## درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

### دو مجموعهٔ برابر

### فعالیت

توضیح صفحه ۶،۱

| | | |
|---|---|---|
| ۱۰ | $-10$ | ۱۲ |
| ۶ | ۴ | ۲ |
| $-۴$ | ۱۸ | $-۲$ |

۱ــ جدول عددهای صحیحِ روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطرِ آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعهٔ عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

$A = \{۶, ۴, ۲\} \Rightarrow n(A) = ۳$

اکنون مجموعهٔ B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ $B = \{۲, ۴, ۶\} \Rightarrow n(B) = ۳$ هرکدام سه عضو دارند

آیا هر عضو A در مجموعهٔ B است؟ آری آیا هر عضو B در مجموعهٔ A است؟ آری

دو مجموعه‌ی برابر

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعهٔ A و B یکسان است و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعهٔ A و B برابر است و می‌نویسیم $A = B$ .

۲ــ مجموعهٔ A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به‌طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است :

$A = \{۸, ۹, ۱۰\}$

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰ $B = \{۷, ۸, ۹\}$ ✗

ب) مجموعهٔ عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱ $C = \{۸, ۹, ۱۰\}$ ✓

ج) مجموعهٔ سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است. $D = \{۸, ۹, ۱۰\}$ ✓

همان‌طور که دیدید مجموعهٔ $\{۸,۹,۱۰\}$ با مجموعه $\{۷,۸,۹\}$ برابر نیست؛ زیرا همهٔ عضوهایشان یکسان نیست.

مهم

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.



### کار در کلاس

۱ــ جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پرکنید که مجموعه‌ها برابر باشد :

الف) $$\left\{۵, -۳, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳}\right\} = \left\{\frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}, ۴, \sqrt{۲۵}\right\}$$

$$\sqrt{۲۵} = ۵ \ , \ \frac{۹}{۳} = ۳ \ , \ \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲} = \frac{-۱۲}{۴} = -۳$$

فعالیت ۱

$(-10, \overset{+6}{-4}, \overset{+6}{2})$

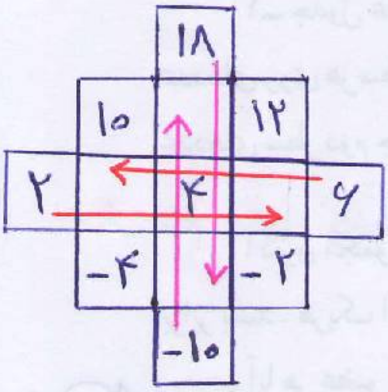
$\xrightarrow{+8}$ $(-2, 4, 10)$

$\xrightarrow{+8}$ $(6, 12, 18)$

$(-10, -4, +2), (-2, 4, 10), (6, 12, 18)$

$\cancel{(-10)} + \cancel{(-4)} + \underbrace{(+2) + (-2)}_{0} + \cancel{4} + \cancel{10} + 6 + 12 + 18 = 36$

$36 \div 3 = 12$ مجموع هر سطر



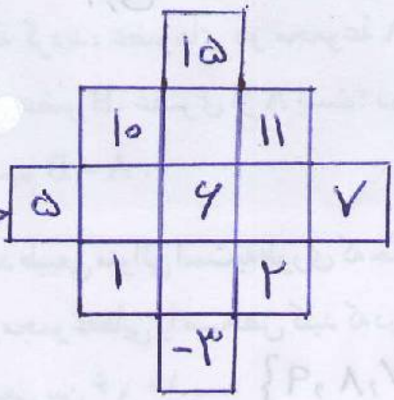
$\Longrightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱۰ | -۱۰ | ۱۲ | =۱۲ |
| ۶ | ۴ | ۲ | =۱۲ |
| -۴ | ۱۸ | -۲ | =۱۲ |
| =۱۲ | =۱۲ | =۱۲ | =۱۲ |

$(15, \overset{-4}{11}, \overset{-4}{7})$

$\xrightarrow{-5}$ $(10, 6, 2)$

$\xrightarrow{-5}$ $(5, 1, -3)$



$\Longrightarrow$

مثال

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱۰ | -۳ | ۱۱ | =۱۸ |
| ۷ | ۶ | ۵ | =۱۸ |
| ۱ | ۱۵ | ۲ | =۱۸ |
| =۱۸ | =۱۸ | =۱۸ | =۱۸ |

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ ، $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ ، $-\frac{1}{2}=-0/5$ ، $0/625=\frac{625}{1000}=\frac{5}{8}$

ب) $\left\{7, \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, -2, 0/625\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -0/5, \frac{5}{8}, 7, -2\right\}$

۲ــ دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

$A=\left\{\sqrt{25}, \frac{21}{15}, 2^3, -\frac{-\sqrt{36}}{-\sqrt{9}}\right\}$

$B=\left\{\sqrt[3]{125}, 8, -\frac{4}{2}, \frac{7}{5}\right\}$

$2^3=8$

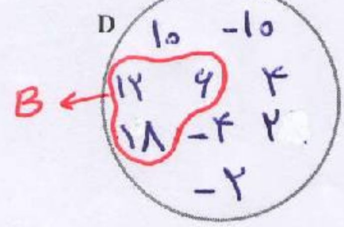
$\sqrt{25}=\sqrt[3]{125}$

$\frac{21}{15}=\frac{7}{5}$ ، $-\frac{-\sqrt{36}}{-\sqrt{9}}=-\frac{4}{2}$

## زیرمجموعه

زیرمجموعه

### فعالیت




مجموعهٔ عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای مجموعهٔ D را در نمودار وِن روبه‌رو بنویسید:

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش‌پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعهٔ B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟ آری

در مجموعهٔ D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا C = D؟ بله $C=\{6, 12, 18\}$

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعهٔ B همگی در D هست؛ یعنی **هر** عضو B، عضوی از D است؛ در این صورت مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ D است و می‌نویسیم $B \subseteq D$.

آیا مجموعهٔ C زیرمجموعهٔ D است؟ بله، چون هر عضو C، عضوی از D می‌باشد

نکته مهم

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعهٔ خودش هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$.

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این مجموعه چیست؟ $\varnothing=\{\ \}$ تهی

آیا عبارت $\{2, -6, 4, 10\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟ بله، چون هر عضو مجموعه، عضوی از مجموعه‌ی D می‌باشد

نکته مهم

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

آیا در مجموعهٔ تُهی عضوی هست که در مجموعهٔ دلخواهی مانند A نباشد؟ خیر

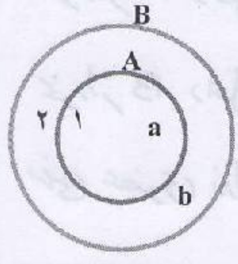
نکته مهم

مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی: $\varnothing \subseteq A$.

**مثال :** دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$ ؛ زیرا در مجموعهٔ سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست نیست.

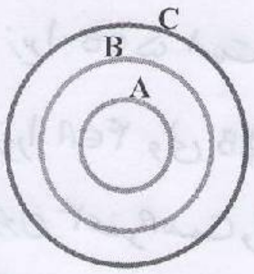
ب) $\{-1,0,1,3\} \subseteq \{2,-1,1,0,3,4\}$ ؛ زیرا هر عضو مجموعهٔ سمت چپ، عضوی از مجموعهٔ سمت راست است.




$A \subseteq B, B \not\subseteq A$

ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همهٔ عضوهای A در B قرار دارد و $B \not\subseteq A$ درست است؛ زیرا عضوی در B مانند ۲ می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

## کار در کلاس




۱ــ با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید : صحیح ۸/۱

$C \not\subseteq A$ ✓ ، $B \subseteq A$ ✗ ، $A \not\subseteq C$ ✗

$A \subseteq B$ ✓ ، $B \subseteq C$ ✓ ، $\varnothing \subseteq A$ ✓

۲ــ مجموعه‌های A، B و C را درنظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل) : صحیح ۸/۱

$A = \{1,3,6,4\}$ , $B = \{5,1,3\}$ , $C = \{2,5,1,3,6\}$

$B \not\subseteq A$ ✓، $3 \subseteq B$ ✗، $A \subseteq B$ ✗، $B \subseteq C$ ✓، $A \not\subseteq C$ ✓، $2 \in A$ ✗

$\{1,4\} \in A$ ✗ ، $6 \notin A$ ✗، $\{5,6\} \subseteq C$ ✓، $5 \in C$ ✓ ، $0 \subseteq A$ ✗

**مثال :** همهٔ زیرمجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ در زیر نوشته شده است :

$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

۳- مانند مثال قبل، تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. ب) $B = \{a,b,c,d\}$

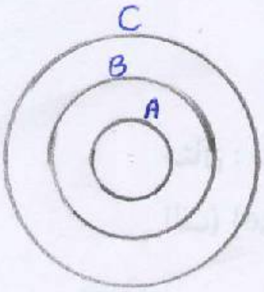
$A = \{10, 11\}$

صحیح ۸/۱

## نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

کار در کلاس (۱)




✓ $C \nsubseteq A$ مجموعه‌ی A داخل مجموعه‌ی C است پس مجموعه‌ی C زیرمجموعه‌ای A نیست

× $B \subseteq A$ مجموعه‌ای B مجموعه‌ی A را در خودش دارد لذا B زیرمجموعه‌ی A نادرست است

× $A \nsubseteq C$ نمودار A داخل نمودار C است پس $A \subseteq C$ می‌باشد

✓ $A \subseteq B$ نمودار A داخل نمودار B است پس $A \subseteq B$ می‌باشد

✓ $B \subseteq C$ نمودار B داخل نمودار C است پس $B \subseteq C$ می‌باشد

$\emptyset \subseteq A$ تهی عضوی ندارد و زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها می‌باشد.

(۲)

A = {۱, ۳, ۶, ۴} ، B = {۵, ۱, ۳} ، C = {۲, ۵, ۱, ۳, ۶}

✓ $B \nsubseteq A$ زیرا ۵ $\in$ B ولی ۵ $\notin$ A

× ۳ $\subseteq$ B سمت چپ مجموعه نمی‌باشد

× $A \subseteq B$ زیرا ۴ $\in$ A ولی ۴ $\notin$ B

✓ $B \subseteq C$ تمام اعضای B در مجموعه C موجود می‌باشد

✓ $A \nsubseteq C$ چون ۴ عضو A هست ولی عضو C نیست

× ۲ $\in$ A عدد ۲ در مجموعه‌ی A نیست

× {۱,۴} $\in$ A اعضای مجموعه‌ی سمت چپ در مجموعه‌ی A وجود دارد ولی مجموعه‌ی {۱, ۴} عضو مجموعه‌ی A نیست

× ۶ $\notin$ A عدد ۶ عضو A می‌باشد

✓ {۵,۶} $\subseteq$ C اعضای مجموعه سمت چپ در مجموعه‌ی C وجود دارد

✓ ۵ $\in$ C عدد ۵ عضو C می‌باشد

× ۰ $\subseteq$ A سمت چپ مجموعه نیست

A = {۱۰, ۱۱} —زیرمجموعه‌ها→ $\emptyset$ , {۱}, {۲}, {۱۰, ۱۱}

$B = \{a, b, c, d\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌ها}} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$

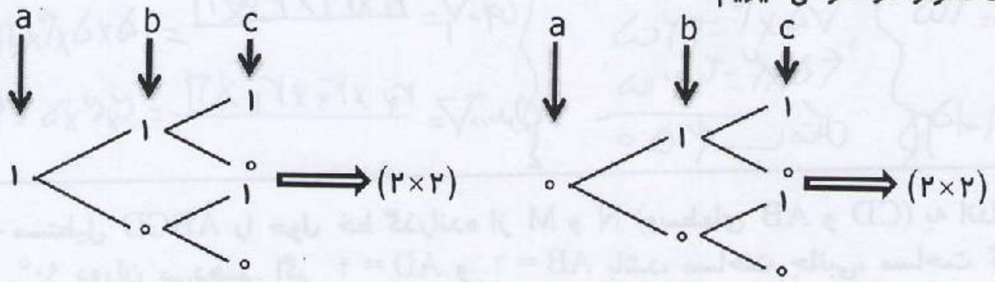
$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$

$\{a,b,c,d\}$

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی:

مثال : تمام زیر مجموعه های، مجموعه ی $A=\{a\ ,\ b, c\}$ را بنویسید.

هر کدام از اعضای مجموعه A می توانند در زیر مجموعه باشند یا نباشند. یعنی برای هر عضو دو حالت داریم برای بودن عدد یک و برای نبودن عدد صفر را در نظر می گیریم.




کل زیر مجموعه های این مجموعه برابر است با : $۲\times(۲\times۲)=۸$

نتیجه: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی k عضوی برابر است با:

$$\text{عضوها} \rightarrow a_۱\ ,\ a_۲\ ,\ a_۳\ ,\ ....\ ,\ a_k$$

$$\text{حالت ها} \rightarrow ۲\times۲\times۲\times...\times۲=۲^k$$

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی K عضوی برابر $۲^K$ می باشد.

مثال: مجموعه ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه ی دو عضوی دارد؟

فرض کنیم مجموعه ی $B=\{\square\ ,\ \square\}$ یک زیر مجموعه ی دو عضوی دل خـواه از مجموعـه ی A باشـد کـه دو خانه خـالی دارد که حتما باید پر شود

| خانه ی دوم | خانه ی اول |
|---|---|
| a | a |
| b | b |
| c | c |
| d | d |
| e | e |

* برای پر کردن خانه اول ما هیچ محدودیتی نداریم و به ۵ حالت ممکن می توانیم خانه اول را پر کنیم.

** ولی برای پر کردن خانه دوم ما نمی توانیم عضوی را که در خانه اول قرار دادیم در خانه دوم نیز قرار دهیم پس برای پر کردن این خانه ۴ حالت ممکن می باشد.

*** در کل می توانیم این دو خانه را به $۵\times۴=۲۰$ حالت ممکن پـر کنیم ولی بـا توجـه بـه ایـن کـه جابجـایی اعضـاء در مجموعه ها تاثیری ندارد یعنی $\{a,b\}=\{b,a\}$ پس نصف حالت ها حذف می شـوند لـذا تعـداد زیر مجموعـه هـای دو عضوی یک مجموعه ی ۵ عضوی برابر است با : $\frac{۵\times(۵-۱)}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$

نکته: تعداد زیر مجموعه های دو عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با: $\frac{n\times(n-1)}{۲}$



مثال : مجموعه ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه ی سه عضوی دارد؟

فرض کنیم مجموعه ی $B=\{\square\ ,\ \square\ ,\ \square\}$ یک زیر مجموعه ی سه عضوی دل خواه از مجموعه ی A باشد که سه خانه خالی دارد که حتما باید پر شود

| خ اول | خ دوم | خ سوم |
|---|---|---|
| a | a | a |
| b | b | b |
| c | c | c |
| d | d | d |
| e | e | e |

* برای پر کردن خانه اول ما هیچ محدودیتی نداریم و به ۵ حالت ممکن می توانیم خانه اول را پر کنیم.

** ولی برای پر کردن خانه دوم ما نمی توانیم عضوی را که در خانه اول قرار دادیم در خانه دوم نیز قرار دهیم پس برای پر کردن این خانه ۴ حالت ممکن می باشد.

*** برای پر کردن خانه ی سوم، دو تا محدودیت داریم و دو عضو قبلی را نمی توانیم انتخاب کنیم پس برای پر کردن خانه سوم فقط سه انتخاب ممکن می باشد.

**** در مجموع می توانیم این سه خانه را به $۶۰ = ۳\times۴\times۵$ حالت ممکن پر کنیم ولی با توجه به این که جابجایی اعضاء در مجموعه ها تاثیری ندارد یعنی $\{a,b,c\}=\{a,c,b\}=\{b,a,c\}=\{b,c,a\}=\{c,a,b\}=\{c,b,a\}$ پس $\frac{۱}{۶}$ حالت ها باقی می ماند و بقیه حذف می شوند، لذا تعداد زیر مجموعه های سه عضوی یک مجموعه ی ۵ عضوی برابر است با :

$$\frac{۵\times(۵-۱)\times(۵-۲)}{۶}=\frac{۵\times۴\times۳}{۶}=۱۰$$

نکته: وقتی با سه عضو a، b و c می خواهیم سه خانه ممکن را پر کنیم این کار به $(۳\times۲\times۱=۶=۳!)$ ممکن هست.

نکته: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با:

$$\frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)}{۱\times۲\times۳}$$

تعداد کل حالت ها ← (صورت)
تعداد تکرار هر حالت ← (مخرج)

نکته: تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی یک مجموعه ای n عضوی برابر است با :

$$\frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)\times(n-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}$$

تعداد کل حالت ها ← (صورت)
تعداد تکرار هر حالت ← (مخرج)

نکته: تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ای n عضوی از فرمول $\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$ بدست می آید. که مقدار $n!=۱\times۲\times۳\times...\times n$ و اثبات فرمول بالا را در سال های بعد خواهید آموخت.

توجه مهم : قرار داد $۰!=۱$

مثال: تعداد زیر مجموعه های دو عضوی و ۸ عضوی یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی را بدست آورید.

جواب:

$$\frac{۱۰!}{۸!\times(۱۰-۸)!}=\frac{۱۰!}{۸!\times۲!}=\frac{\cancel{۸!}\times۹\times\cancel{۱۰}^{۵}}{\cancel{۸!}\times\cancel{۲}}=۴۵ \quad , \quad \frac{۱۰!}{۲!\times(۱۰-۲)!}=\frac{۱۰!}{۲!\times۸!}=\frac{\cancel{۸!}\times۹\times\cancel{۱۰}^{۵}}{\cancel{۲}\times\cancel{۸!}}=۴۵$$



۸,۳

مثال: مجموعه ی $A = \{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل a باشد ولی e در آن ها نباشد؟

جواب: عضو a باید در تمام زیر مجموعه ها باشد پس فقط یک حالت دارد

$$\text{عضوها} \rightarrow a \ , \ b \ , \ c \ , \ d \ , \ e$$

و عضو e هم تو هیچ کدام از مجموعه ها نیست، پس فقط یک حالت دارد.

$$\text{حالت ها} \rightarrow ۱ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۱ = ۲^۳ = ۸$$

ولی برای بقیه اعضا، دو حالت وجود دارد ( بودن و نبودن)

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی که p تا از اعضای آن در زیر مجموعه هستند و q از اعضای آن در زیر مجموعه نیستند برابر است با: $۲^{n-(p+q)}$

مثال: مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ چند زیر مجموعه دارد. که شامل ۱ و ۲ باشند ولی اعداد ۷ و ۸ و ۹ را شامل نشود.

حل: تعداد زیر مجموعه ها برابر است با : $۲^{۱۰-(۲+۳)} = ۲^۵ = ۳۲$

زیر مجموعه های محض: همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه به جزء خود مجموعه را زیر مجموعه های محض آن مجموعه می نامند.

نکته: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ی n عضوی برابر است با: $۲^n - ۱$

مجموعهٔ عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

نمایش توصیفی

تاکنون مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار وِن مشخص کردیم. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال : مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲، است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به‌صورت $2k$ قابل نمایش است که در آن $k \in \mathbb{N}$، پس می‌نویسیم :

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج

و می‌خوانیم $E$ برابر است با مجموعهٔ عددهایی به شکل $2k$ به‌طوری که $k$ متعلق به مجموعهٔ عددهای طبیعی است. در مجموعهٔ $E$ علامت «|» خوانده می‌شود «به‌طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم :

مهم

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد : $O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{7, 8, 9, 10\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \le x \le 10\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 11\}$

ج) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش‌پذیر است : $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

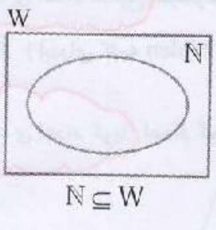
**مثال :** مجموعهٔ $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید :

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به‌جای $n$ یک عدد طبیعی در $5n+3$ قرار دهید.

| $n$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5n+3$ | $\underbrace{5(1)+3}_{8}$ | $\underbrace{5(2)+3}_{13}$ | $\underbrace{5(3)+3}_{18}$ | $\underbrace{5(4)+3}_{23}$ | ۲۸ | ۳۳ | ۳۸ | ... |

بنابراین داریم : $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, ...\}$

معرفی مجموعه‌های مهم

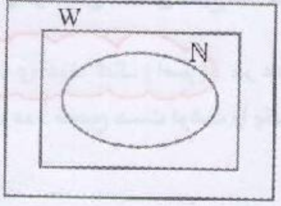



$\mathbb{N} \subseteq W$

مجموعهٔ عددهای حسابی را با $W$ نمایش می‌دهند : $W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

مجموعهٔ عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به‌صورت $W = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N} \subseteq W$




مجموعهٔ عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم :

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

همهٔ عددهای طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هم هست؛ پس : $\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z}$

مجموعه های بی پایان معروف عبارت اند از :

| | | |
|---|---|---|
| مجموعه اعداد طبیعی : $\mathbb{N}$ | مجموعه ی اعداد حسابی : $\mathbb{I}$ یا $\mathbb{W}$ | مجموعه اعداد صحیح : $\mathbb{Z}$ |
| مجموعه ی اعداد طبیعی زوج : $\mathbb{E}$ | مجموعهی اعداد طبیعی فرد : O | مجموعه ی اعداد گویا: $\mathbb{Q}$ |
| مجموعهی اعداد اول : p | مجموعه ی اعداد حقیقی: $\mathbb{R}$ | مجموع ی اعداد گنگ ( اصم ) : $\mathbb{Q}'$ |

مجموعه ی اعداد طبیعی: اعداد طبیعی اعدادی هستند که برای شمارش ( Counting Numbers ) به کار می‌روند.

در ریاضیات، مجموعه اعداد طبیعی را با نماد N یا $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهند. این حرف از آغاز واژه انگلیسی Natural Numbers، به معنای اعداد طبیعی، گرفته شده است. $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ ، به اعداد طبیعی اعداد صحیح مثبت (positive integers ) نیز می گویند.

مجموعه ی اعداد حسابی : اعداد حسابی همان اعداد طبیعی هستند که صفر هم به آنها اضافه شده است. به این اعداد، اعداد کامل (Whole Numbers ) نیز گفته می شود. مجموعه اعداد حسابی عبارت اند از $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$ اعداد حسابی اعداد صحیح نا منفی (non-negative integers ) می باشند.

مجموعه ی اعداد طبیعی زوج: مجموعه ی اعداد طبیعی زوج را با نماد E نمایش می دهیم.

$$\mathbb{E}=\{۲,۴,۶,...\}=\{۲k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

مجموعه ی اعداد طبیعی فرد: مجموعه ی اعداد طبیعی فرد را با نماد O نمایش می دهیم.

$$O=\{۱,۳,۵,۷,...\}=\{۲k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$$

مجموعه ی اعداد صحیح: مجموعه ی اعداد صحیح ، مجموعه ای شامل اعداد طبیعی، صفر و قرینه ی اعداد طبیعی می باشد و این مجموعه را در ریاضی معمولا با Z یا $\mathbb{Z}$ ( ابتدای کلمه zahlen که در زبان آلمانی به معنی اعداد است) نشان می‌دهند.

$$\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$$

مجموعه ی اعداد گویا: اعداد گویا ، اعداد کسری هستند که از حاصل تقسیم دو عدد صحیح بدست می آیند، به شرطی که عدد دوم صفر( مخرج) نباشد. یا هر عدد کسری که صورت و مخرج آن یک عدد صحیح باشد و مخرج آن مخالف صفر باشد یک عدد گویا می باشد.

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq ۰\right\}$$

حرف Q از ابتدای کلمه ی خارج قسمت "quotient" گرفته شده در واقع هر عدد گویا خارج قسمت تقسیم دو عدد صحیح می باشد.

مجموعه ی اعداد گنگ ( اصم ) : هر عدد حقیقی که گویا نباشد را یک عدد گنگ می نامیم. هر عددی که نتوان آن را به صورت یک کسر که صورت و مخرج آن یک عدد صحیح هست نوشت را یک عدد گنگ می نامیم.

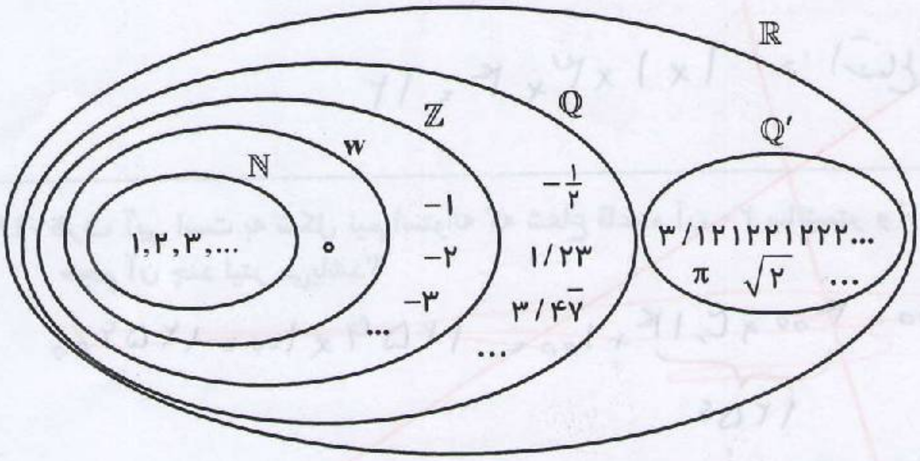
$$\mathbb{Q}' = \{ x \mid x \in \mathbb{R} , x \notin \mathbb{Q} \}$$

مجموعه ی اعداد حقیقی: مجموعه ای که شامل تمام اعداد گویا و گنگ می باشد را مجموعه ی اعداد حقیقی می نامیم. مجموعه ی اعداد حقیقی (Real numbers) را با حرف $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم.

زیر مجموعه (Subset): مجموعه ی A را زیر مجموعه ی، مجموعه ی B گوییم هر گاه هر عضو مجموعه ی A، عضوی از مجموعه ی B باشد. و آن را با نماد $A \subset B$ نمایش می دهیم.

مجموعه ی اعداد طبیعی زیر مجموعه ی مجموعه ی اعداد حسابی می باشد و مجموعه ی اعداد حسابی زیر مجموعه ی اعداد صحیح می باشد و مجموعه ی اعداد صحیح زیر مجموعه ی، مجموعه ی اعداد گویا می باشد.

و مجموعه ای اعداد گویا زیر مجموعه ی، مجموعه ی اعداد حقیقی می باشد. $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$






۹,۲

$C = \{ \dots, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, \dots \}$

$A = \{ -۵, -۴, -۳, \dots, ۴ \}$

## کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با عضوها مشخص کنید :

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\ , -۵ \leq x < ۵\}$ ب) مجموعهٔ عددهای صحیح فرد $C$

ج) $B = \{۳k + ۲ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $B = \{ \dots, -۷, -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, \dots \}$

مجموعه‌ی اعداد گویا

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اوّلین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با عضوها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعهٔ عددهای گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم : $Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰ \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم : $a = \frac{a}{۱}$ ، درنتیجه $\mathbb{Z} \subseteq Q$ .

## تمرین

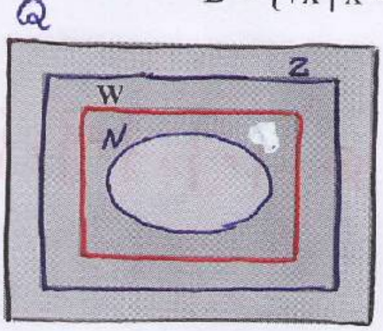
۱ــ مجموعهٔ $A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ را درنظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟ صفحه ۱۰/۱

$B = \{x \mid x \in A\ , x^۲ \leq ۲\}$ , $C = \{x \mid x \in A, -۱ \leq x \leq ۱\}$ , $D = \{x \mid x \in A\ , x^۴ = ۱\}$

۲ــ سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید به‌طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$؟ بله صفحه ۱۰/۱

۳ــ تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید : صفحه ۱۰/۱

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, ۲x + ۱ = ۳\}$ ب) $B = \{۲x \mid x = ۰, ۲, ۳\}$




۴ــ نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q،W، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت $\subseteq$ باهم مقایسه کنید.

$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

۵ــ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید :

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. ✗ ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. ✓

ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. ✓ د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. ✓

تمرین

۱

$A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$B=\{x \mid x\in A , x^{۲}\leq ۲\}=\{-۱,۰,۱\}$

$(-۲)^{۲}=۴ \Rightarrow -۲\notin B \quad , (-۱)^{۲}=۱\leq ۲ \Rightarrow -۱\in B , \dots$

$C=\{x \mid x\in A , -۱\leq x\leq ۱\}=\{-۱,۰,۱\}$

$-۲<-۱ \Rightarrow -۲\notin C \quad , ۲>۱ \Rightarrow ۲\notin C$

$D=\{x \mid x\in A , x^{۴}=۱\} \Rightarrow D=\{-۱,۱\}$

$x^{۴}=۱ \Rightarrow x=\pm\sqrt[۴]{۱} \Rightarrow x=\pm ۱$ یا $(-۲)^{۴}=۱۶ \Rightarrow -۲\notin D , \dots$

---

۲

$A=\{۱\} , B=\{۱,۲\} , C=\{۱,۲,۳\} \Rightarrow A\subseteq B\subseteq C$

بنابراین داریم $A\subseteq C$ است زیر تمام اعضای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B وجود دارد $(A\subseteq B)$ و تمام اعضای مجموعه‌ی B در مجموعه‌ی C موجود است $(B\subseteq C)$. بنابراین تمام اعضای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی C موجود است لذا داریم $A\subseteq C$

---

۳

$A=\{x \mid x\in N , ۲x+۱=۳\} \Rightarrow ۲x+۱=۳ \xRightarrow{-۱} ۲x=۲ \xRightarrow{\div ۲} x=۱$

$\Rightarrow A=\{۱\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌ها}} \varnothing , \{۱\}$

$B=\{۲x \mid x=۰,۲,۳\}=\{۰,۴,۶\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌ها}} \varnothing , \{۰\} , \{۴\} , \{۶\}$

$\{۰,۴\} , \{۰,۶\} , \{۴,۶\} , \{۰,۴,۶\}$

## درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

### فعالیت

۱ـ در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمّد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند.

الف) اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار وِن نمایش و سپس با عضوهایشان بنویسید. صفحه ۱۱/۱

ب) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

ج) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

۲ـ دو مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\leq ۶\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۲\leq x\leq ۳\}$ را درنظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ ب) $B=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$

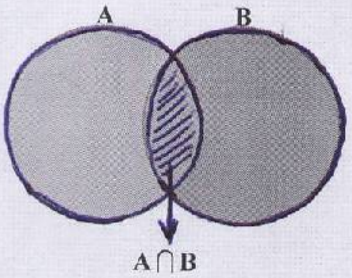
ج) مجموعهٔ عددهایی که در هر دو مجموعهٔ A و B هست $=\{۱,۲,۳\}$

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم).

د) مجموعهٔ عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هست $=\{-۲,-۱,۰,...,۶\}$

(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم).

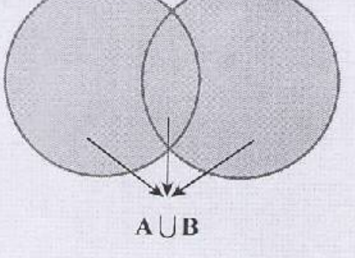
**اشتراک دو مجموعه:** اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای شاملِ همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B است. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.




$A\cap B$

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A, x\in B\}$$

**اجتماع دو مجموعه:** اجتماع دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد:




$A\cup B$

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ یا } x\in B\}$$