نام و نام خانوادگی :　　　　کلاس ۳۰۲　　　　زمان امتحان : ۴۵ دقیقه

۱- اگر m و n دو عدد طبیعی فرد باشند ، نشان دهید m^2-n^2+16 بر عدد ۸ بخش‌پذیر است . ۱٫۵ نمره

۲- $\sqrt{6}$ یک عدد گنگ است ، ثابت کنید عدد $(\sqrt{3}+\sqrt{8})$ هم یک عدد گنگ است . ۱٫۵ نمره

۳- اگر $a>-1$ باشد، ثابت کنید : $a^3+1\geq a^2+a$ ۱٫۵ نمره

۴- فرض کنید p و q دو عدد اول نامساوی هستند ، نشان دهید : $(p,q)=1$ ۱٫۵ نمره

۵- باقیمانده‌ی تقسیم عددهای a و b بر ۱۳ به ترتیب ۸ و ۵ است ، باقیمانده تقسیم عدد $A=2a-5b$ را در تقسیم بر عدد ۱۳ بدست آورید ۱٫۵ نمره

۶- اگر $a|b$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ ثابت کنید $a^m|b^n$ $(m,n\in\mathbb{N}, m\leq n)$ ۱ نمره

۷- فرض کنید k یک عدد صحیح دلخواه و $4|5k+1$ ثابت کنید: $12|25k^2-10k-35$ ۱٫۵ نمره

۱۴۰۱/۸/۱۵

پیروز و سربلند باشید

(1)

$m=2k+1$, $n=2k'+1 \longrightarrow m^2+n^2+16=(2k+1)^2-(2k'+1)^2+16$

$$=4k^2+4k+\cancel{1}-4k'^2-4k'-\cancel{1}+16$$

$$=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}-4\underbrace{k'(k'+1)}_{2q'}+16$$

$$=8q-8q'+16=8\underbrace{(q-q'+2)}_{t}=8t$$

---

(2)

$\underbrace{\sqrt{6}\in Q'}_{\text{فرض } p} \longrightarrow \underbrace{(\sqrt{3}+\sqrt{8})\in Q'}_{\text{حکم } q}$ برهان خُلف :

$\sim q : \underbrace{(\sqrt{3}+\sqrt{8})\notin Q'}_{\text{فرض خُلف}} \longrightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{8})\in Q$

$(\sqrt{3}+\sqrt{8})=\dfrac{a}{b} \xrightarrow{\text{توان } 2} 3+2\sqrt{24}+8=\dfrac{a^2}{b^2}$

$11+4\sqrt{6}=\dfrac{a^2}{b^2}$

$4\sqrt{6}=\dfrac{a^2}{b^2}-11=\dfrac{a^2-11}{b^2}$

$\sqrt{6}=\dfrac{\overbrace{(a^2-11)}^{\in Z}}{\underbrace{4b^2}_{\in Z}}$

این نتیجه با فرض p تناقض دارد پس فرض خلف باطل و حکم درست است. $\sqrt{6}\in Q : \sim p$

---

(3)

توجه $a>-1 \longrightarrow a+1\geq 0$ (1)

$a^3+1\geq a^2+a \Longleftrightarrow (a+1)(a^2-a+1)\geq a(a+1) \xLeftrightarrow[\div(a+1)]{(1)} a^2-a+1\geq a$

$\Longleftrightarrow a^2-2a+1\geq 0 \Longleftrightarrow (a-1)^2\geq 0$ برای همه درست

چون کلیه مراحل بازگشت پذیر است پس حکم درست است

---

(4)

$p\neq q$ *

$$(p,q)=d \longrightarrow \begin{cases} d\,|\,\underset{\text{اول}}{p} \rightsquigarrow d=p \text{ یا } d=1 \\ d\,|\,\underset{\text{اول}}{q} \rightsquigarrow d=q \text{ یا } d=1 \end{cases} \begin{array}{l} \rightsquigarrow d=p=q^{*} \text{ غیر ممکن} \\ \rightsquigarrow d=1 \checkmark \end{array}$$

(۵)

$a \,\underline{|\,۱۳}\,,\ q = ۱ \,,\ r = ۸ \longrightarrow a = ۱۳q + ۸$

$b \,\underline{|\,۱۳}\,,\ q' \,,\ r = ۵ \longrightarrow b = ۱۳q' + ۵$

$\longrightarrow A = ۲a - ۵b$

$= ۲۶q + ۱۶ - ۶۵q' - ۲۵$

$= ۲۶q - ۶۵q' - ۹$

$= ۱۳\underbrace{(۲q - ۵q')}_{k} - ۹ = ۱۳k - ۹ = ۱۳\overbrace{(k-۱)}^{k'} - ۹ + ۱۳$

$= ۱۳k' + ۴$

$r = ۴$

---

(۶)

$a|b \longrightarrow b = aq \xrightarrow{\text{توان } n} b^n = a^n q^n = a^m a^{n-m} q^n \qquad m \leq n$

$b^n = a^m \underbrace{(a^{n-m} q^n)}_{q'} \longrightarrow b^n = a^m q' \longrightarrow a^m | b^n$

---

(۷)

$۴ \,|\, ۵k + ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۶ \,|\, \underbrace{۲۵k^۲ + ۱۰k + ۱}_{x}$

$\xrightarrow{\times ۴} ۱۶ \,|\, \underbrace{۲۰k + ۴}_{y}$

$۱۶ \,|\, \underbrace{۳۲}_{z}$

$\longrightarrow ۱۶ \,|\, x - y - z$

$۱۶ \,|\, ۲۵k^۲ - ۱۰k - ۳۵$

۱۴۰۱/۸/۱۵

پیروز و سربلند باشید