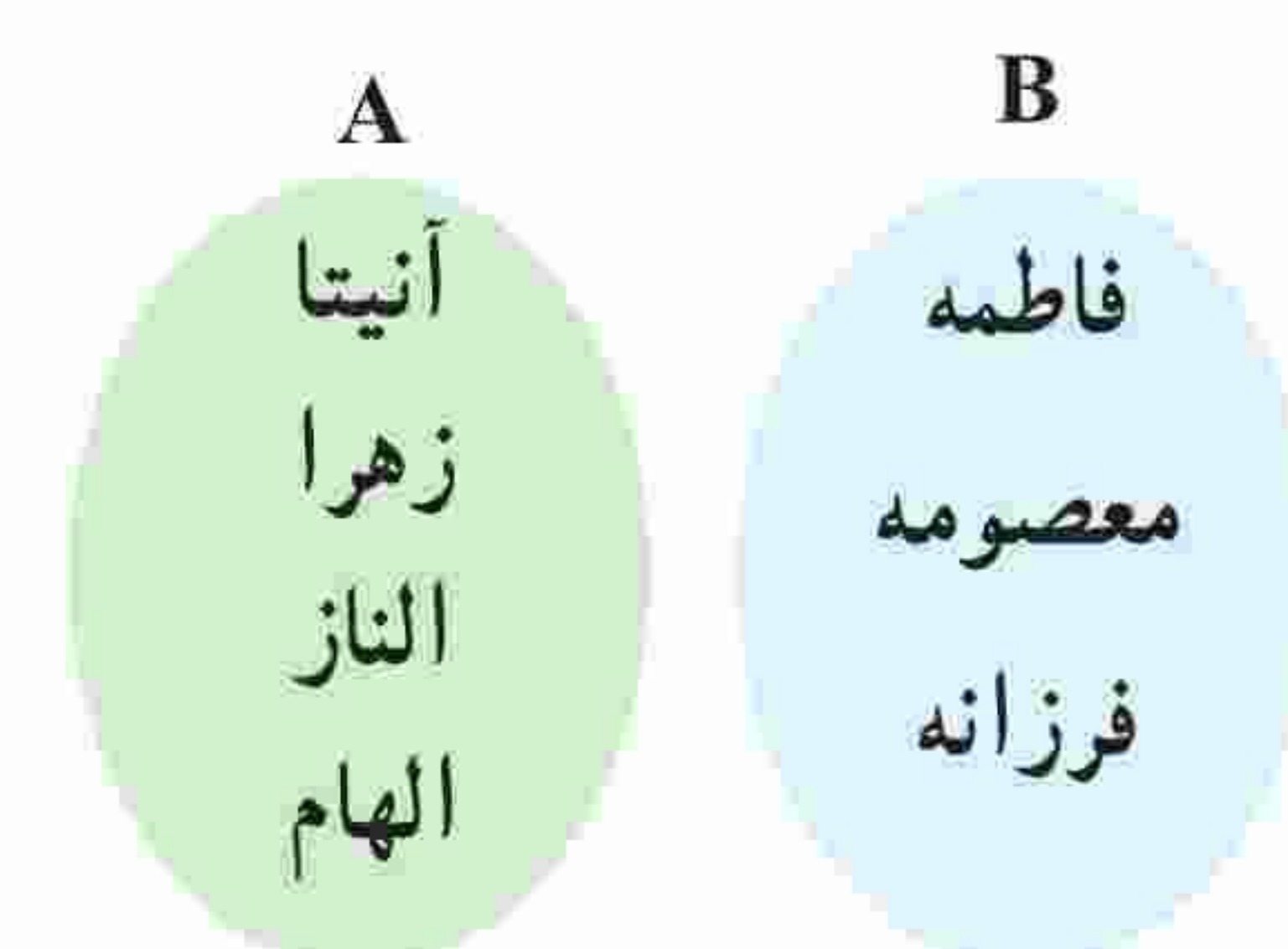


به هر دو مجموعه مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

الف) اعضای  $A \cup B$  را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A \cup B = \{\text{آنیتا و زهرا و الناز و الهام و فاطمه و معصومه و فرزانه}\}$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰



ب) تعداد عضوهای  $A \cup B$  چه رابطه‌ای با  $n(A)$  و  $n(B)$  دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید. جمع تعداد عضوهای  $A$  و  $B$  برابر با تعداد اعضای  $A \cup B$  است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  برقرار است؟

$$A \cap B = \emptyset \text{ با شرط این که دو مجموعه جدا از هم باشند}$$

۲ الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب  $A$  و  $B$  می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\} \Rightarrow n(A) = 28$$

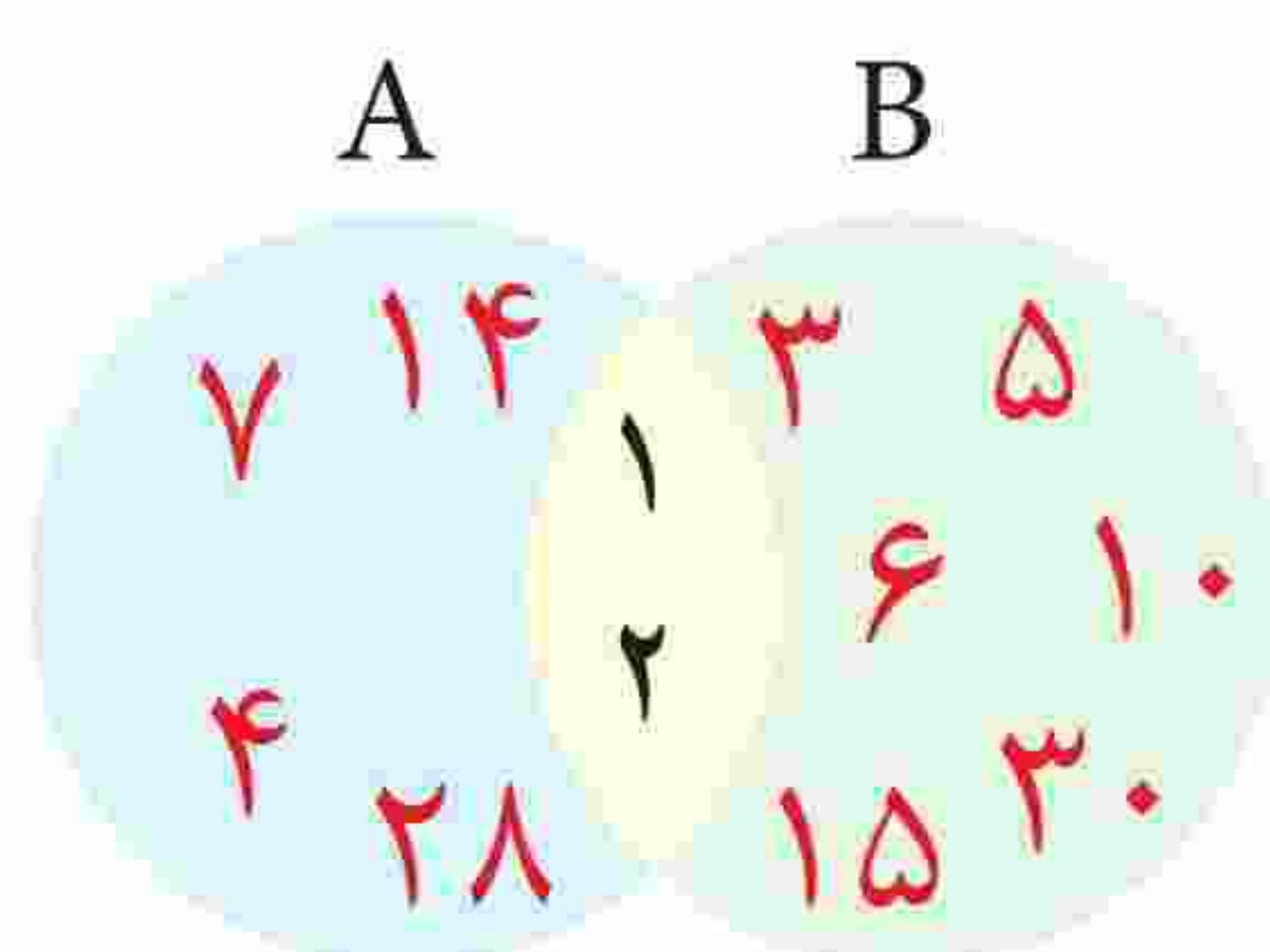
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\} \Rightarrow n(B) = 30$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 30$$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲



پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  در این مثال برقرار نیست؟ چون مجموعه های  $A$  و  $B$  عضوهای مشترک دارند یعنی  $A \cap B \neq \emptyset$

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای  $n(A \cup B)$  را حدس بزنید.

همان طور که دیدیم، اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

### کاردر کلاس



۱) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند.

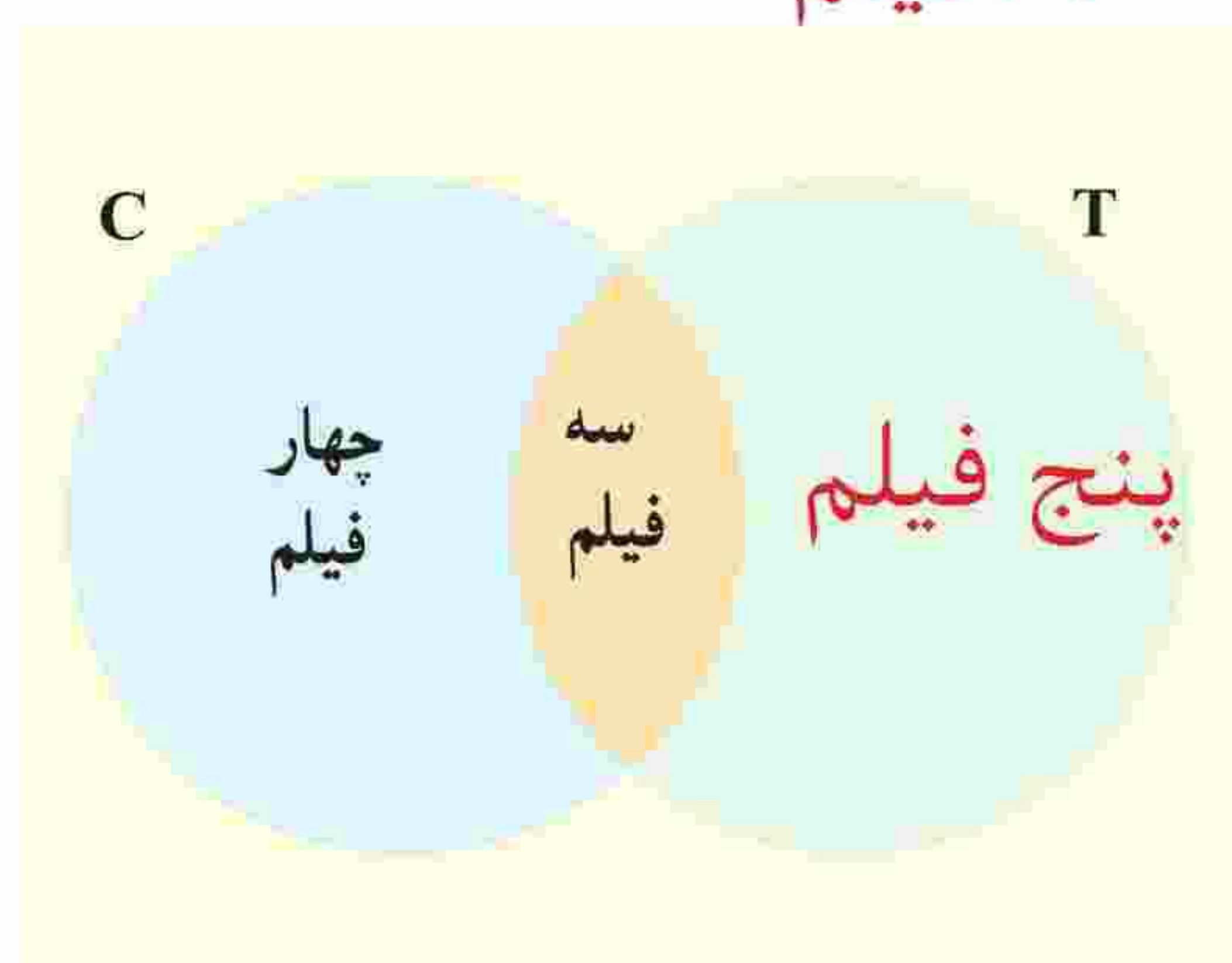
ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل: مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با  $U$ ، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با  $C$  و مجموعه فیلم‌های طنز را با  $T$  نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

الف)  $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$

ب)  $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$

۲۱ فیلم  $U$



روش دوم حل: در نمودار وین مقابل، دو مجموعه  $C$  و  $T$  سطح درون  $U$  را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

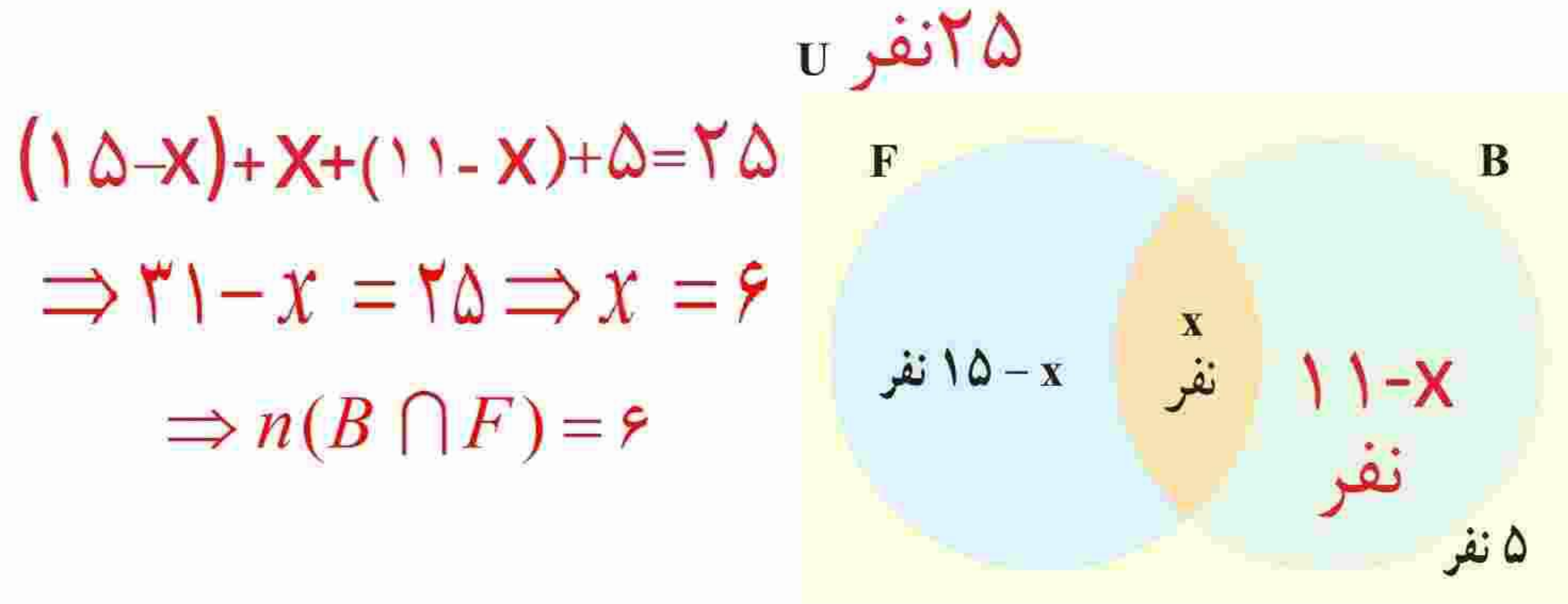
الف)  $12 = 4 + 3 + 5 =$  پویانمایی یا طنز (الف)

ب)  $9 = 21 - 12 =$  غیر پویانمایی و غیر طنز (ب)

۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.  
روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار  $x$  را بیابید.



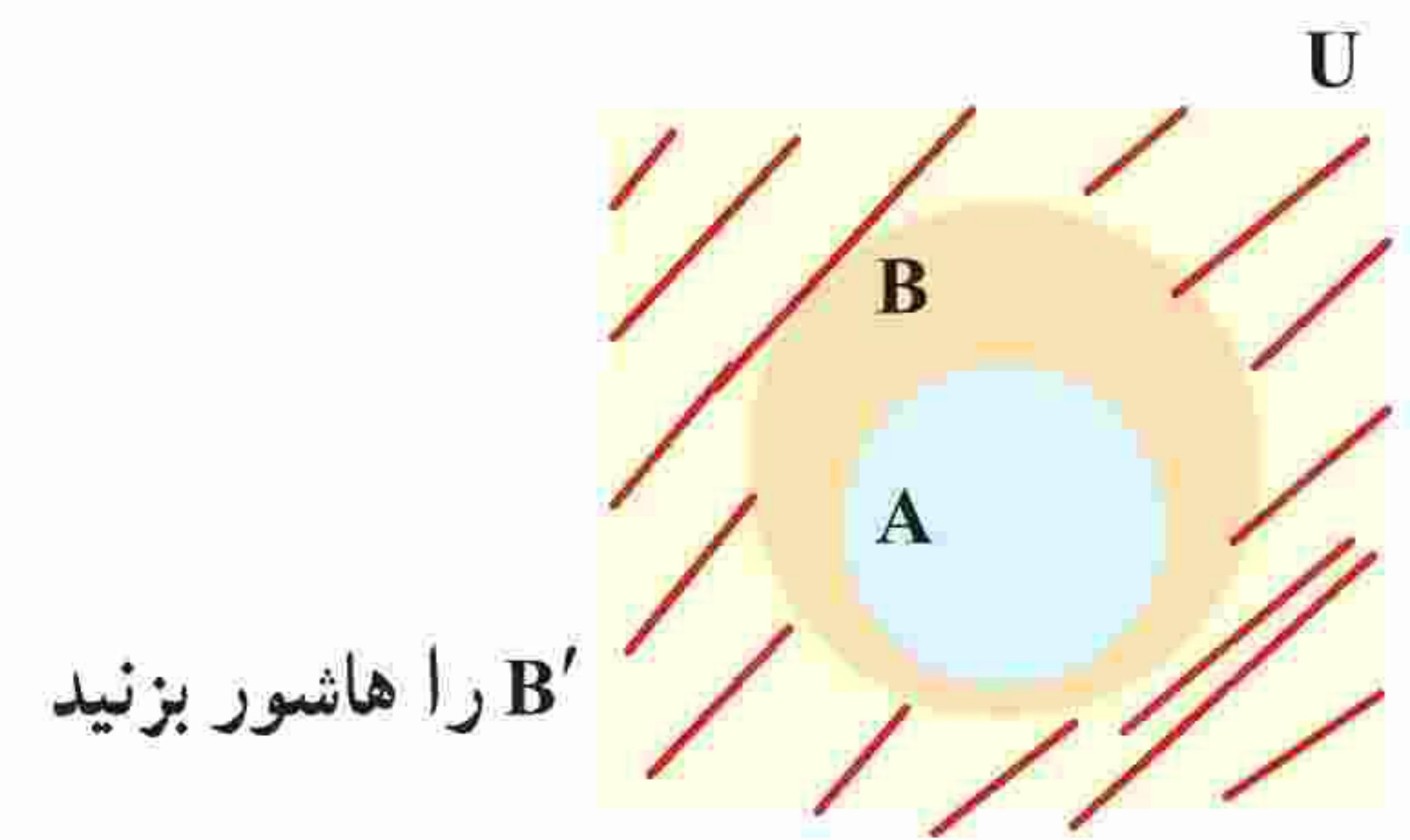
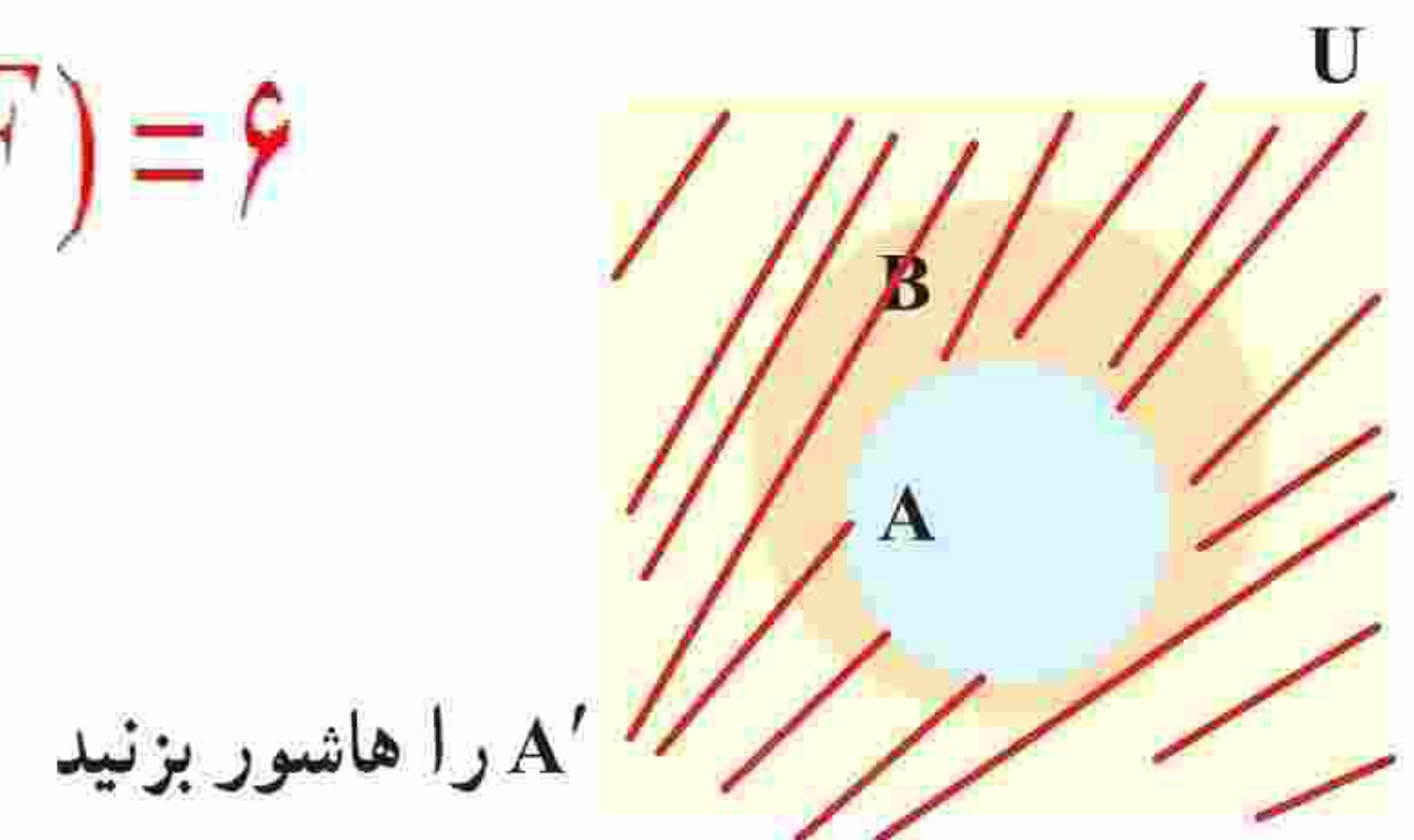
ملاسعدی @sinxcosx  
09168324500



روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس  $n(B \cup F) = 20$ . حال با نوشتن فرمول  $n(B \cup F)$  می‌توان  $n(B \cap F)$  را به دست آورد.

$$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F) \Rightarrow 20 = 11 + 15 - n(B \cap F) \Rightarrow n(B \cap F) = 6$$

۳ الف) فرض کنیم  $A \subseteq B \subseteq U$  که در آن  $U$  مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل  $A'$  و  $B'$  را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

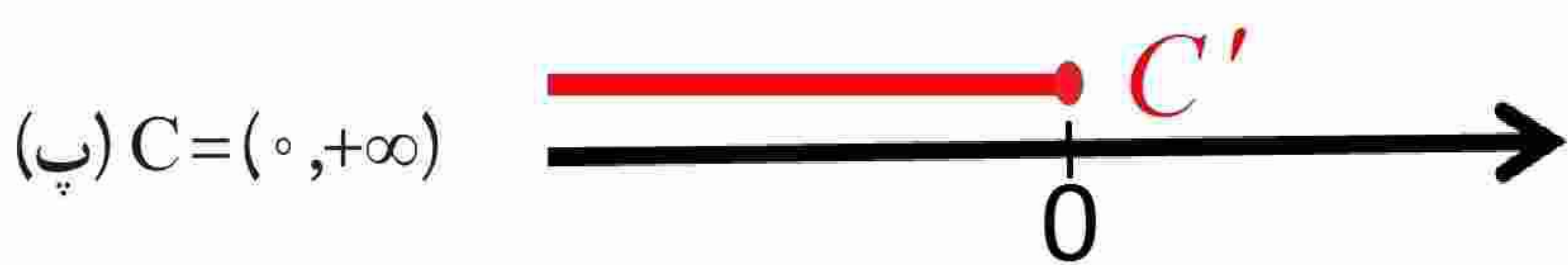
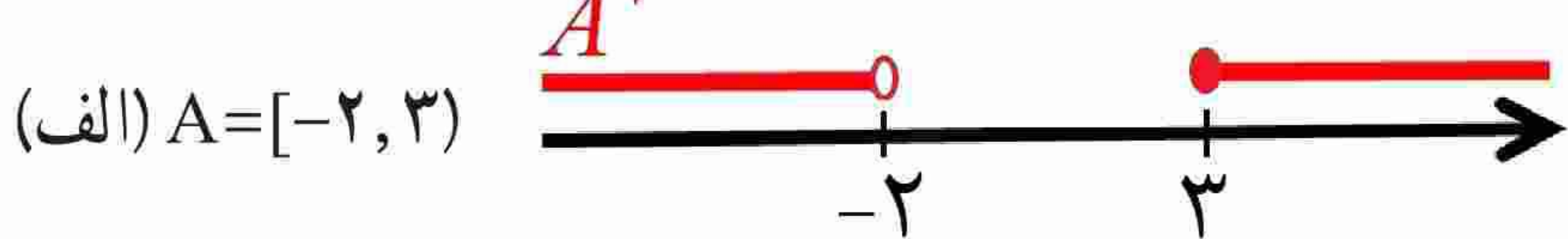


ب) اگر  $U = \{a, b, c, d, e\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{a, b, c\}$  در این صورت  $A \subseteq B$  می‌باشد. با به دست آوردن  $A'$  و  $B'$  نشان دهید که بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.

$$A' = \{c, d, e\}, \quad B' = \{d, e\} \Rightarrow B' \subset A'$$

تسری

۱  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.



۲  $\mathbb{N}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $A$  مثال بزینید که  $A'$  هم نامتناهی باشد.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج  $A =$       مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد  $A' =$

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $B$  مثال بزینید که  $B'$  متناهی باشد.

$$B = \{5, 6, 7, \dots\} \quad B' = \{1, 2, 3, 4\}$$

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل  $C$  مثال بزینید و  $C'$  را به دست آورید.  $C'$  متناهی است یا نامتناهی؟

$$C = \{2, 3, 5, 7\} \quad C' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\} \text{ نامتناهی}$$

۳ اگر  $n(A) = 15$ ،  $n(A \cap B) = 5$  و  $n(A \cup B) = 30$ ، آنگاه  $n(B)$  را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

۴ فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = 100$ ،  $n(A) = 60$ ،  $n(B) = 40$  و  $n(A \cap B) = 20$  مطلوب است:

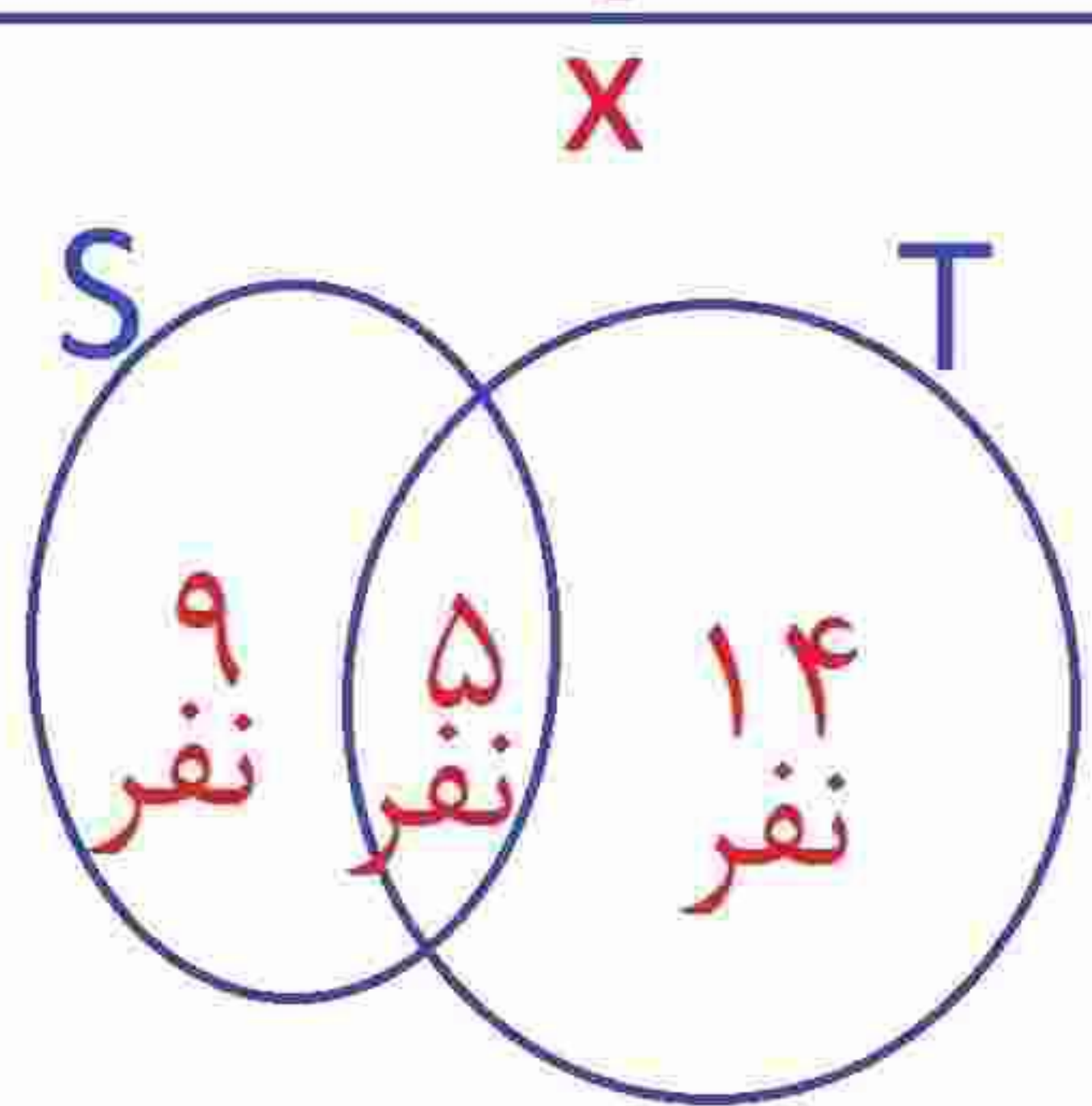
(الف)  $n(A \cup B)$   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 60 + 40 - 20 = 80$

(ب)  $n(A \cap B')$   $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - 20 = 40$

(پ)  $n(A' \cap B)$   $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$

(ت)  $n(A' \cap B')$   $n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$

۳۱ نفر  $U$



۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو

گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند. ۹

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.  $x + 14 + 5 + 9 = 31 \Rightarrow x = 3$

۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از

محصولات شرکت  $A$  و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت  $B$  خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند

که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

حداقل =

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95$$

به معنای اجتماع

(ب) فقط از شرکت  $A$  خرید کرده‌اند.  $70 - 32 = 38$

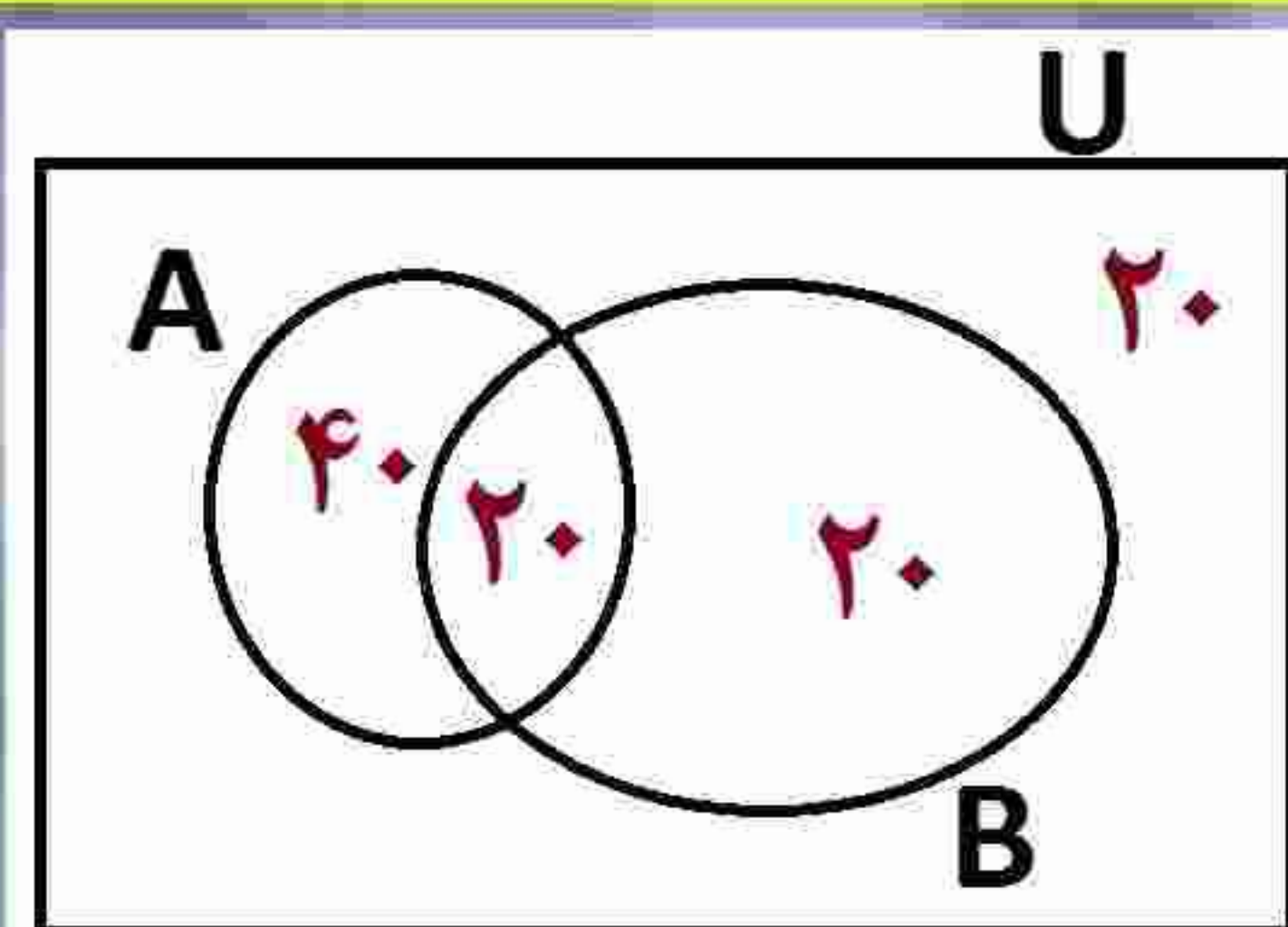
(پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

$$\text{فقط شرکت } B + \text{فقط شرکت } A = (70 - 32) + (57 - 32) = 38 + 25 = 63$$

(ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.  $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$



توجه: مسائلی فوق را با شکل راحت‌تر می‌توان پاسخ داد به عنوان نمونه سوال ۴ را مشاهده فرمایید



الف = ۲۰ + ۲۰ + ۴۰  
ب = ۴۰  
پ = ۲۰  
ت = ۲۰

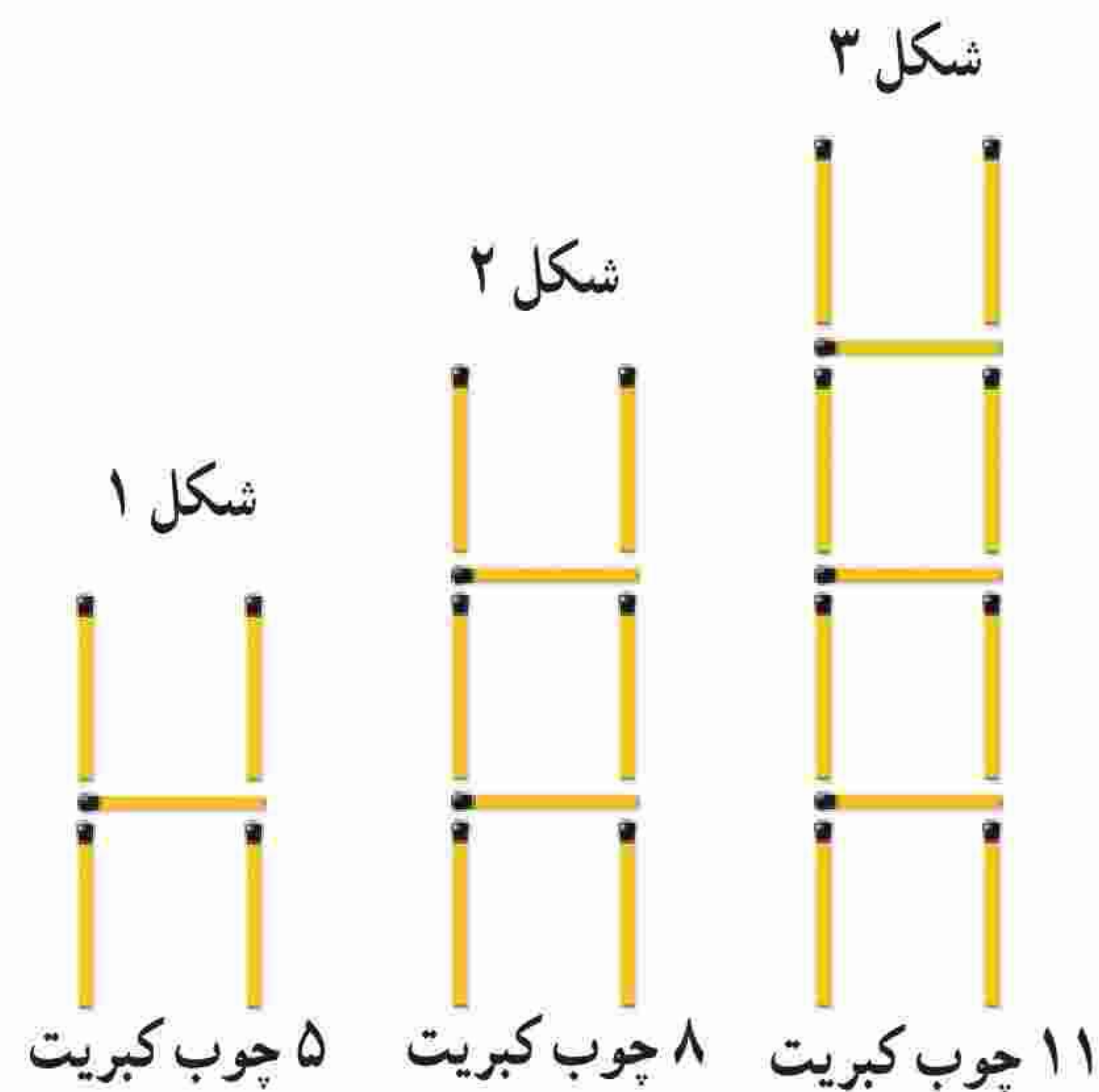
درس سوم: الگو و دنباله

ملاسعدی @sinxcosx  
09168324500

الگو

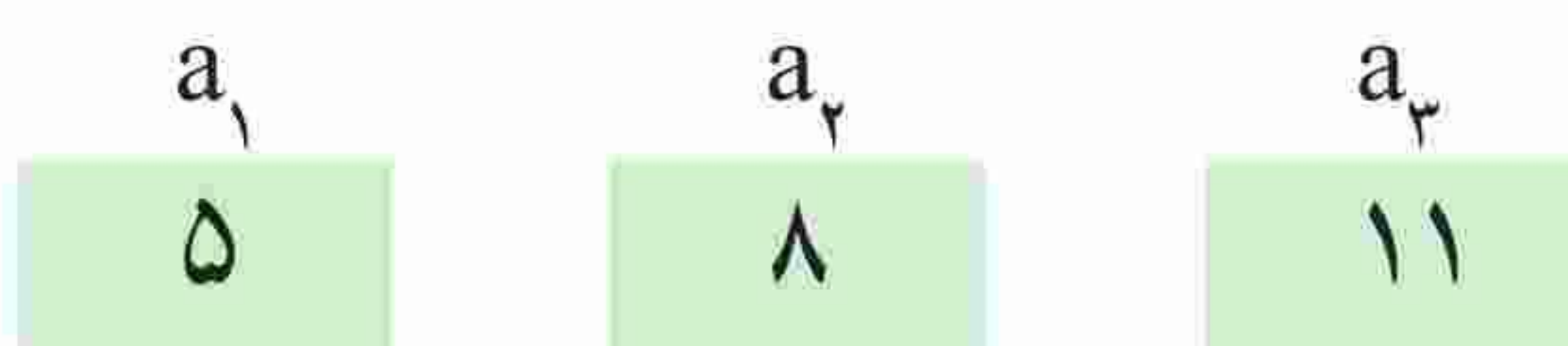
مثال

به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



n: شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
$a_n$ : تعداد چوب کبریت ها	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین n و $a_n$	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

به عنوان مثال ملاحظه می شود که، «تعداد چوب کبریت های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت  $a_1=5$  نشان داده ایم (می خوانیم: a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت های  $a_1, a_2, a_3$  متغیرهای اندیس دار نامیده می شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

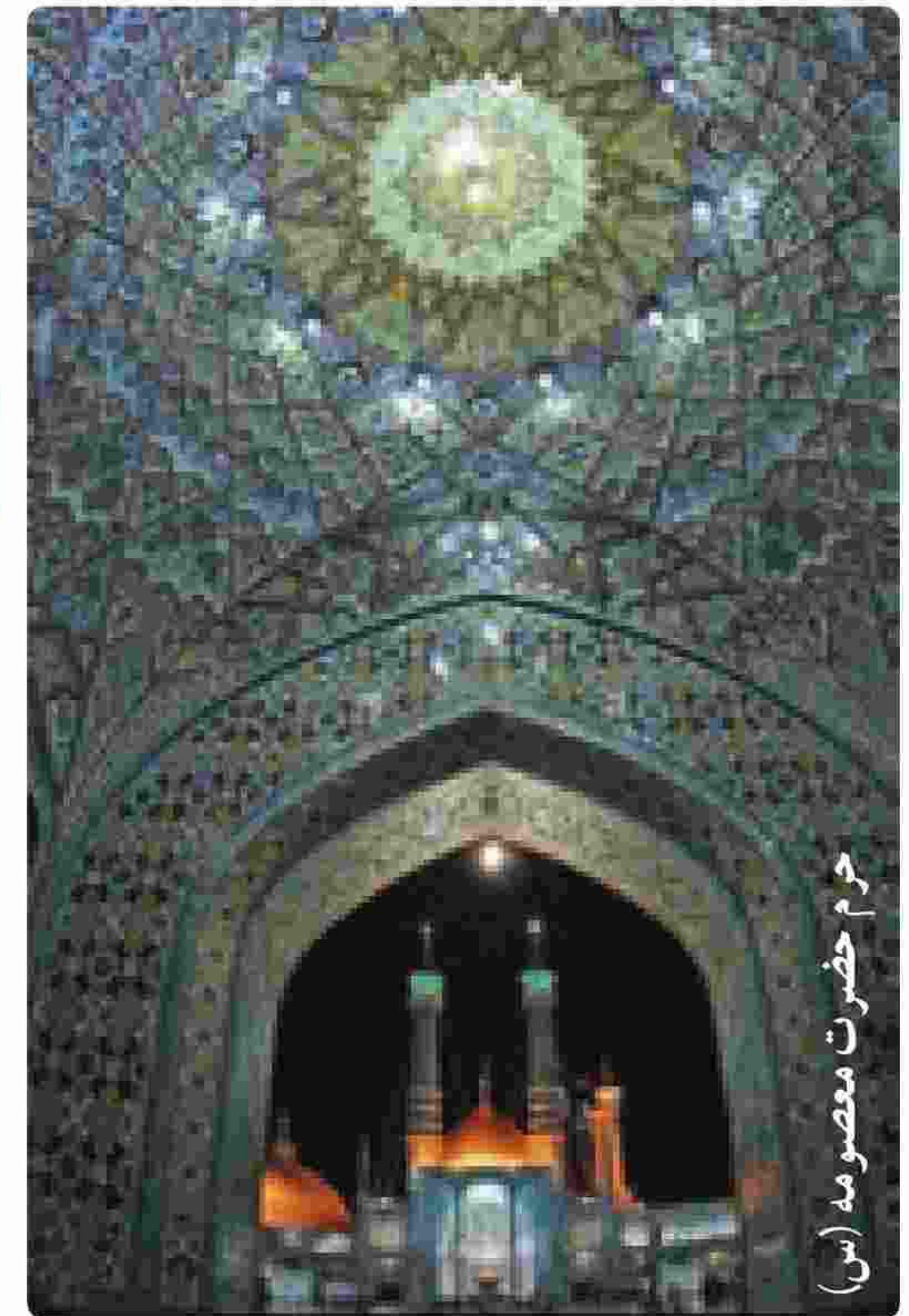


الف) با این نمادگذاری،  $a_n$  نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

جمله ی چهارم الگو است که مقدار آن ۱۴ می باشد.

ب)  $a_n$  به چه معناست؟ جمله ی n ام الگو است.

پ) آیا می توانید حاصل  $a_n$  را بر حسب n به دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

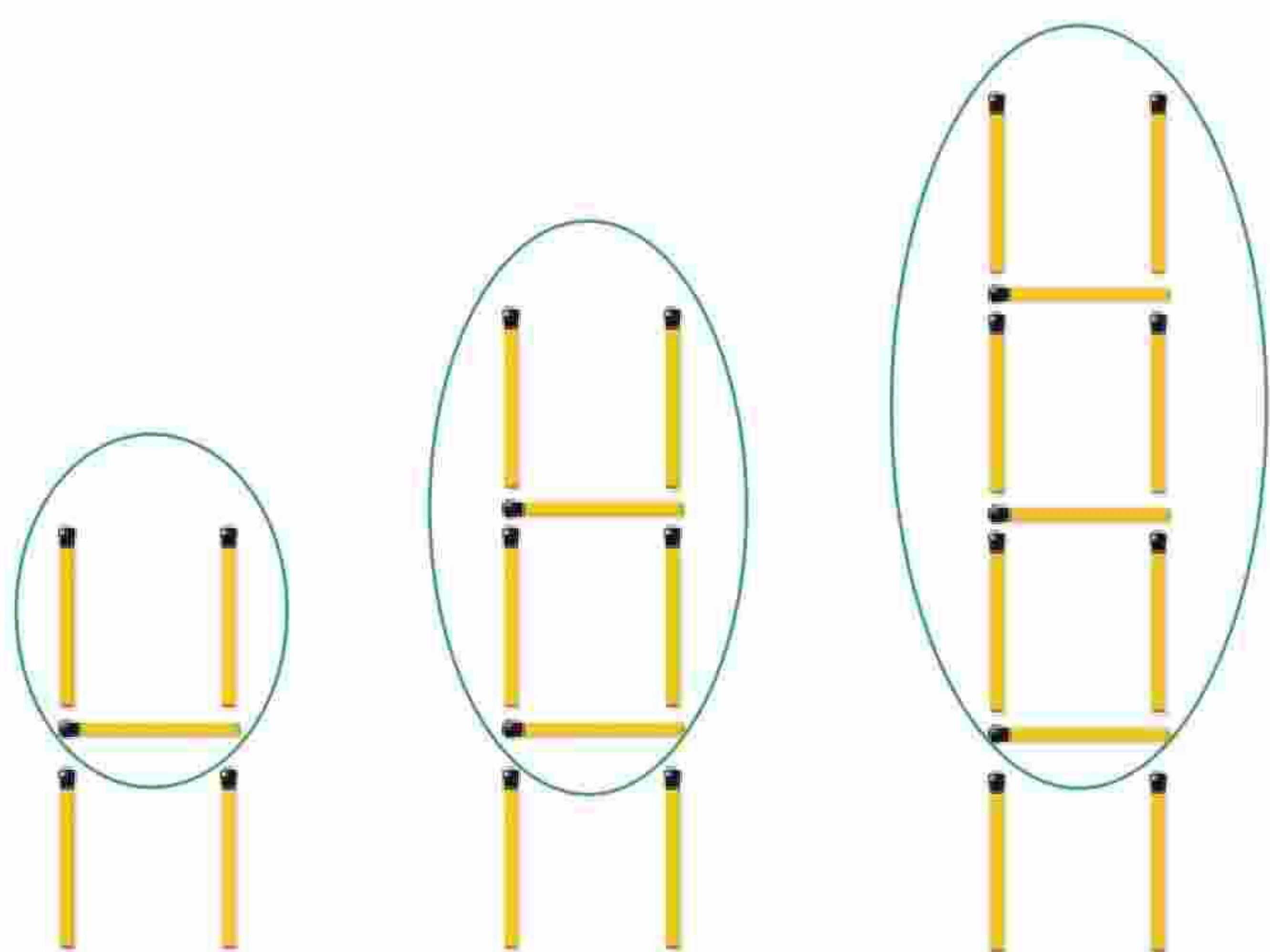


دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا ماریچ های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت های مهم ریاضیات، مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.

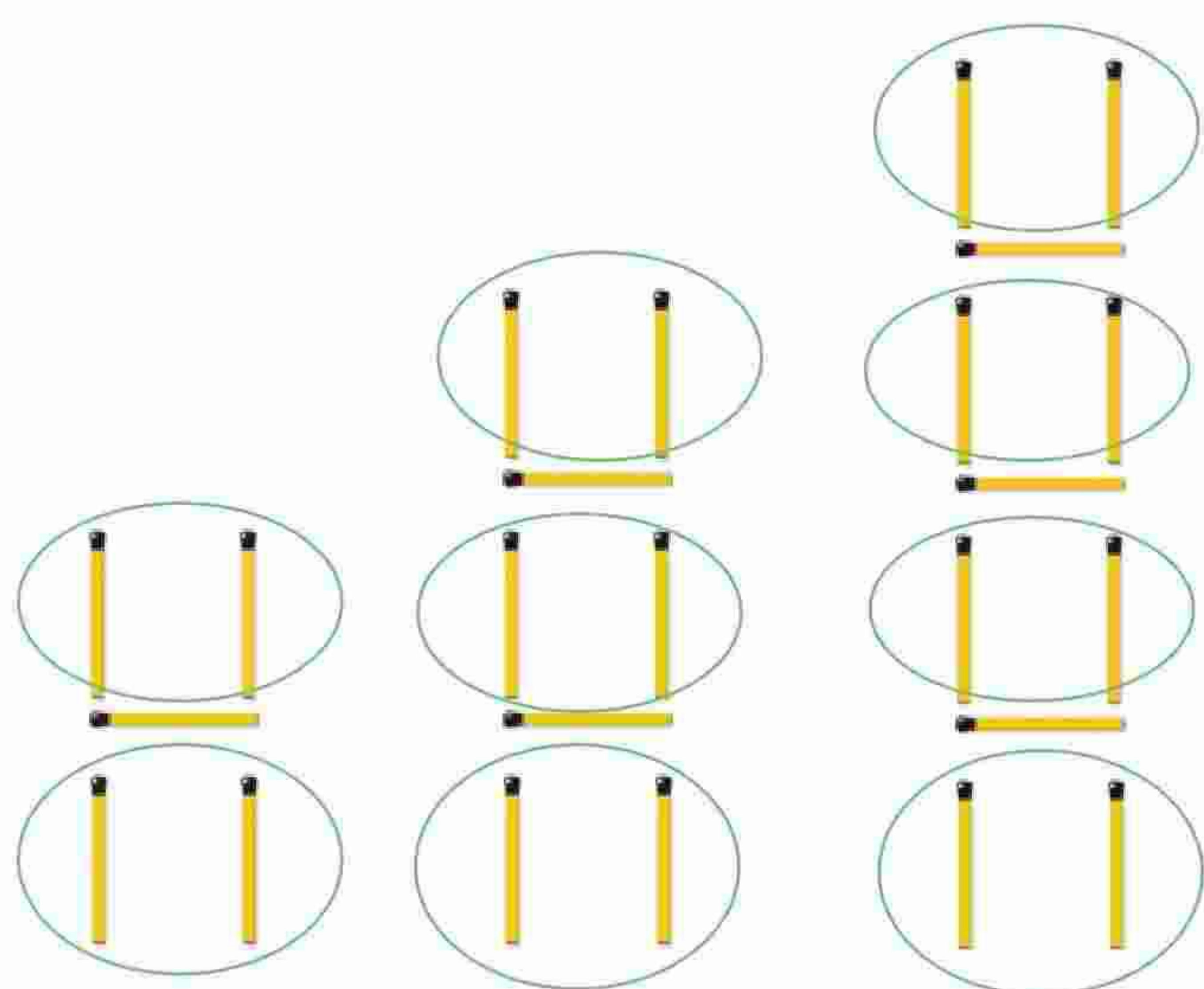
۱- در سال های گذشته با متغیرهایی مثل x, y, z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس دار که در اینجا به کار می بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت روبه رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار  $a_n$  و  $a_{10}$  را به دست آورید.



$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2 \quad a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = 10(3) + 2 \quad \dots \quad a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$$

۲ آیساروش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار  $a_n$  دست یابد. مقدار حاصل برای  $a_n$  از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_{10} = 10 + (10+1)2 \quad \dots \quad a_n = n + (n+1)2$$

چوب های عمودی      چوب های افقی

$$\Rightarrow a_n = 3n + 2$$

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  می دانید؟

$$a_1 = 5 + 0 \times 3 \quad a_2 = 5 + 1 \times 3 \quad a_3 = 5 + 2 \times 3 \quad a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آيسا مقدار  $a_n$  را به ترتیب به صورت های  $a_n = 3n + 2$  و  $a_n = n + (n+1)(2)$  به دست آوردند. جواب آيسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

همان جواب آیدا است  $\rightarrow a_n = n + 2n + 2 = 3n + 2$  جواب آيسا

۵ به کمک رابطه  $a_n = 3n + 2$  تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

$$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62$$

۶ با استفاده از رابطه  $a_n = 3n + 2$  مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

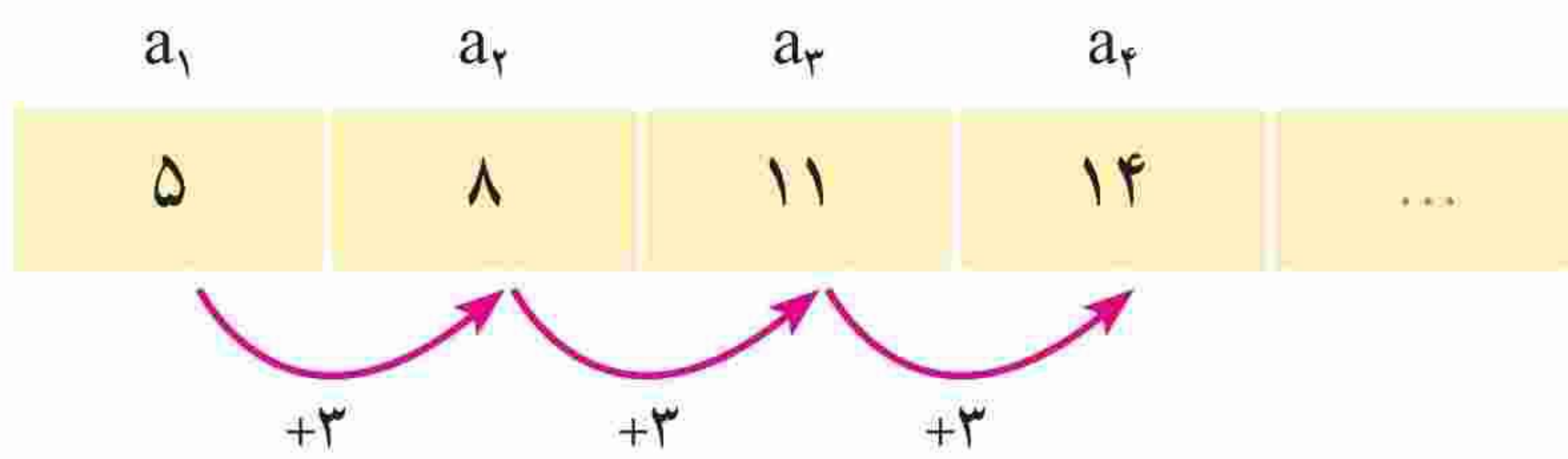
$$a_n = 77 \Rightarrow 3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$

۲۵ آمین شکل دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

**تذکر:** در مثال بالا دیدیم که  $a_n$  بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل  $n$ ام است.  $a_n = 3n + 2$  را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

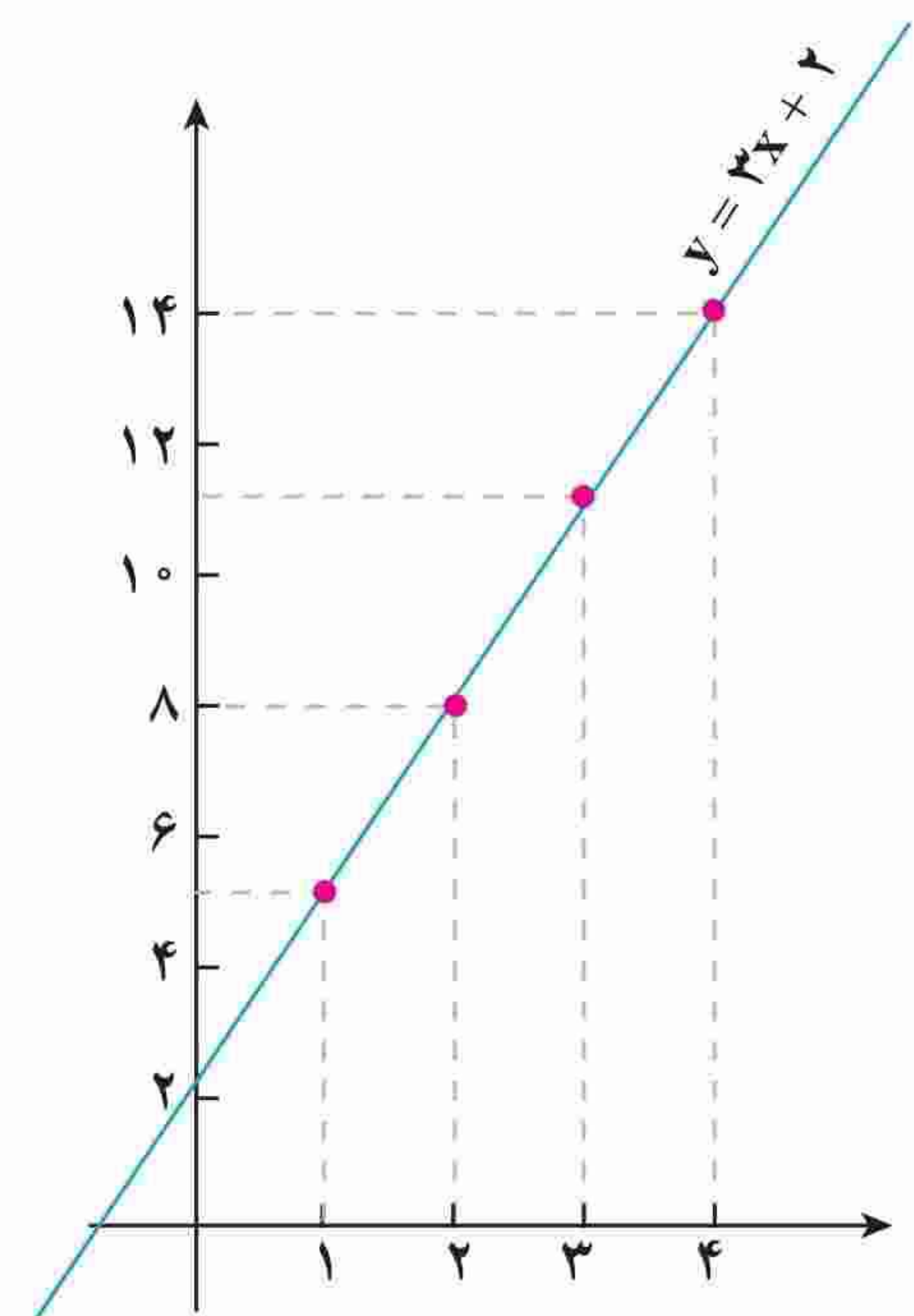
### الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.



n	a <sub>n</sub>	(n, a <sub>n</sub> )
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای بی بردن به دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط  $y=3x+2$  قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی  $y=3x+2$  و جمله عمومی الگو یعنی  $a_n=3n+2$  اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.



به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت  $t_n=an+b$  است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n=an+b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر  $a$  بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب  $n$  است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n=-4n+15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

۱۱, ۷, ۳, -۱, -۵, -۹, ...

### مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت  $C_n=an+b$  باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

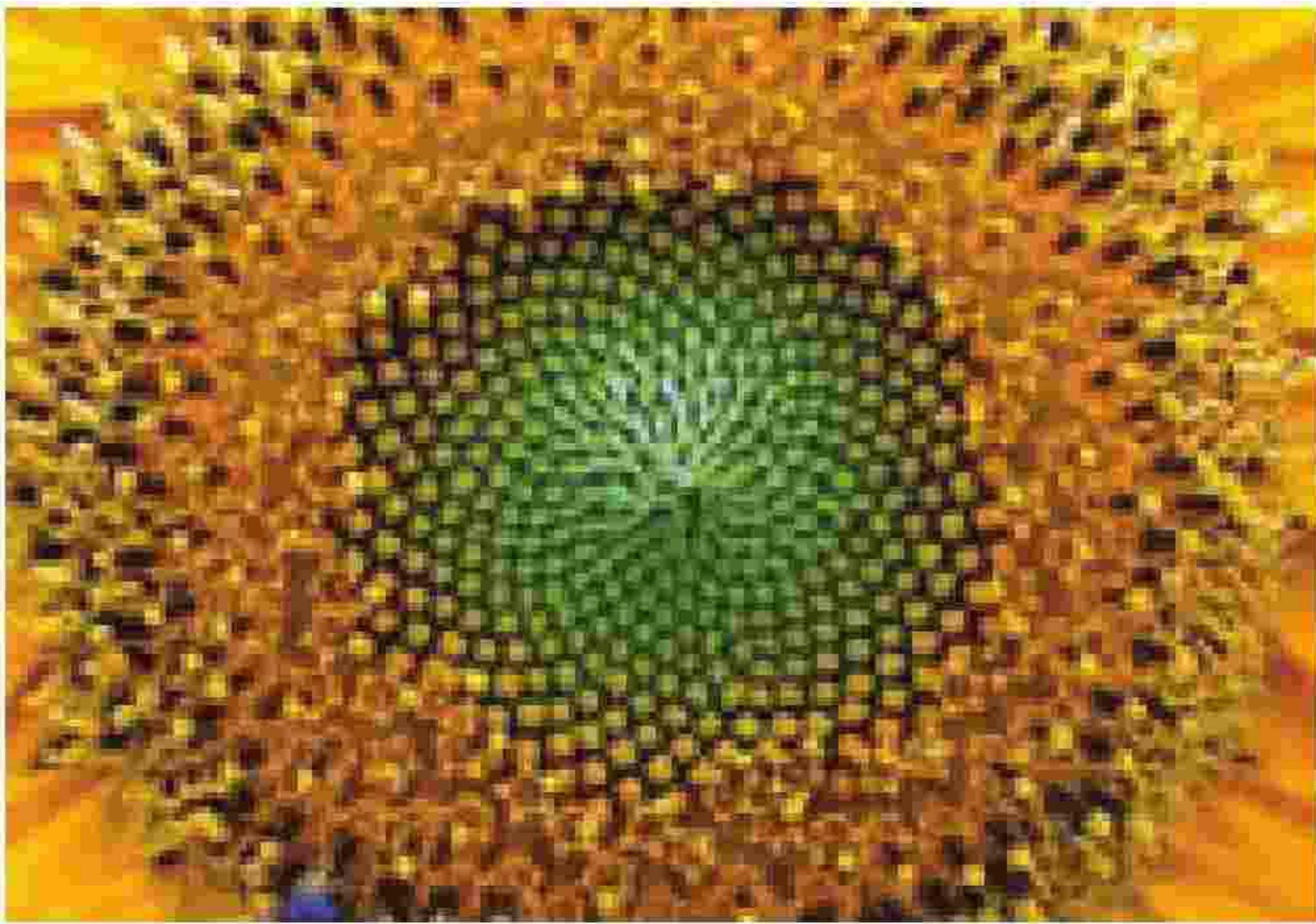
$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس  $C_n = 4n + 1$ . بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

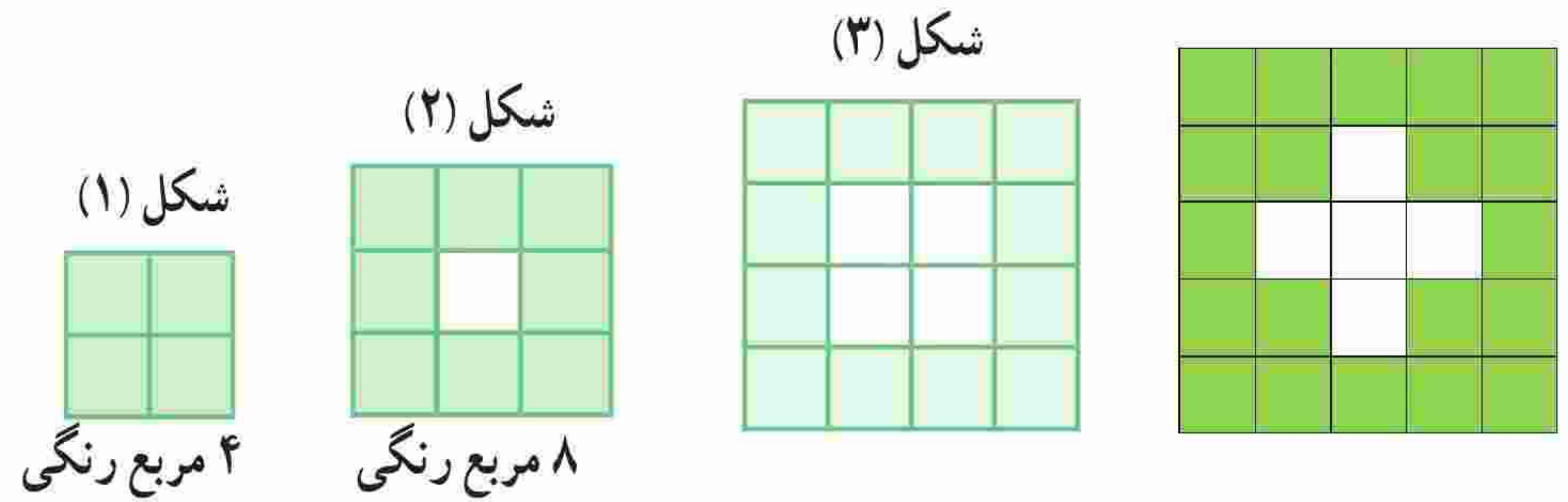
۵, ۹, ۱۳,  $\frac{17}{C_4}$ , ۲۱, ۲۵, ۲۹, ۳۳, ۳۷,  $\frac{41}{C_{10}}$ , ۴۵, ...







۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
$b_n$ : تعداد مربع های رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین $b_n$ و $n$	$b_1 = 4$	$b_2 = 8$	$b_3 = 12$	$b_4 = 16$	$b_5 = 20$

۲ توضیح دهید که چرا این الگوی یک الگوی خطی محسوب می شود. چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی در آن ، عددی ثابت است.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار  $a$  در رابطه  $b_n = an + h$  را بیابید و پس از حدس زدن مقدار  $h$ ، حاصل  $b_n$  را به دست آورید.

اختلاف هر دو جمله ی متوالی برابر ۴ است پس  $a=4$  و  $h=0$  ، پس :  $b_n = 4n$

۴ شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

$$b_n = 4n \xrightarrow{n=250} b_{250} = 1000$$

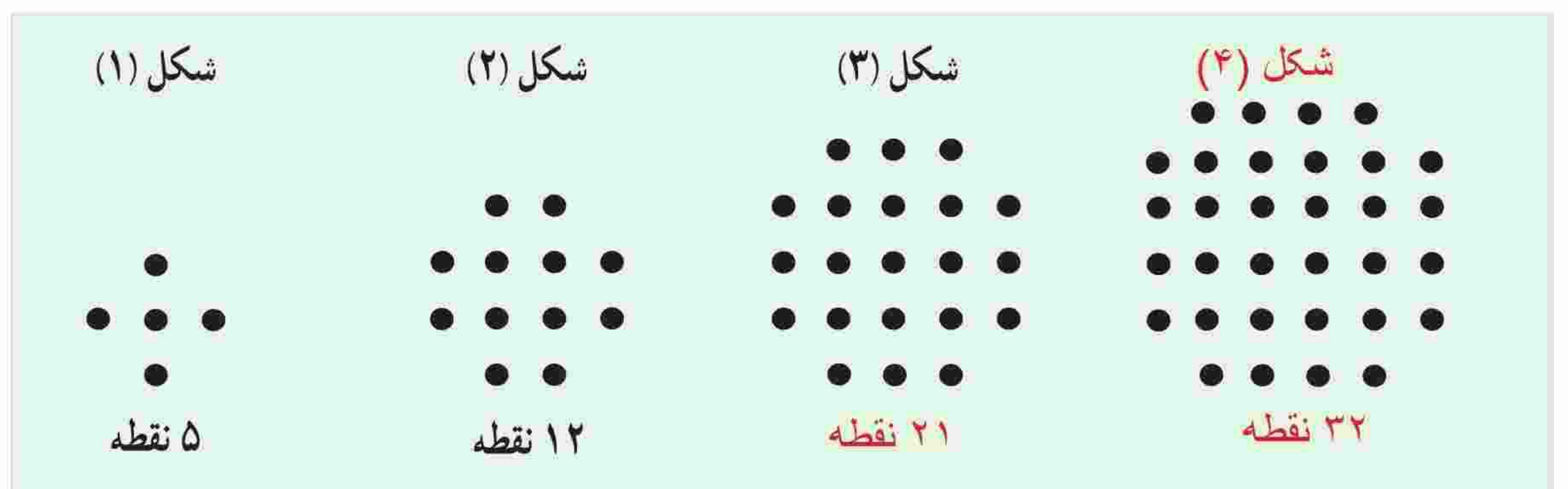
۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟  $b_n = 144 \Rightarrow 4n = 144 \Rightarrow n = 36$  یعنی در مرحله ی ۳۶ ام ، ۱۴۴ مربع رنگی داریم .

### الگوهای غیر خطی

ملاسعیدی @sinxcosx  
09168324500

### تحالیت

۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



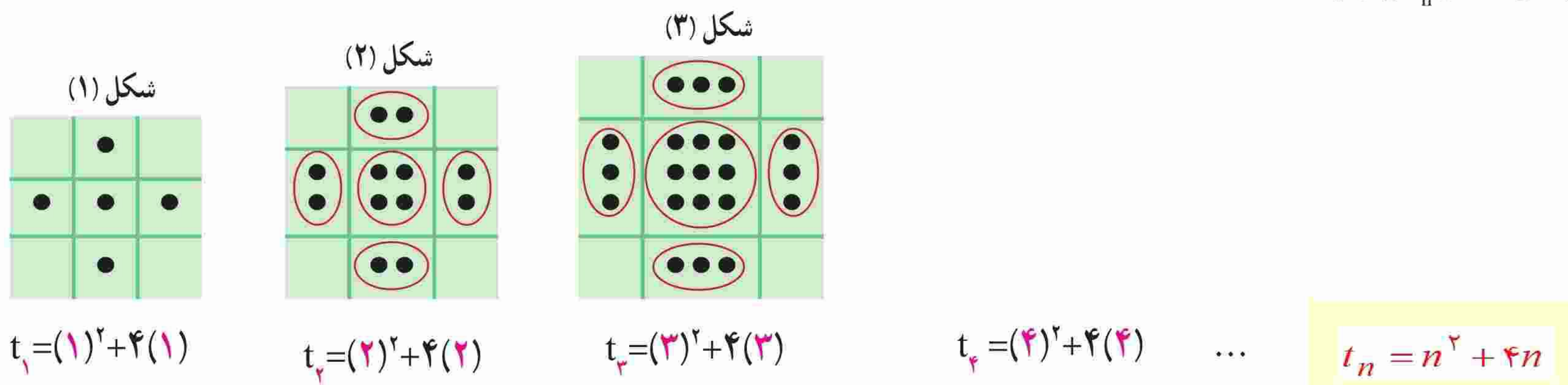
n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
$t_n$ : تعداد نقطه ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	
رابطه بین $t_n$ و $n$	$t_1 = 5$	$t_2 = 12$	$t_3 = 21$	$t_4 = 32$	

۲ آیا این الگوی یک الگوی خطی است؟ چرا؟

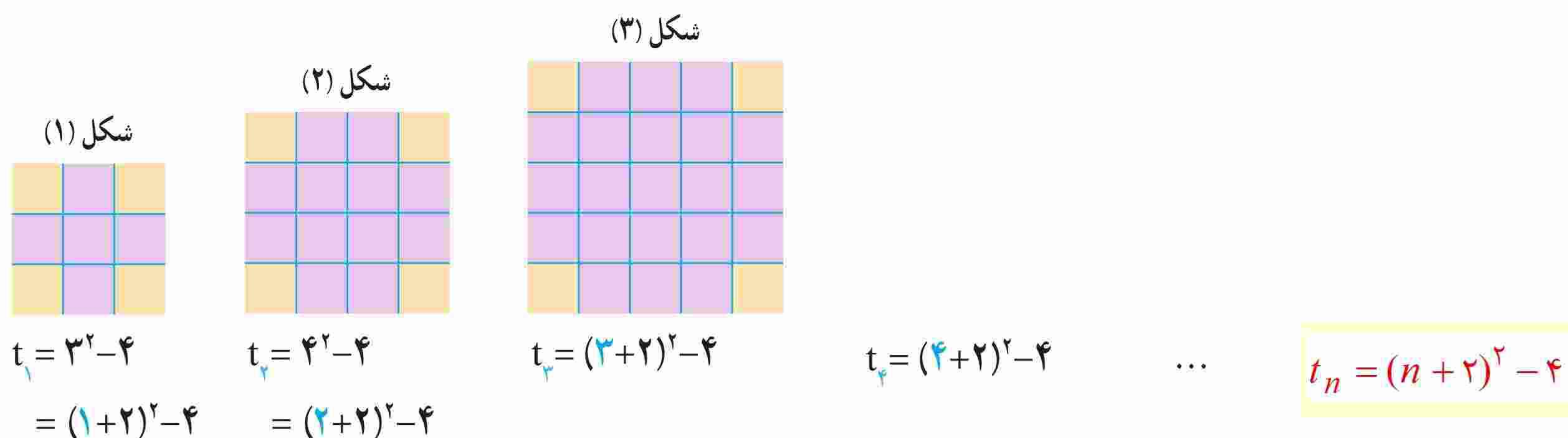
خیر ، زیرا اختلاف هر دو جمله ی متوالی ، عددی ثابت نیست .



۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار  $t_n$  را بیابید.



۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار  $t_n$  را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای  $t_n$  در دو قسمت قبلی، برابرند.

جواب امیررضا  $\Rightarrow t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n$  جواب امیرمحمد

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن  $t_n$  می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

### دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵, .....

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با  $t_1$ ، جمله دوم را با  $t_2$  و به همین ترتیب جمله  $n$ ام یا جمله عمومی آن را با  $t_n$  نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بنویسید.  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ : دنباله فیبوناچی  $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ : دنباله اعداد طبیعی زوج

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

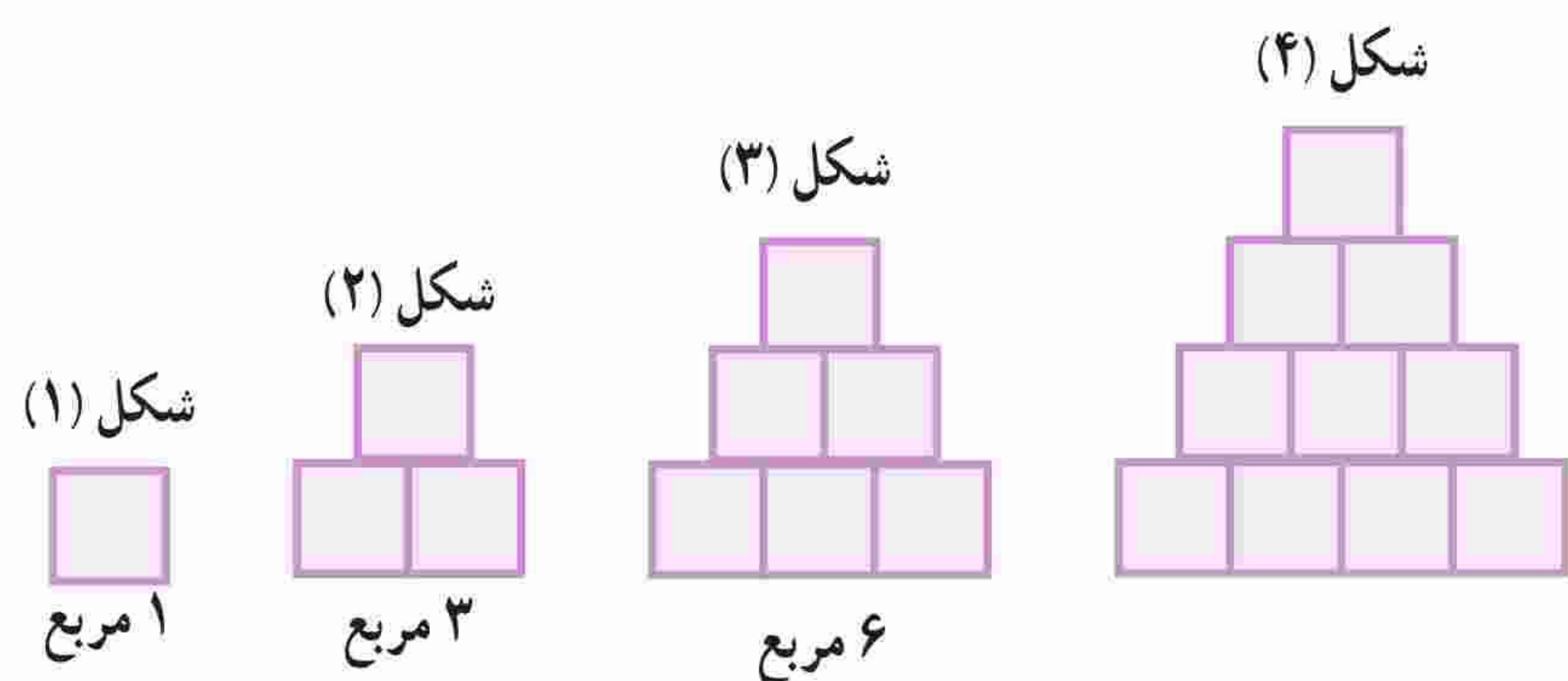
الف)  $a_n = n^2 - 1$  :  $0, 3, 8, 15, 24$

ب)  $b_n = -n + 4$  :  $3, 2, 1, 0, -1, -2$

ج)  $c_n = -13 + 2n$  :  $-11, -9, -7, -5, -3$

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بنویسید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	...	$t_n$	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...	-n	...
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	...	$\sqrt{2n-1}$	...
1	4	9	16	25	36	49	...	$n^2$	...
0/1	0/01	0/001	0/0001	0/00001	0/000001	0/0000001	...	$(0/1)^n$	...
-1	8	-27	64	-125	216	-343	...	$(-1)^n n^3$	...
5	18	31	44	57	70	83	...	...	...
-2	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{32}$	...	...	...
1	2	4	7	11	16	23	...	...	...
3	1	4	1	5	1	6	...	...	...
1	1	2	3	5	8	13	...	...	...
2	3	5	7	11	13	17	...	...	...



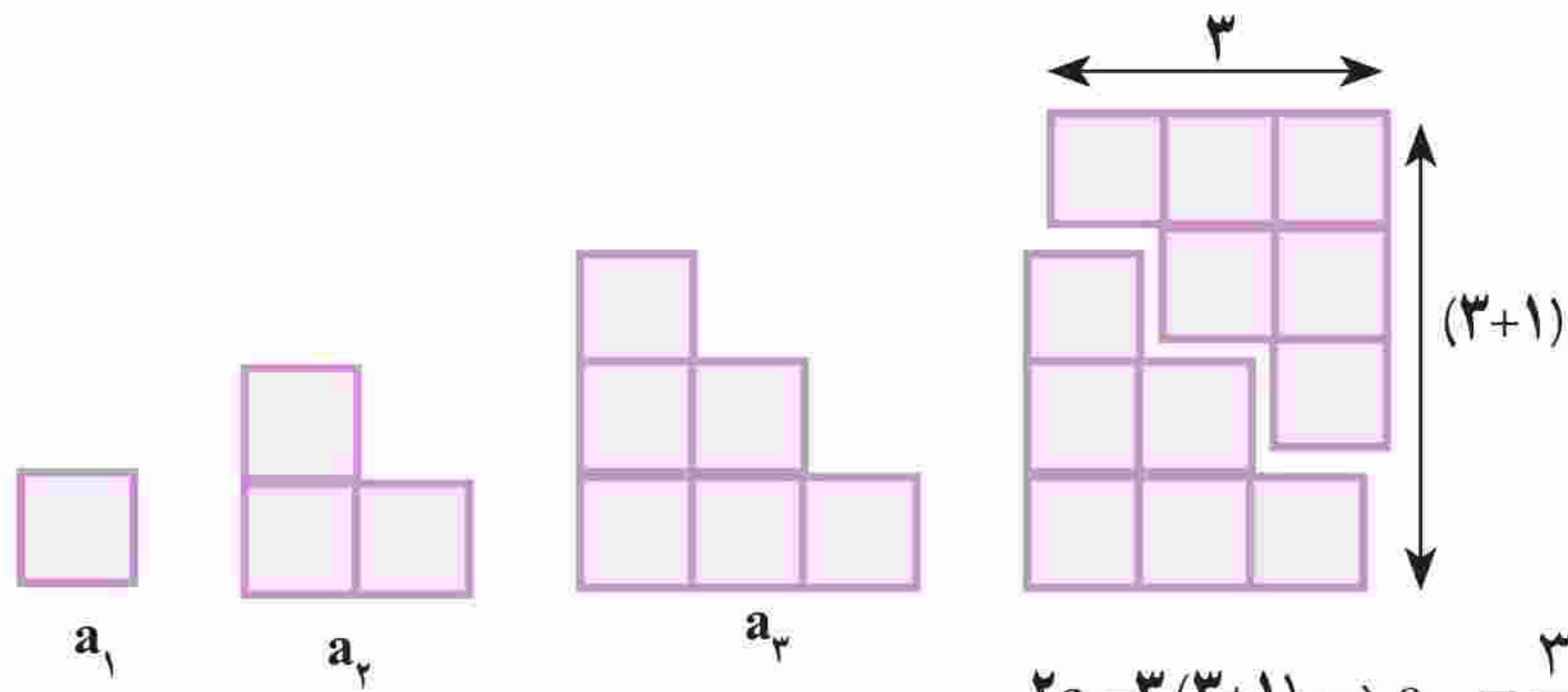
۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم

آن بنویسید.  $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$  (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ **خیر** چرا؟

**چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی آن، عددی ثابت نیست.**



$$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(پ) شکل های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می کنیم. با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید.

(ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

همان جمله ی  $n$  ام مرحله ی قبلی است.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

**تمرین**

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید. ۱۲ کاشی تیره

(ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید. ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ...

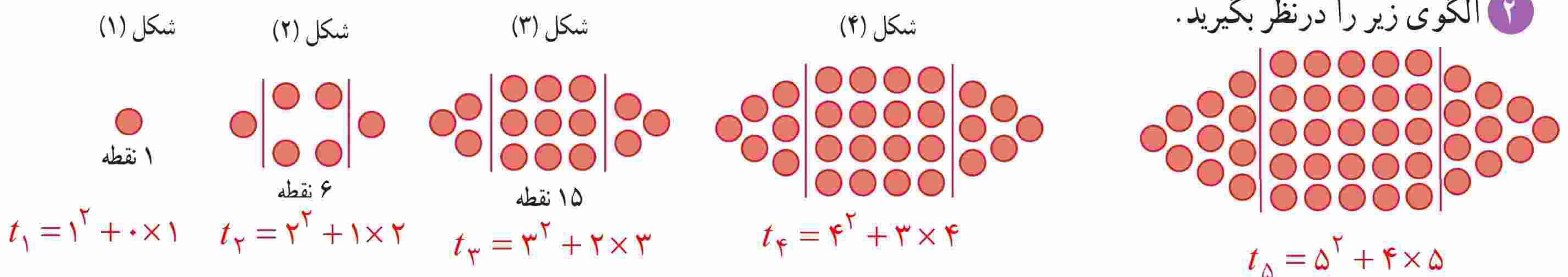
(پ) اگر  $n$  تعداد کاشی های سفید و  $t_n$  تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار  $t_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.  $t_n = 2(n+2) = 2n+4$

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟  $t_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چند است؟

تعداد کاشی های سفید ۲۳ است.  $t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. ۱، ۶، ۱۵، ۲۸، ۴۵، ۶۶، ...

(ب) جمله عمومی الگو را بیابید.  $t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟  $t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 190$

۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی

- (الف)  $a_n = 4n$  ... و ۸، ۱۲، ۱۶، ۲۰
- (ب)  $b_n = 3n+1$  ... و ۷، ۱۰، ۱۳، ۱۶
- (پ)  $c_n = n^2+2$  ... و ۳، ۶، ۱۱، ۱۸
- (ت)  $d_n = n^2+n$  ... و ۲، ۶، ۱۲، ۲۰

۴ برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

(الف) ۵، ۸، ۱۳، ۲۰، ۲۹، ...

(ب) ۵، ۱۲، ۲۲، ۳۵، ۵۱، ...

یاد آوری: دنباله ... و ۳، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، ۴۲، ...

با جمله عمومی  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$  است.

بنابراین  $t_n = (n+1)^2 + a_n$  و در نتیجه:

$$t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

فعالیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, .....

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.  $t_1 = \boxed{2000}$ ,  $d = \boxed{4}$

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟ ۲۰۳۲

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_n$	...
۲۰۰۰	$2000 + 1(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 3(4)$	...	$2000 + (n-1)(4)$	...

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{24} = 2000 + (24-1)(4) = 2092$$

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	$t_1 + 4d$	$t_1 + 5d$	...	$t_1 + (n-1)d$	...

$\xrightarrow{+d}$     $\xrightarrow{+d}$     $\xrightarrow{+d}$

همان طور که مشاهده شد،

جمله  $n$ ام یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدر نسبت  $d$  به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است.

کار در کلاس

۱ در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف)  $5, 10, 15, 20, \boxed{25}, \boxed{30}, \boxed{35}, \dots, d=5, a_n = 5 + (n-1)5 = 5n$

ب)  $1, 3, 5, 7, \boxed{9}, \boxed{11}, \boxed{13}, \dots, d=2, b_n = 1 + (n-1)2 = 2n-1$

پ)  $5, 9, 13, 17, \boxed{21}, \boxed{25}, \boxed{29}, \dots, d=4, c_n = 5 + (n-1)4 = 4n+1$

ت)  $13, 7, 1, -5, \boxed{-11}, \boxed{-17}, \boxed{-23}, \dots, d=-6, d_n = 13 + (n-1)(-6) = -6n+19$

۲ A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم کارت های شرکت B  
هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان  
هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت های شرکت A  
هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان  
هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان



فرض کنیم  $a_n$  نشان دهنده هزینه کل  $n$  دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و  $b_n$  هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار  $a_n$  و  $b_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.  $a_n = 2000 + 30n$  و  $b_n = 3000 + 20n$   
ب) جدول زیر را کامل کنید.

n: زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
A هزینه سیم کارت $a_n$	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰	۶۸۰۰
B هزینه سیم کارت $b_n$	...	۳۸۰۰	۴۶۰۰	۵۴۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا  $a_n$  و  $b_n$  هر کدام می توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ بله چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

زیرا جمله عمومی آنها به شکل یک دنباله خطی است. دلیل دیگر اینکه اختلاف هر دو جمله ی متوالی آنها مقدار ثابتی است.

$$a_n : d = 3200 - 2000 = 1200 \quad \text{و} \quad b_n : d = 3800 - 3000 = 800$$

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه

می کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می کنید؟ چرا؟

$$a_{60} = 3800, \quad b_{60} = 4200 \Rightarrow \text{به سارا سیم کارت A را پیشنهاد می کنیم.}$$

$$a_{150} = 6500, \quad b_{150} = 6000 \Rightarrow \text{به فاطمه سیم کارت B را پیشنهاد می کنیم.}$$

در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید.  $4, 11, 18, 25, \dots$   
 حل: آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟



آرتین: از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می‌کنیم:  
 $t_n = t_1 + (n-1)d$   
 $t_{16} = t_1 + 15d$   
 $= 4 + (15)(7)$   
 $= 109$

آرکان: یک الگوی خطی با قدرنسبت 7 داریم. پس  
 $t_n = 7n + b$   
 $t_1 = 7(1) + b$   
 $4 = 7 + b \Rightarrow b = -3$   
**جمله عمومی**  
 $t_n = 7n - 3$   
 $t_{16} = 7(16) - 3$   
 $t_{16} = 109$

کار در کلاس

۱ الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن 10 باشد.  $\dots$  و 10 و 8 و 6 و 4

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن 10 باشد.  $\dots$  و 10 و 15 و 20 و 25

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.  $\dots$  و -3 و -1 و 1 و 3 و 5

۲ الف) بین 18 و 62 سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین 18 و 62 سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم.

حل: با فرض اینکه 18 جمله اول باشد، قدرنسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
18	29	40	51	62

$t_1 = 18$   
 $t_5 = 62 \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = 11$

توجه: برای محاسبه‌ی قدرنسبت می‌توان از رابطه  $d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$  نیز استفاده کرد.

بنابراین  $d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{62 - 18}{4} = 11$

ب) بین 20 و 80 به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{80 - 20}{2} = 30$

20	50	80
----	----	----

20	40	60	80
----	----	----	----

$d = \frac{t_4 - t_1}{4 - 1} = \frac{80 - 20}{3} = 20$

$d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{80 - 20}{4} = 15$

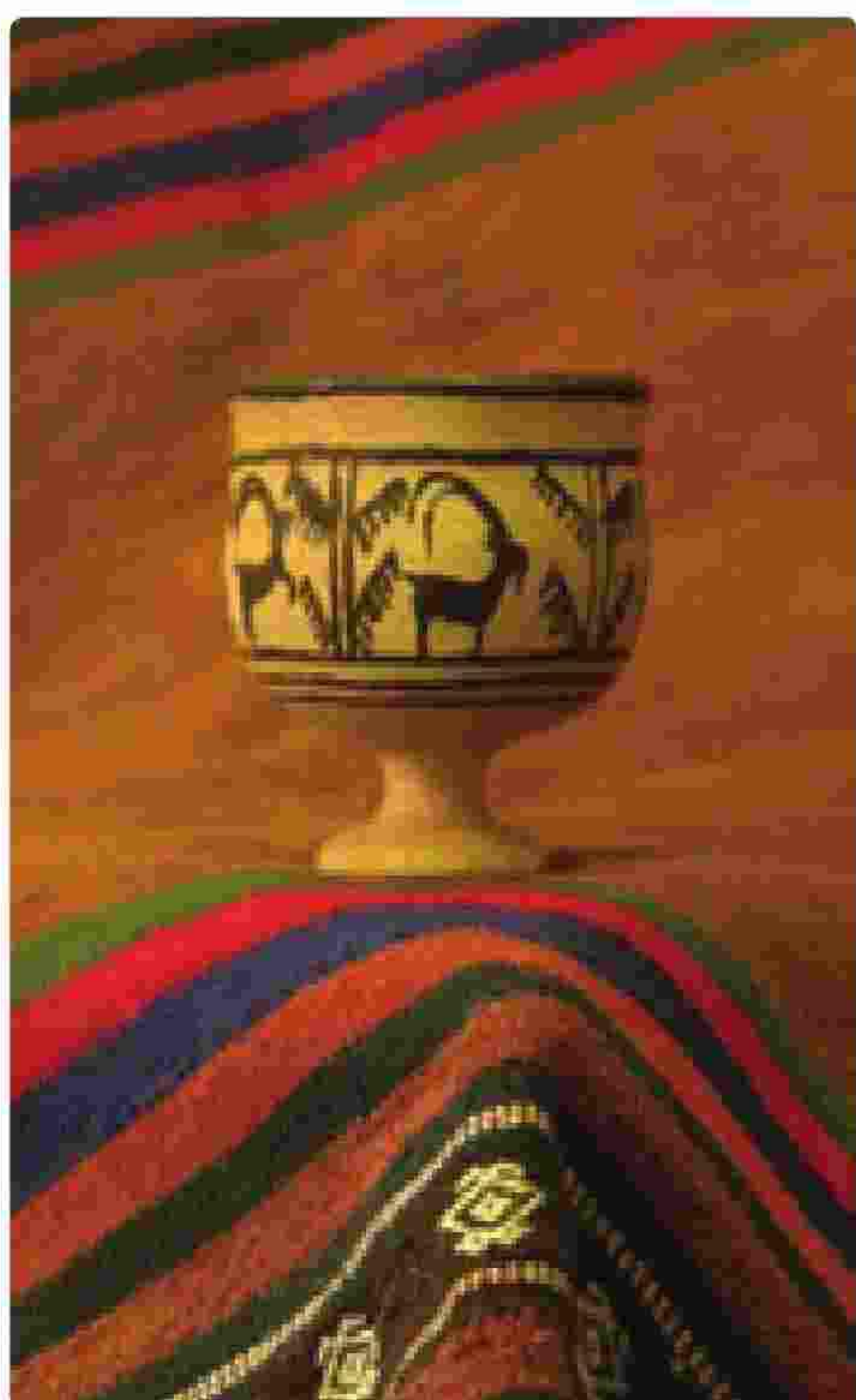
20	35	50	65	80
----	----	----	----	----

20	32	44	56	68	80
----	----	----	----	----	----

$d = \frac{t_6 - t_1}{6 - 1} = \frac{80 - 20}{5} = 12$

$d = \frac{t_7 - t_1}{7 - 1} = \frac{80 - 20}{6} = 10$

20	30	40	50	60	70	80
----	----	----	----	----	----	----



پویانمایی روی سفال

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف)  $d = 7$  و حسابی  $3, 10, 17, 24, \dots$

ب)  $1, 2, 4, 8, \dots$  نا حسابی

$$t_{21} = a + 20d = 3 + 140 = 143$$

پ)  $d = \sqrt{3}$  و حسابی  $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

ت)  $d = -3$  و حسابی  $10, 7, 4, 1, \dots$

$$t_{21} = a + 20d = \sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$$

$$t_{21} = a + 20d = 10 + (-60) = -50$$

ث)  $d = \frac{1}{5}$  و حسابی  $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

ج)  $d = 0$  و حسابی  $2, 2, 2, 2, \dots$

$$t_{21} = a + 20d = \frac{2}{5} + \frac{20}{5} = \frac{22}{5}$$

$$t_{21} = a + 20d = 2 + 0 = 2$$

۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب  $20$  و  $56$  است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$d = \frac{t_7 - t_3}{7 - 3} = \frac{56 - 20}{4} = 9 \quad t_3 = a + 2d = 20 \rightarrow a + 18 = 20 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \text{دنباله: } 2, 11, 20, 29, \dots$$

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول  $3$  و مجموع سه جمله بعدی آن  $39$  است. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + a + d + a + 2d = 3 \\ a + 3d + a + 4d + a + 5d = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3d = 3 \\ 3a + 12d = 39 \end{cases} \xrightarrow{\times(-)} \begin{cases} -3a - 3d = -3 \\ 3a + 12d = 39 \end{cases}$$

$$9d = 36 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a = -3$$

دنباله:  $-3, 1, 5, 9, \dots$

۴ الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.

دنباله از نوع حسابی است:  $1, 5, 9, 13, \dots$

ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

$$a = 1, d = 4 \Rightarrow t_n = 1 + (n - 1) \times 4 \Rightarrow t_n = 4n - 3$$

پ) جمله چندم این دنباله  $397$  است؟

$$t_n = 397 \Rightarrow 4n - 3 = 397 \Rightarrow n = 100$$

۵ الف) واسطه حسابی بین  $5$  و  $11$  چه عددی است؟

$$b \text{ واسطه حسابی بین } 20 \text{ و } 30 \text{ چه عددی است؟}$$

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{30 - 20}{2} = 5 \Rightarrow 20, \boxed{25}, 30$$

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \Rightarrow 5, \boxed{8}, 11$$

ب) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ واسطه‌ی حسابی دو عدد، همان میانگین آنها است.

به عبارت دیگر: اگر  $c$  و  $b$  و  $a$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند،  $b$  را واسطه‌ی حسابی نامیده و داریم:  $a + c = 2b$  یا  $b = \frac{a + c}{2}$

۶ مسئله زیر در پایروس رایند آمده است. آن را حل کنید.

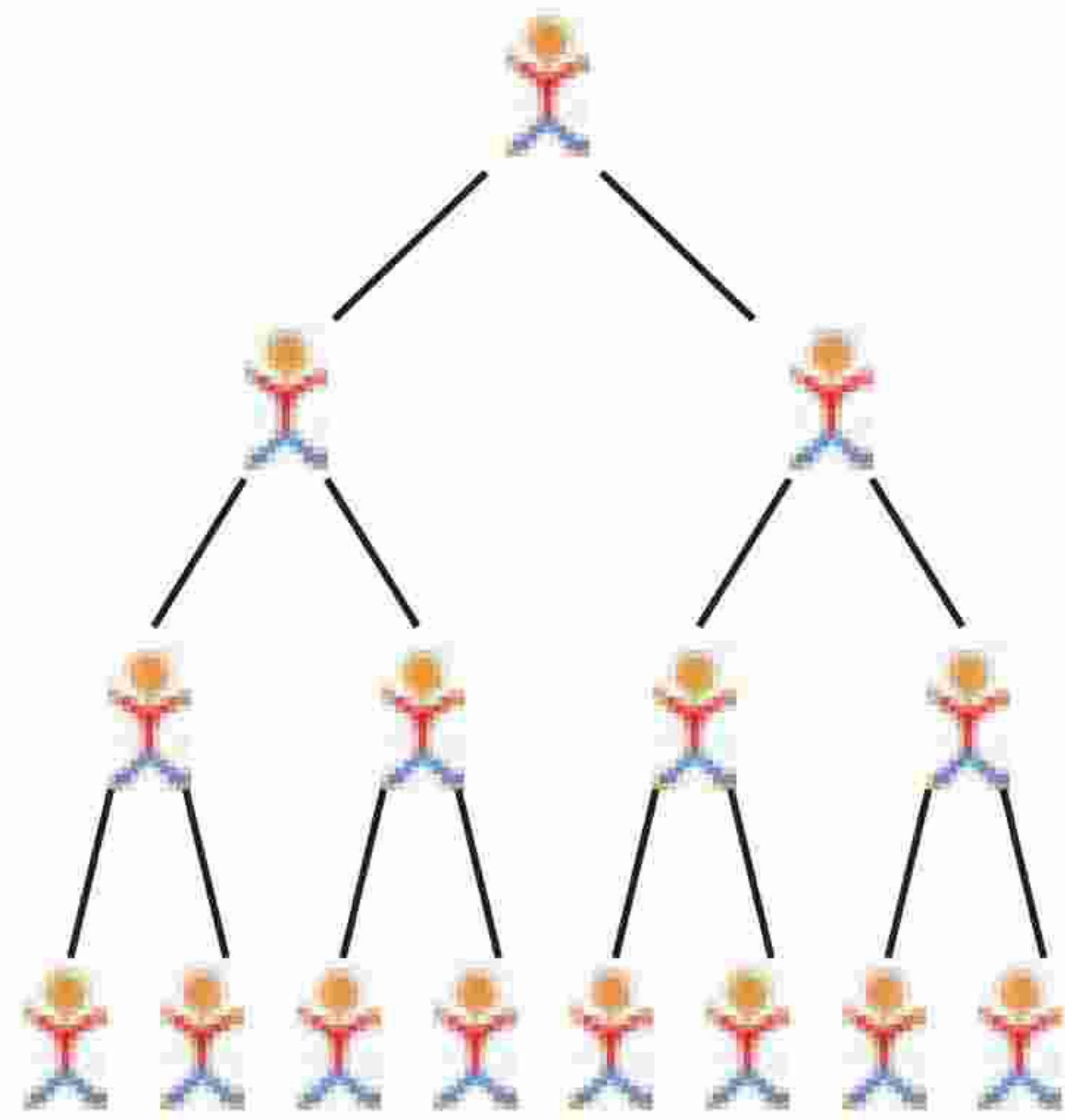
« $100$  قرص نان را بین  $5$  مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

دنباله‌ی حسابی تشکیل شده را  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  در نظر می‌گیریم. طبق فرض سوال می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100 &\Rightarrow 5a + 10d = 100 \xrightarrow{\div 5} a + 2d = 20 \\ \frac{1}{3}(t_3 + t_4 + t_5) = t_1 + t_2 &\xrightarrow{\times 3} 3a + 9d = 6a + 3d \Rightarrow a = 2d \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = 5, a = 10$$

بنابراین دنباله به صورت  $10, 15, 20, 25, 30$  می‌باشد.





### دنباله هندسی

علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می‌شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش‌بینی می‌شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.

### فعالیت

۱ جدول مقابل را کامل کنید و  $t_n$  را بیابید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟  $t_{10} = 2^{10} = 1024$

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟  $t_{11} = 2^{11} = 2048$

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

$$t_n = 16384 \Rightarrow 2^n = 2^{14} \Rightarrow n = 14$$

در مثال بالا می‌توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم:

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, .....

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی:

روز: n	$t_n$ : تعداد افراد جدیدی که در روز n ام مبتلا می‌شوند
۱	۲ (امید و محسن)
۲	$2 \times 2 = 2^2$
۳	$4 \times 2 = 2^3$
۴	$8 \times 2 = 2^4$
۵	$16 \times 2 = 2^5$
۶	$32 \times 2 = 2^6$
⋮	⋮
n	$t_n = 2^n$

**دنباله هندسی**، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

### فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$  باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$	...	$t_1 r^{n-1}$	...
	$\times r$	$\times r$	$\times r$	$\times r$			

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که :

جمله  $n$ ام دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است که در آن  $t_1$  جمله اول و  $r$  قدرنسبت می باشد.

ملاسعدی @sinxcosx  
09168324500

کار در کلاس

۱) نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی  $9, 3, 1, \dots$  روش های مقابل را به کار برده اند.

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند؟ نگار توضیح دهید.

برای محاسبه ی قدرنسبت باید هر جمله را بر جمله ی قبلی آن تقسیم کرد. ولی متأسفانه نرگس جمله را بر جمله ی بعدیش تقسیم نموده است. که غلط است.

نگار	نرگس
$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$r = \frac{9}{3} = 3$
$t_7 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$	$t_7 = 9(3)^{7-1}$
$= \frac{1}{81}$	$= 6561$

۲) در دنباله های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف)  $a_1, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$   
 $\begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ \times 3 & \times 3 = r \end{matrix}$

ب)  $5, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \dots, b_n = 5 \times 2^{n-1}$

پ)  $6, -60, 600, -6000, \boxed{60000}, \boxed{-600000}, \dots, c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

ت)  $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \dots, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-3}}$



۳) الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوئیم ۱۲ یک واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟

$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4 \end{cases}$

۳   ۱۲   ۴۸   یا   ۳   -۱۲   ۴۸



اگر  $t_m$  و  $t_n$  دو جمله ی متمایز دنباله ی هندسی باشند آنگاه  $r^{n-m} = \frac{t_n}{t_m}$  است.

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ خیر جواب یکتا نیست. بلکه دارای دو جواب است.

اگر  $a, b, c$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند، آنگاه  $b, a, c$  واسطه ی هندسی (میانگین هندسی) نامیده و خواهیم داشت:  $ac = b^2$  لوتر در اکثر برابر است با مربع وسط

$t_1 = 3, t_5 = 48 \Rightarrow r^{5-1} = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = \pm 2$

۳   ۶   ۱۲   ۲۴   ۴۸   یا   ۳   -۶   ۱۲   -۲۴   ۴۸

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

$10, b, 4000 \Rightarrow b^2 = 10 \times 4000 = 40000 \Rightarrow b = \pm 200$

$t_1 = 10, t_4 = 8000 \Rightarrow r^{4-1} = \frac{8000}{10} = 800 \Rightarrow r = 20$

۱۰   ۲۰۰   ۴۰۰۰   ۸۰۰۰۰

$t_1 = 4, t_6 = 972 \Rightarrow r^{6-1} = \frac{972}{4} = 243 \Rightarrow r = 3$

۴   ۱۲   ۳۶   ۱۰۸   ۳۲۴   ۹۷۲

۴ یک کوه یخی هزار تنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می دهد.

پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

- الف) چیزی از آن باقی نمی ماند. (ب) حدود  $\frac{1}{3}$  آن باقی می ماند. ✓  
 ب) تقریباً نصف آن آب می شود. (ت) حدود  $\frac{2}{3}$  آن باقی می ماند.

تمرین

۱ از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

هندسی نیست  $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$  (ب)

هندسی است و  $r = \frac{5}{5} = 1$  (ت)  $5, 5, 5, 5, \dots$

هندسی است و  $r = \frac{28}{7} = 4$   $7, 28, 112, 448, \dots$  (الف)

هندسی است و  $r = -\frac{1}{2} \div 1 = -\frac{1}{2}$   $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$  (پ)

فرض  $t_1 = 1 \Rightarrow 1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \dots$

فرض  $t_1 = -1 \Rightarrow -1, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{25}, \dots$

۲ چند دنباله هندسی با قدر نسبت  $\frac{4}{5}$  می توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

با توجه به انتخاب جمله های اول دلخواه، بی شمار دنباله ی هندسی با قدر نسبت داده شده می توان نوشت.

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی. درست نیست، زیرا بی شمار دنباله می توان نام برد که نه حسابی و نه هندسی باشند، به عنوان نمونه دنباله مثلثی، مربعی، فیبوناتچی و ... یا دنباله های غیر معروف مثل:  $2, 6, 12, 20, \dots$

ب) دنباله ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

درست نیست، دنباله هایی با اعداد ثابت ناصفر، در نظر بگیرید این دنباله ها حسابی با قدرنسبت صفر و هندسی با قدرنسبت یک می باشند. مانند  $2, 2, 2, \dots$

۴ علی دو چرخه ای را به قیمت  $5000$  هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دو چرخه دست دوم، در هر سال  $20\%$  درصد نسبت به سال

قبل از خودش کاهش یابد. الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دو چرخه اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد؟

کاهش  $20\%$  درصدی قیمت به معنی آن است

$$\frac{\text{بعد از سه سال}}{\text{بعد از دو سال}} = \frac{\text{بعد از یک سال}}{\text{بعد از دو سال}}$$

$$5000000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^3 = 2560000 \quad \text{بنابراین:} \quad 5000000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^2 = 3200000$$

ب) قیمت دو چرخه بعد از گذشت  $n$  سال از چه رابطه ای به دست می آید؟  $t_n = 5000000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^n$

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.  $2, 4, 8, \dots$

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{(1+2+3+\dots+20)} = 2^{\frac{2 \times 21}{2}} = 2^{210}$$

توجه: حاصل ضرب  $n$  جمله نخست دنباله هندسی برابر است با:  $P_n = a^n \times r^{\frac{n(n-1)}{2}}$  بنابراین:  $P_{20} = 2^{20} \times 2^{\frac{20 \times 19}{2}} = 2^{210}$

۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب  $12$  و  $96$  می باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$t_3 = 12, t_6 = 96 \Rightarrow r^{6-3} = \frac{t_6}{t_3} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} r=2 \\ a \times 2^2 = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 3$$

دنباله:  $3, 6, 12, \dots$

۷ بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده ای از عدد  $27759$  نفر در سال  $1384$  به عدد  $16584$  نفر در

سال  $1394$  کاهش یافته است که نشان دهنده حدود  $5\%$  درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش بینی می شود در هر یک از سال های منتهی به سال  $1400$  چند نفر از هم وطن های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۴/۸	۱۴۹۶۷/۰۶	۱۴۲۱۸/۷۰۷	۱۳۵۰۷/۷۷۱	۱۲۸۳۲/۳۸۲	۱۲۱۹۰/۷۶۲

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله ای تشکیل می دهند؟ دنباله ی هندسی با قدرنسبت  $0.95$ .

توجه داشته باشید که اگر هر سال  $5\%$  کاهش یابد به این معنی است که هر سال برابر است با

$95\%$  سال قبل، پس باید هر سال را در  $0.95$  ضرب کرد تا سال آینده ی آن بدست آید.