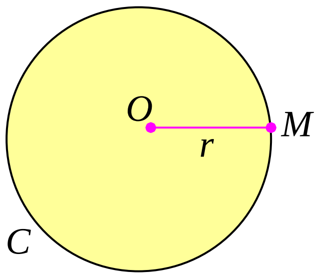
درس اوّل : مفاهیم اوّلیه و زاویه ها در دایره

دایره یکی از شکل های مهم در هندسه است. در این درس در پی آن هستیم که با برخی از مفاهیم اوّلیه هندسی در دایره و همچنین با انواع زاویه ها که روی دایره تعریف می شوند، آشنا شویم.

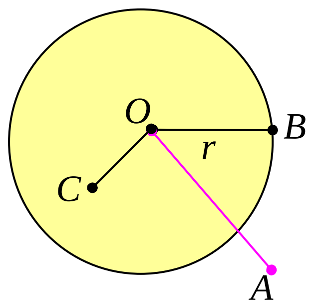
تعریف دایره



دایره مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله باشند. نقطه‌ی ثابت را مرکز و فاصله‌ی ثابت را شعاع می نامند. دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O,r)$ نمایش می دهند.

تذکر ۱ : دو دایره با شعاع های مساوی، همنهشت هستند.

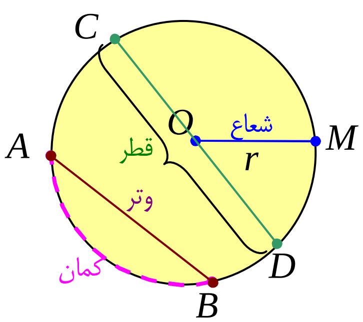
تذکر ۲ : هر دایره صفحه را به سه بخش مجزا تقسیم می کند.



الف: نقاط خارج دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع بزرگتر است. ($OA > r$)

ب: نقاط روی دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره برابر شعاع است. ($OB = r$)

ج: نقاط داخل دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر است. ($OC < r$)



تعریف کمان: بخشی از دایره که بین دو نقطه‌ی متمایز روی دایره، واقع باشد را کمان (قوس یا Arc) می نامند.

تعریف وتر: پاره خطی که دو نقطه‌ی متمایز روی دایره را به هم وصل می کند را وتر می نامند.

تذکر: بزرگترین وتر دایره که از مرکز دایره نیز می گذرد را **قطر** می نامند. بدیهی است که:

۱ . اندازه‌ی قطر هر دایره دو برابر شعاع آن است.

۲ . هر دایره قطر های بی شمار دارد و همه در مرکز دایره همرسند.

تمرین برای حل :

۱ : اگر فاصله‌ی نقطه ای از مرکز دایره به شعاع ۳ سانتی متر برابر $۲m - ۵$ باشد. حدود m را چنان بیابید که این نقطه درون دایره باشد.

۲ : اگر نقطه‌ی P تا مرکز دایره ای به شعاع ۶ سانتیمتر به فاصله‌ی ۱۰ سانتیمتر باشد. بیشترین و کمترین فاصله ی نقاط دایره تا نقطه‌ی P را به دست آورید.

۳ : اگر نقطه‌ی Q تا مرکز دایره ای به شعاع ۶ سانتیمتر به فاصله‌ی ۴ سانتیمتر باشد. بیشترین و کمترین فاصله‌ی نقاط دایره تا نقطه‌ی P را به دست آورید.

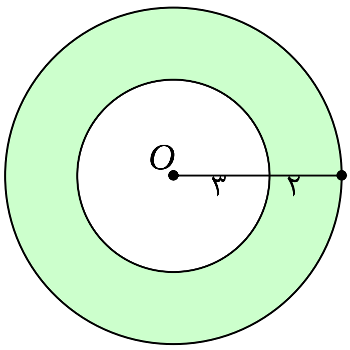
***

توجه: مساحت و محیط هر دایره به شعاع r به شکل زیر به دست می آید.

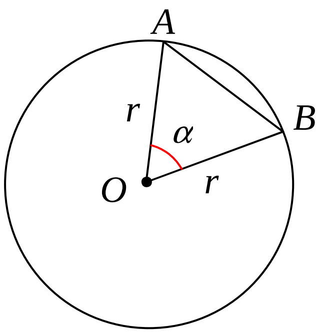
محیط دایره $P = ۲\pi r$ مساحت دایره $S = \pi r^۲$

تمرین۴ : مساحت و محیط دایره ای به شعاع ۶ سانتی متر را محاسبه کنید.

تمرین ۵ : در شکل زیر دو دایره هم مرکزند، با توجه به اندازه های داده شده، مساحت قسمت رنگی را تعیین کنید.



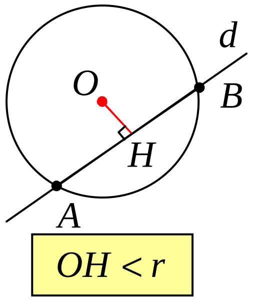
تمرین ۶ : با توجه به شکل مقابل نشان دهید که مساحت مثلث AOB برابر $S = \frac{۱}{۲} r^۲ \sin\alpha$ می باشد.



***

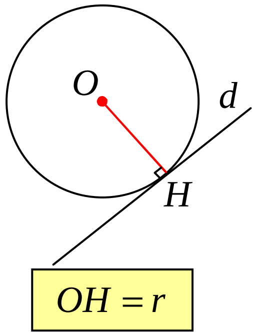
حالت های مختلف یک خط و یک دایره

خط و دایره نسبت به هم دارای سه حالت زیر هستند.



۱ . خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند. (متقاطع)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کمتر است و برعکس

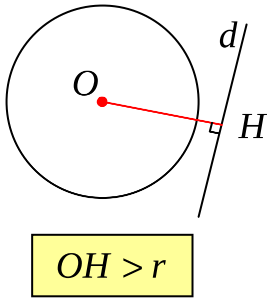


۲ . خط و دایره یک نقطه‌ی مشترک دارند.(مماس)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است و برعکس

نتیجه : شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس بر آن دایره عمود است.

توجه : با توجه به تعریف فاصله‌ی یک نقطه از خط، واضح است که یک خط و یک دایره بر هم مماس اند، اگر و تنها اگر این خط در نقطه‌ی تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.



۳ . خط و دایره هیچ نقطه‌ی مشترک ندارند.

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیشتر است و برعکس

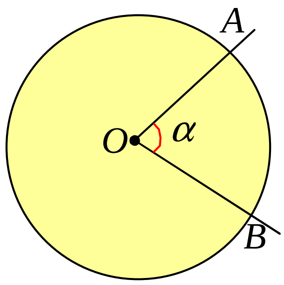
❋❋❋

تمرین برای حل :

۷ : از یک نقطه‌ی خارج یک دایره چند خط مماس بر دایره می توان رسم کرد؟ از نقطه روی دایره چطور؟

❋❋❋

زاویه‌ی مرکزی:



هر زاویه که رأس آن در مرکز دایره باشد را زاویه‌ی مرکزی می نامند.

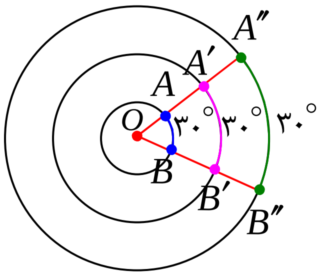
اندازه‌ی کمان روی دایره :

اندازه‌ی هر کمان روی دایره برابر اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل آن تعریف می شود و لذا واحد آن مانند زاویه، درجه است. $\angle\alpha = \overset{\frown}{AB}$

طول کمان روی دایره :

طول کمان، عبارت است از طول قسمتی از محیط دایره که به دو نقطه‌ی دو انتهای کمان محصور باشد.

اصل زاویه‌ی مرکزی: اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی با اندازه‌ی کمان روبروی آن برابر است.



بر اساس این اصل و با توجه به شکل مقابل به سادگی دیده می شود که کمان های دایره های مختلف (هم مرکز) می توانند اندازه های برابر و طول های نابرابر داشته باشند.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{A''B''} = ۳۰^\circ$$

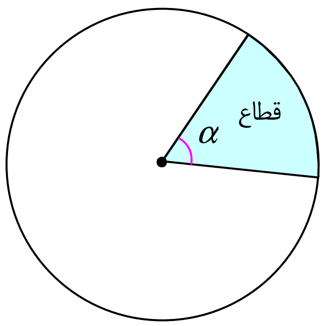
نتیجه :

۱) هر دایره کمانی برابر۳۶۰ درجه است.

۲) هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی (نیم دایره) تبدیل می کند، هر نیم دایره کمانی برابر ۱۸۰ درجه است.

***

قطاع دایره :



ناحیه ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره محدود است، را یک قطاع از دایره می نامند.

توجه : هر ناحیه از دایره و درون آن، داخل یک زاویه‌ی مرکزی را قطاع روبروی آن زاویه می نامند.

تمرین ۸ : طول کمان و مساحت قطاع درون دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر ، روبرو به زاویه‌ای به اندازه‌ی ۶۰ درجه را محاسبه کنید.

حل : اگر دایره را به ۶ زاویه‌ی مرکزی مساوی تقسیم کنیم ، یک زاویه‌ی ۶۰ درجه، حاصل می شود. بنابراین طول کمان مورد نظر $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره و مساحت قطاع نیز برابر $\frac{۱}{۶}$ مساحت دایره است.

طول کمان $L=\frac{۲\pi r}{۶}=\frac{۲\pi(۵)}{۶}=\frac{۵\pi}{۳}\ cm$

مساحت قطاع $S=\frac{\pi r^۲}{۶}=\frac{\pi(۵)^۲}{۶}=\frac{۲۵\pi}{۶}\ cm^۲$

توجه : در یک دایره به شعاع r ، اگر یک زاویه‌ی مرکزی به اندازه‌ی α را در نظر بگیریم. در این صورت:

الف : طول کمان مقابل این زاویه برابر $L=\frac{\pi r}{۱۸۰}\alpha$ است.

ب : مساحت قطاع مقابل این زاویه برابر $S=\frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha$ است.

تمرین ۹ : دو رابطه‌ی فوق را ثابت کنید.

حل : محیط دایره کمانی به طول $۲\pi r$ و به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه می باشد. بنابراین می توان نوشت :

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰}\rightarrow\frac{\alpha}{۳۶۰}=\frac{L}{۲\pi r}\rightarrow L=\frac{۲\pi r}{۳۶۰}\alpha=\frac{\pi r}{۱۸۰}\alpha$$

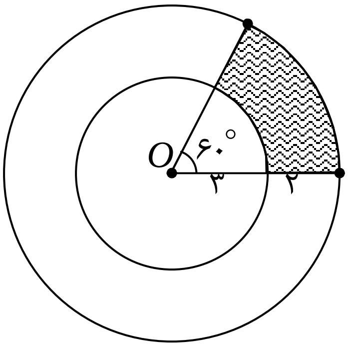
$$\frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{مساحت دایره}}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰}\rightarrow\frac{\alpha}{۳۶۰}=\frac{S}{\pi r^۲}\rightarrow S=\frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha$$

تمرین برای حل:

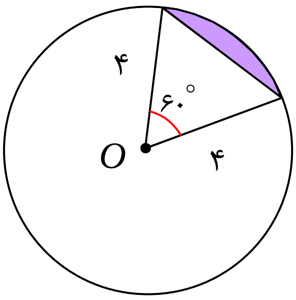
تمرین ۱۰ : طول کمان و مساحت قطاع درون دایره‌ای به شعاع ۶ سانتی متر، روبرو به زاویه‌ای به اندازه‌ی ۳۰ درجه را محاسبه کنید.

تمرین ۱۱ : طول کمان و مساحت قطاع درون دایره‌ای به شعاع۱۲متر، روبرو به زاویه‌ای به اندازه‌ی ۴۵ درجه را محاسبه کنید.

تمرین۱۲ : در شکل زیر دو دایره هم مرکزند، با توجه به اندازه های داده شده، مساحت قسمت رنگی را تعیین کنید.()



تمرین۱۳ : مطابق شکل، دایره به شعاع ۴ را در نظر بگیرید. مساحت ناحیه‌ی سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه را یک قطعه‌ی دایره می نامند.

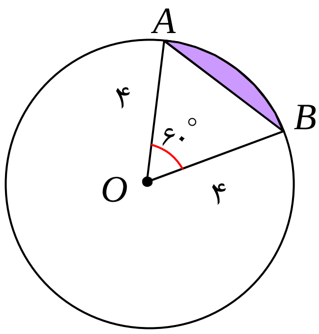


حل : مساحت قطعه‌ی دایره در شکل مقابل برابر تفاضل مساحت مثلث از مساحت قطاع نظیر آن می باشد.

مساحت قطاع $A=\frac{\pi r^{۲}}{۳۶۰}\alpha=\frac{\pi(۴)^{۲}}{۳۶۰}\times ۶۰=\frac{۸\pi}{۳}$

مساحت مثلث $B=\frac{۱}{۲}r^{۲}\sin\alpha=\frac{۱}{۲}(۴)^{۲}\sin(۶۰^\circ)=\frac{۱}{۲}(۴)^{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۴\sqrt{۳}$

مساحت قطعه $S=A-B=\frac{۸\pi}{۳}-۴\sqrt{۳}=\frac{۸\pi-۱۲\sqrt{۳}}{۳}$



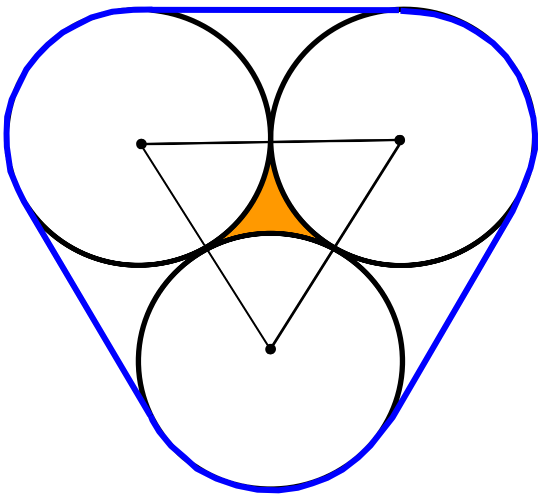
توجه : مثلث OAB متساوی الساقین است و زاویه‌ی رأس آن ۶۰ درجه می باشد. لذا متساوی الاضلاع به ضلع r می باشد. لذا مساحت مثلث متساوی الاضلاع را می توان به شکل زیر نیز محاسبه کرد.

$$B=\frac{\sqrt{۳}}{۴}r^{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^{۲}=۴\sqrt{۳}$$

تمرین۱۴: هر یک از موارد زیر را ثابت کنید :

الف : اگر در یک دایره دو کمان هم اندازه باشند، آنگاه طول های برابر دارند و برعکس

ب : اگر در یک دایره دو کمان هم اندازه باشند، قطاع های با مساحت برابر روی آن بوجود می آورند و برعکس



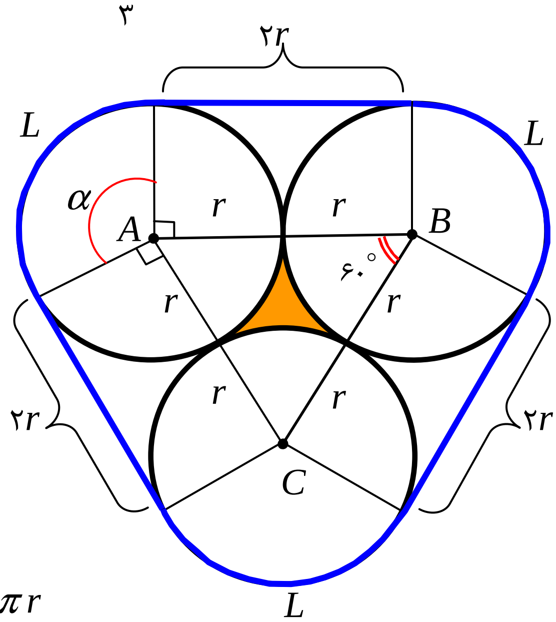
تمرین۱۵ : سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله‌ی نخی بسته شده اند. نشان دهید،

الف : طول این نخ برابر $6r+2\pi r$ است.

ب : مساحت ناحیه‌ی محدود بین سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$ است.

حل : محیط شکل از سه پاره خط به طول های $2r$ و سه کمان به طول L تشکیل شده است. پس :

$$\alpha=360-(2\times 90+60)=120\rightarrow L=\frac{\pi r}{180}\times 120=\frac{2}{3}\pi r$$



$$P=3(2r+L)=3(2r+\frac{2}{3}\pi r)=6r+2\pi r$$

واضح است که مساحت هر قطاع درون مثلث ABC برابر $A=\frac{\pi r^2}{360}\times 60=\frac{\pi r^2}{6}$ است. اکنون می توان مساحت قسمت رنگی را از تفاضل مساحت قطاع ها از مساحت مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع $2r$ به دست آورد.

مساحت ناحیه‌ی رنگی $B=S(ABC)-3A=\frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2-3(\frac{\pi r^2}{6})=r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$

***

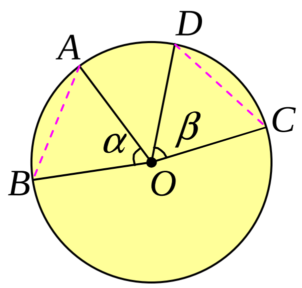
کمان و وتر

قضیه : در یک دایره، کمان های نظیر وتر های مساوی، با هم برابرند و برعکس

اثبات: این قضیه دو شرطی است بنابراین از دو قضیه‌ی زیر تشکیل می شود.

$$AB = CD \leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

الف : در یک دایره، کمان های نظیر وتر های مساوی، با هم برابرند.



$$AB = CD \to \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

$$\left.\begin{matrix} OA = OC \\ AB = CD \\ OB = OD \end{matrix}\right\} \to \underset{(\text{ض ض ض})}{\overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}} \to \angle\alpha = \angle\beta \to \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

ب : در یک دایره، وتر های نظیر کمان های مساوی، با هم برابرند.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \to AB = CD$$

$$\left.\begin{matrix} OA = OC \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \to \angle\alpha = \angle\beta \\ OB = OD \end{matrix}\right\} \to \underset{(\text{ض ز ض})}{\overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}} \to AB = CD$$

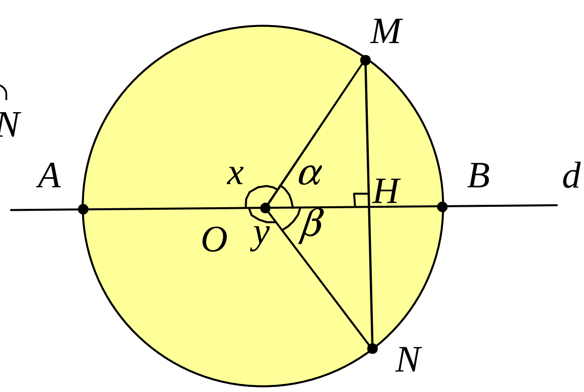
***

قطر و وتر

قضیه : در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می کند.

فرض : $d \perp MN$

حکم : $MH = NH , \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{BN} , \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$



اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} OM = ON \\ OH = OH \end{array}\right\} \to \underset{\text{(وتر و یک ضلع)}}{\overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{ONH}}$$

$$\to \left\langle \begin{array}{l} MH = NH \\ \angle\alpha = \angle\beta \to \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{BN} \end{array}\right.$$

از طرفی واضح است که

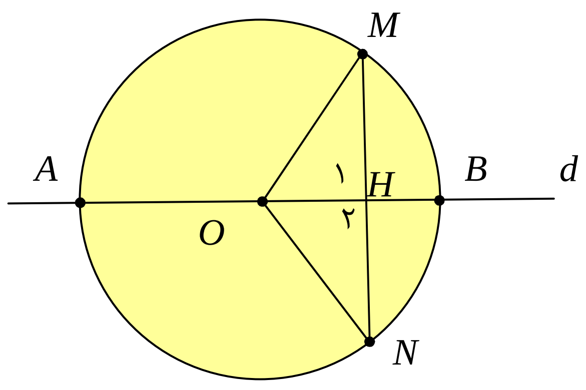
$$\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{ANB} \to \overset{\frown}{AMB} - \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{ANB} - \overset{\frown}{NB} \to \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$$

توجه داشته باشید که قسمت دوّم را می توان به صورت زیر نیز اثبات کرد.

$$\angle\alpha = \angle\beta \to \angle x = \angle y \to \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$$

***

قضیه : در هر دایره ، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می کند، بر آن وتر عمود است.



فرض : $MH = NH$

حکم : $OH \perp MN$

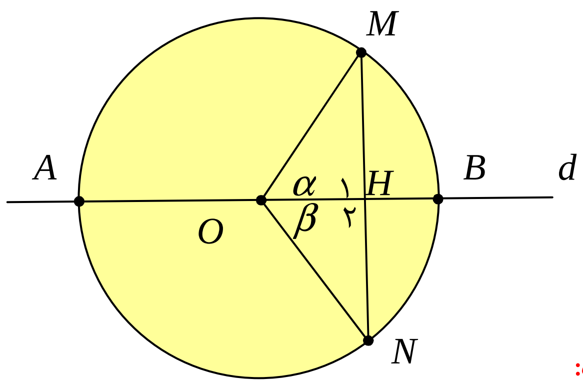
اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} MH = NH \\ OM = ON \\ OH = OH \end{array}\right\} \to \underset{\text{(ض ض ض)}}{\overset{\Delta}{MOH} \cong \overset{\Delta}{NOH}} \to \angle H_۱ = \angle H_۲$$

$$\xrightarrow{\angle H_۱ + \angle H_۲ = ۱۸۰^\circ} \angle H_۱ = \angle H_۲ = ۹۰^\circ \to OH \perp MN$$

***

قضیه : در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می کند، بر آن وتر عمود است.



فرض : $\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{NB}$

حکم : $OH\perp MN$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{c} OM=ON \\ \overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{NB}\to\angle\alpha=\angle\beta \\ OH=OH\end{array}\right\}\to \underset{\text{(ض ز ض)}}{\overset{\Delta}{MOH}\cong\overset{\Delta}{NOH}}\to\angle H_{۱}=\angle H_{۲}$$

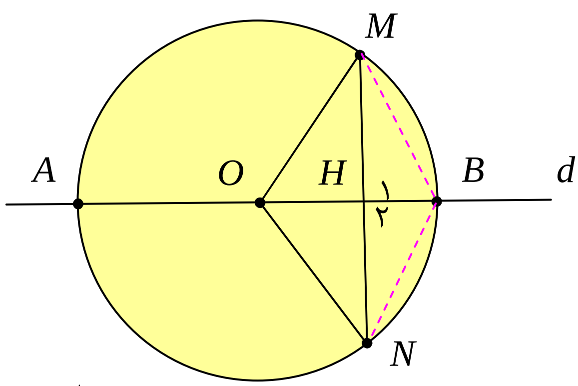
$$\xrightarrow{\angle H_{۱}+\angle H_{۲}=۱۸۰^\circ}\angle H_{۱}=\angle H_{۲}=۹۰^\circ\to OH\perp MN$$

***

نتیجه : در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر آن وتر را نصف می کند و بر عکس

***

قضیه : در هر دایره خطی که وسط یک کمان را به وسط وتر نظیر آن کمان وصل می کند، از مرکز دایره می گذرد و بر وتر عمود است.



فرض : $MH=NH,\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{NB}$

حکم : $O\in d,BH\perp MN$

$$\left.\begin{array}{c} MH=NH \\ \overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{NB}\to MB=NB \\ BH=BH\end{array}\right\}\to \underset{\text{(ض ض ض)}}{\overset{\Delta}{MBH}\cong\overset{\Delta}{NBH}}\to\angle H_{۱}=\angle H_{۲}$$

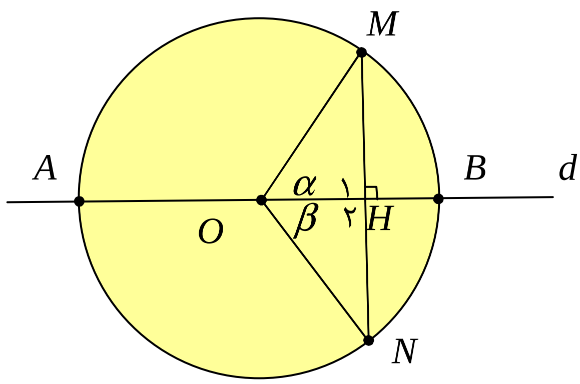
$$\xrightarrow{\angle H_{۱}+\angle H_{۲}=۱۸۰^\circ}\angle H_{۱}=\angle H_{۲}=۹۰^\circ\to BH\perp MN$$

و چون $MH=NH$ لذا BH عمود منصف MN است. از طرفی چون نقطه‌ی O از دو سر پاره خط MN به یک فاصله است، پس روی عمود منصف MN یعنی BH قرار می گیرد.

قضیه : خطی که از وسط یک وتر ، عمود بر آن وتر رسم شود. از مرکز دایره می گذرد.

فرض : $d \perp MN , MH = NH$

حکم : $O \in d$



اثبات:

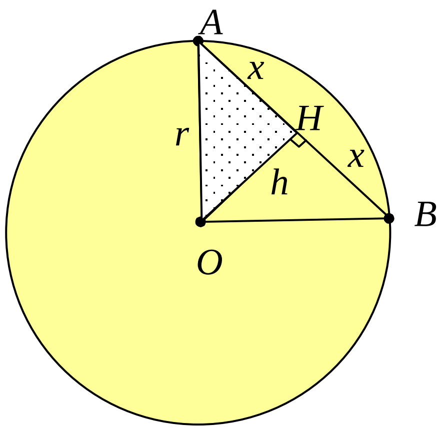
$$\left.\begin{matrix} MH = NH \\ \angle H_{۱} = \angle H_{۲} = ۹۰^{\circ} \\ OH = OH \end{matrix}\right\} \rightarrow \underset{(\text{ض زض})}{\overset{\Delta}{MOH} \cong \overset{\Delta}{NOH}} \rightarrow \angle\alpha = \angle\beta \rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{NB}$$

و بنابر قضیه‌ی قبل واضح است که BH از مرکز دایره می گذرد.

***

تمرین۱۶: دایره‌ی $C(O,۲۶)$ داده شده است. اگر فاصله‌ی وتر AB از مرکز دایره برابر ۱۰ باشد. طول وتر AB را بدست آورید.

حل: می دانیم که در یک دایره، قطر عمود بر یک وتر ، آن وتر را نصف می کند. پس:



$h = ۱۰$

$r = ۲۶$

$x^{۲} + h^{۲} = r^{۲} \rightarrow x^{۲} + ۱۰^{۲} = ۲۶^{۲} \rightarrow x^{۲} = ۶۷۶ - ۱۰۰ = ۵۷۶ \rightarrow x = \sqrt{۵۷۶} = ۲۴$

$\therefore AB = ۲x = ۲(۲۴) = ۴۸$

***

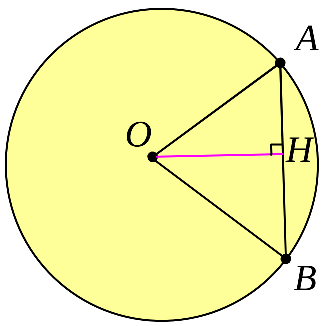
تمرین۱۷ : دایره‌ی $C(O,10)$ داده شده است. اگر طول وتر AB از این دایره برابر ۸ باشد ، فاصله‌ی وتر AB از مرکز دایره را بدست آورید.

حل: می دانیم که در یک دایره، قطر عمود بر یک وتر ، آن وتر را نصف می کند. پس با توجه به شکل تمرین قبل می توان نوشت:

$$AB=8\rightarrow 2x=8\rightarrow x=4$$
$$r=10$$
$$x^2+h^2=r^2\rightarrow 4^2+h^2=10^2\rightarrow h^2=100-16=84\rightarrow h=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$$

***

تمرین۱۸: اندازه‌ی کمان AB از یک دایره برابر۶۰ درجه است. اگر طول وتر نظیر این کمان برابر ۱۰ سانتی متر باشد. فاصله‌ی مرکز دایره تا وتر AB را به دست آورید.



حل : با توجه به شکل مقابل ، چون $OA=OB$ و $\angle AOB=60^\circ$ لذا مثلث AOB متساوی الاضلاع می باشد. در نتیجه :

$$OA=OB=AB=10$$

و چون در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر ، آن وتر را نصف می کند. پس :

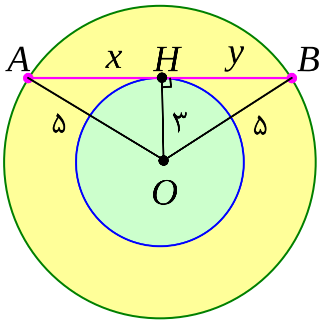
$$AH=BH=5$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه‌ی AOH طبق رابطه‌ی فیثاغورس می توان نوشت:

$$OH^2+AH^2=OA^2\rightarrow OH^2+(5)^2=(10)^2$$
$$\rightarrow OH=\sqrt{100-25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$$

***

تمرین۱۹ : شعاع های دو دایره‌ی هم مرکز ۵ و۳ سانتی متر هستند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگتر را که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است را پیدا کنید.



حل: می دانیم که شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. از طرفی قطر عمود بر هر وتر آن وتر را نصف می کند. پس:

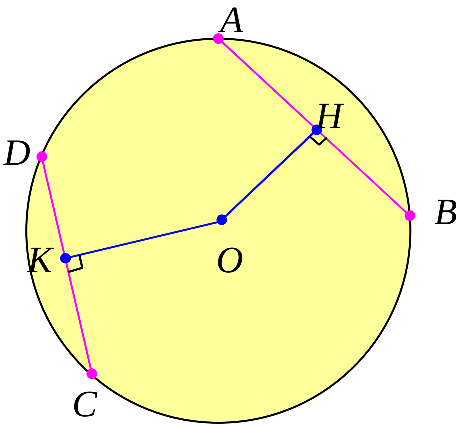
$$x = y$$

$$\overset{\Delta}{AOH} : OH^{۲} + AH^{۲} = OA^{۲} \to ۳^{۲} + x^{۲} = ۵^{۲} \to x = ۴$$

$$AB = x + y = ۲x = ۲(۴) = ۸$$

***

وتر های مساوی در یک دایره



قضیه : در هر دایره ، وتر های متساوی از مرکز دایره به یک فاصله اند و برعکس

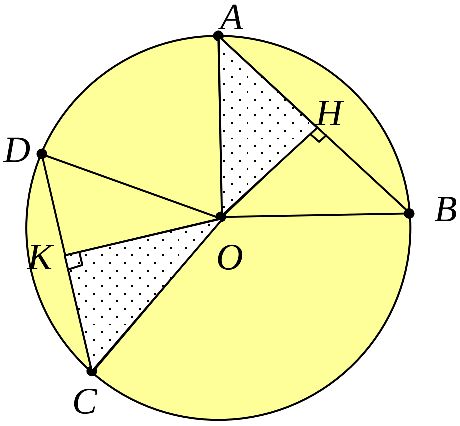
اثبات: این قضیه دو شرطی است بنابراین از دو قضیه‌ی زیر تشکیل می شود.

$$AB = CD \leftrightarrow OH = OK$$

الف: در هر دایره ، وتر های متساوی از مرکز دایره به یک فاصله اند.

$$AB = CD \to OH = OK$$

اثبات:



$$\left.\begin{array}{c} OA = OC \\ AB = CD \to AH = CK \end{array}\right\} \to \underset{\text{(وتر و یک ضلع)}}{\overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{COK}} \to OH = OK$$

ب: در هر دایره وتر هایی که از مرکز دایره به یک فاصله اند، متساویند.

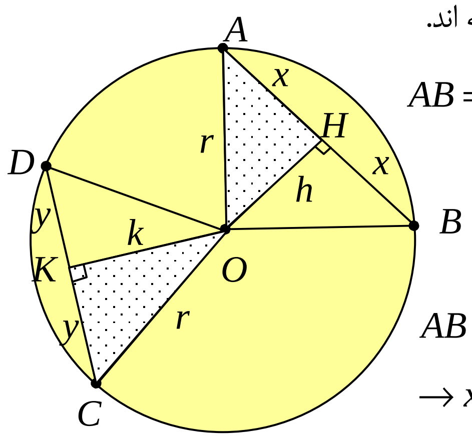
$$OH = OK \to AB = CD$$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OH = OK \end{array}\right\} \to \underset{\text{(وتر و یک ضلع)}}{\overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{COK}} \to AH = CK \to AB = CD$$

توجه : به کمک رابطه‌ی فیثاغورس نیز می توان قضیه‌ی فوق را ثابت کرد.

الف: در هر دایره ، وتر های متساوی از مرکز دایره به یک فاصله اند.



$$AB = CD \to OH = OK$$

اثبات:

$$AB = CD \to ۲x = ۲y \to x = y$$
$$\to x^۲ = y^۲ \to r^۲ - h^۲ = r^۲ - k^۲$$
$$\to -h^۲ = -k^۲ \to h^۲ = k^۲ \to h = k \to OH = OK$$

ب: در هر دایره وتر هایی که از مرکز دایره به یک فاصله اند، متساویند.

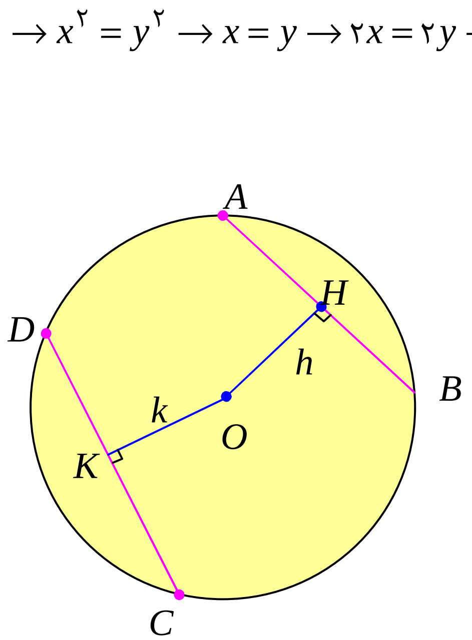
$$OH = OK \to AB = CD$$

اثبات:

$$OH = OK \to h = k \to h^۲ = k^۲ \to r^۲ - x^۲ = r^۲ - y^۲ \to -x^۲ = -y^۲$$
$$\to x^۲ = y^۲ \to x = y \to ۲x = ۲y \to AB = CD$$

***

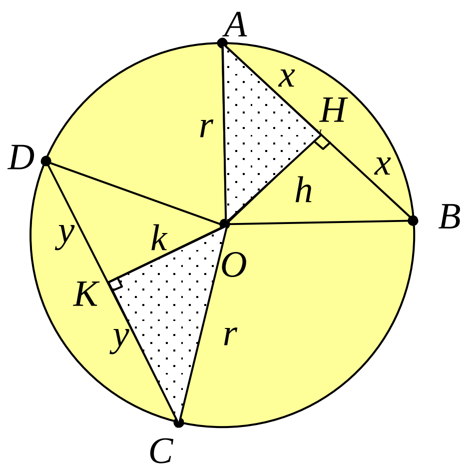
وتر های نامساوی در یک دایره



قضیه : در یک دایره، از دو وتر نابرابر ، آنکه بزرگتر است

به مرکز دایره نزدیکتر است و بر عکس

اثبات: این قضیه دو شرطی است بنابراین از دو قضیه‌ی زیر تشکیل می شود.



$$AB < CD \leftrightarrow OH > OK$$

الف: در هر دایره، از دو وتر نابرابر آنکه بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است.

$$AB < CD \rightarrow OH > OK$$

اثبات:

$$AB < CD \rightarrow ۲x < ۲y \rightarrow x < y$$
$$\rightarrow x^۲ < y^۲ \rightarrow r^۲ - h^۲ < r^۲ - k^۲$$
$$\rightarrow -h^۲ < -k^۲ \rightarrow h^۲ > k^۲ \rightarrow h > k \rightarrow OH > OK$$

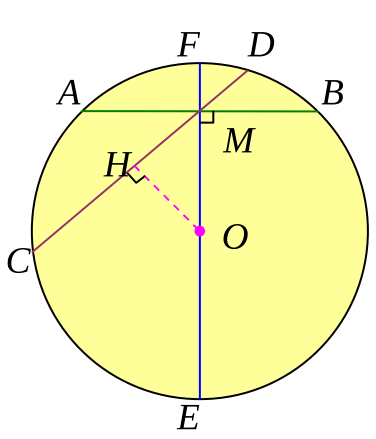
ب: در هر دایره ، وتری که به مرکز دایره نزدیکتر است ، بزرگتر است.

$$OH > OK \rightarrow AB < CD$$

اثبات:

$$OH > OK \rightarrow h > k \rightarrow h^۲ > k^۲ \rightarrow r^۲ - x^۲ > r^۲ - y^۲ \rightarrow -x^۲ > -y^۲$$
$$\rightarrow x^۲ < y^۲ \rightarrow x < y \rightarrow ۲x < ۲y \rightarrow AB < CD$$

تمرین ۲۰ : ثابت کنید که وتر عمود بر قطر گذرا از یک نقطه‌ی واقع در درون یک دایره و غیر منطبق بر مرکز، کوچکترین وتری است که از آن نقطه می گذرد.



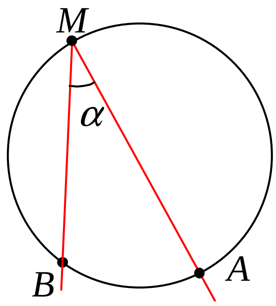
حکم : $AB < CD$

اثبات: وتر AB را که در نقطه‌ی M بر قطر EF عمود است و وتر CD را که از نقطه‌ی M می گذرد ولی عمود بر EF نیست را در نظر می گیریم و از نقطه‌ی O عمود OH را بر وتر CD فرود می آوریم.در مثلث قائم الزاویه‌ی MOH وتر OM از هر ضلع مثلث و از جمله از OH بزرگتر است. بنابراین طبق قضیه‌ی قبل می توان گفت: $AB < CD$.

نتیجه : بین وتر هایی از دایره که از هر نقطه‌ی دلخواه درون دایره می گذرند وتر عمود بر قطر گذرا از آن نقطه، دارای کمترین اندازه است.

***

زاویه‌ی محاطی

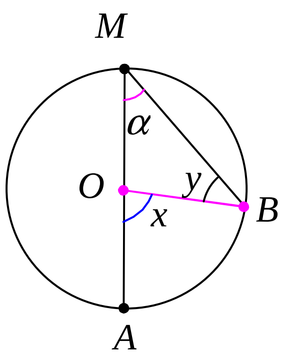


تعریف زاویه‌ی محاطی : زاویه ای است که رأس آن یک نقطه از دایره و اضلاع آن امتداد های دو وتر از همان دایره باشند. مانند زاویه‌ی α در شکل مقابل کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویه‌ی محاطی محدود و در داخل زاویه واقع است، کمان روبرو به آن زاویه می نامند. مانند کمان $\overset{\frown}{AB}$ در شکل مقابل

***

قضیه: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان روبروی آن است.

حکم: $\angle\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$



اثبات: قضیه را برای سه حالت مختلف زیر نشان می دهیم.

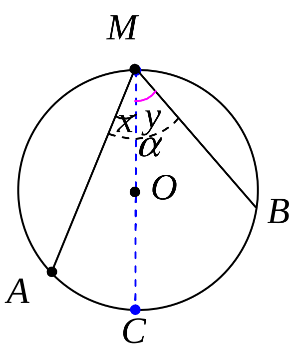
حالت اوّل : یک ضلع زاویه از مرکز دایره می گذرد.

$$\overset{\Delta}{MOB} : OM = OB \rightarrow \angle\alpha = \angle y$$

از طرفی x زاویه‌ی خارجی مثلث MOB است.

$$\angle x = \angle\alpha + \angle y = ۲\angle\alpha$$

از جهتی دیگر x زاویه‌ی مرکزی بوده و اندازه‌ی آن با کمان روبرو به آن یعنی $\overset{\frown}{AB}$ برابر است.



$$\angle x = ۲\angle\alpha \rightarrow \angle\alpha = \frac{\angle x}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

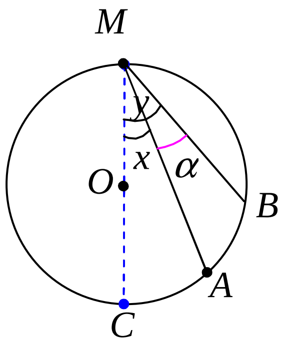
حالت دوّم : مرکز دایره داخل زاویه است.

قطری از دایره که از رأس زاویه می گذرد را رسم می کنیم. بنابر حالت اوّل خواهیم داشت:

$$\angle x=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \quad و \quad \angle y=\frac{\overset{\frown}{CB}}{۲}$$

$$\angle\alpha=\angle x+\angle y=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{CB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

حالت سوّم : مرکز دایره خارج از زاویه است.



قطری از دایره که از رأس زاویه می گذرد را رسم می کنیم. بنابر حالت اوّل خواهیم داشت:

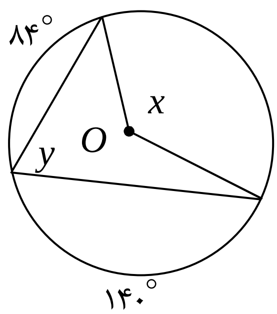
$$\angle x=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \quad و \quad \angle y=\frac{\overset{\frown}{CB}}{۲}$$

$$\angle\alpha=\angle y-\angle x=\frac{\overset{\frown}{CB}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CB}-\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

❋❋❋

تمرین ۲۱ : در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه های x و y را به دست آورید.

(نقطه‌ی O مرکز دایره است.)



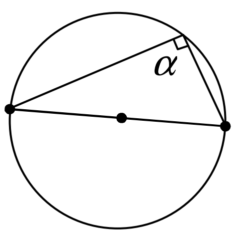
حل: واضح است که دایره کمانی برابر۳۶۰ درجه می باشد. پس:

$$\angle x+۸۴+۱۴۰=۳۶۰\longrightarrow \angle x=۱۳۶^\circ$$

$$\angle y=\frac{\angle x}{۲}=۶۸^\circ$$

❋❋❋

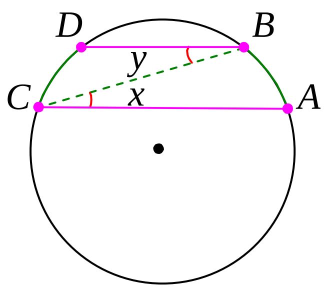
نتیجه : زاویه‌ی محاطی روبرو به قطر دایره ، همواره یک زاویه‌ی قائمهٔ است.



$$\angle\alpha=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰^\circ$$

❋❋❋

تمرین۲۲ : ثابت کنید که، در هر دایره کمان های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.



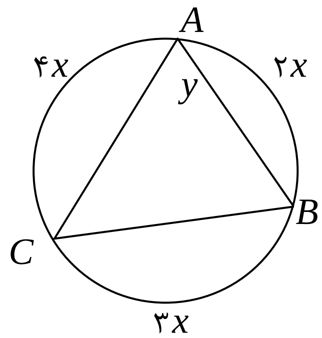
اثبات : وتر BC را رسم می کنیم. زاویه های x و y محاطی می باشند

از طرفی

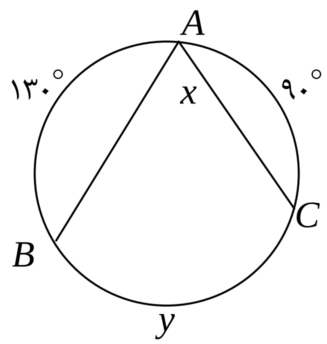
$$AC \parallel BD \rightarrow \angle x = \angle y \rightarrow \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

❋❋❋

تمرین۲۳ : در هر مورد مقدار x و y را بدست آورید.



(الف)



(ب)

حل الف :

$$۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰ \rightarrow x = \frac{۳۶۰}{۹} = ۴۰$$

$$\angle y = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۳x}{۲} = \frac{۳(۴۰)}{۲} = ۶۰^\circ$$

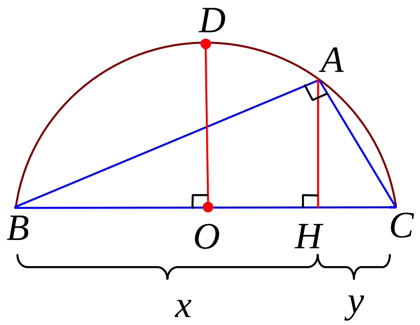
حل ب :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰ \rightarrow ۱۳۰ + ۹۰ + y = ۳۶۰ \rightarrow y = ۱۴۰$$

$$\angle x = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۴۰}{۲} = ۷۰^\circ$$

❋❋❋

تمرین۲۴ : به روش هندسی ثابت کنید که میانگین حسابی هر دو عدد مثبت، بزرگتر یا مساوی میانگین هندسی آنها است.



اثبات : ابتدا نیم دایره ای به قطر BC و به مرکز O رسم و نقطه‌ی A را به دلخواه روی محیط نیم دایره انتخاب می کنیم. حال اگر از مرکز نیم دایره بر قطر آن عمودی رسم کنید تا نقطه‌ی D بدست آید.

واضح است که :

$$OD \geq AH \quad (*)$$

زاویه‌ی BAC یک زاویه ی محاطی و اندازه‌ی آن نصف کمان روبروی آن (نیم دایره) است. پس:

$$\angle BAC = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰^\circ$$

در نتیجه AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه‌ی BAC است. در نتیجه واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده روی وتر می باشد.یعنی:

$$AH^۲ = BH \times CH \rightarrow AH^۲ = xy \rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

از طرفی $OD = \frac{BC}{۲} = \frac{x+y}{۲}$

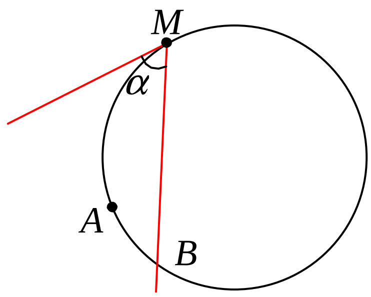
در نهایت با جایگذاری در رابطه‌ی (*) خواهیم داشت:

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$

***

زاویه‌ی ظلی

تعریف زاویه‌ی ظلی : زاویه ای است که رأس آن یک نقطه از دایره و یک ضلع آن دایره را قطع و ضلع دیگر آن بر دایره مماس باشد. مانند زاویه‌ی α در شکل مقابل



کمانی از دایره را که به زاویه محدود است، کمان نظیر یا کمان روبرو

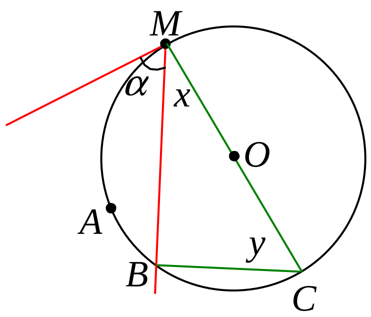
به زاویه‌ی ظلی می نامند. مانند کمان $\overset{\frown}{MAB}$ در شکل مقابل

***

قضیه : اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر نصف کمان روبروی آن است.

حکم : $\angle\alpha=\dfrac{\overset{\frown}{MAB}}{۲}$

اثبات: قطری از دایره که از رأس زاویه می گذرد را رسم می کنیم. واضح است که زاویه‌ی B محاطی روبرو به کمانی برابر نصف دایره می باشد، پس قائمه می باشد. لذا :



$\angle B=\dfrac{۱۸۰}{۲}=۹۰^\circ$

$\rightarrow \angle x+\angle y=۱۸۰-۹۰=۹۰^\circ \quad (۱)$

و چون شعاع دایره بر خط مماس در نقطه‌ی تماس عمود است داریم:

$\angle x+\angle\alpha=۹۰^\circ \qquad (۲)$

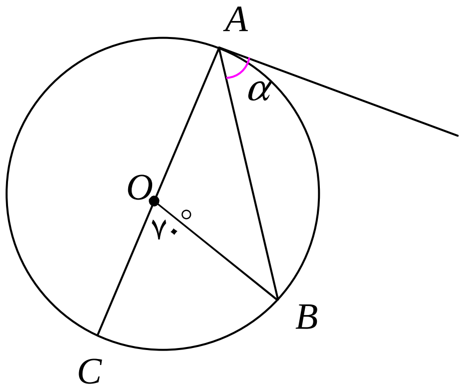
از نتایج ۱و۲ خواهیم داشت: $\angle\alpha=\angle y$

از طرفی y یک زاویه‌ی محاطی و برابر $\dfrac{\overset{\frown}{MAB}}{۲}$ است. لذا $\angle\alpha=\dfrac{\overset{\frown}{MAB}}{۲}$

***

تمرین۲۵: با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی α را به دست آورید.

حل: زاویه‌ی COB مرکزی است ، پس :

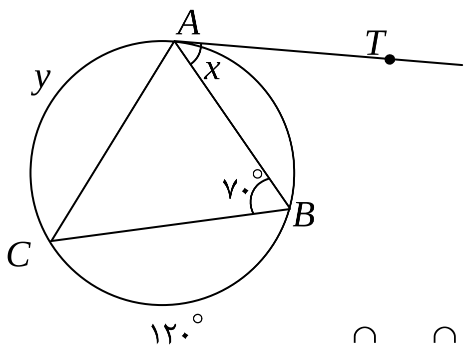


$\overset{\frown}{BC} = ۷۰^\circ$

$\overset{\frown}{AB} = ۱۸۰ - ۷۰ = ۱۱۰^\circ$

$\angle\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \dfrac{۱۱۰}{۲} = ۵۵^\circ$

تمرین۲۶: در شکل مقابل AT بر دایره در نقطه‌ی A مماس است. با توجه به شکل مقابل، مقدار x و y را بدست آورید.



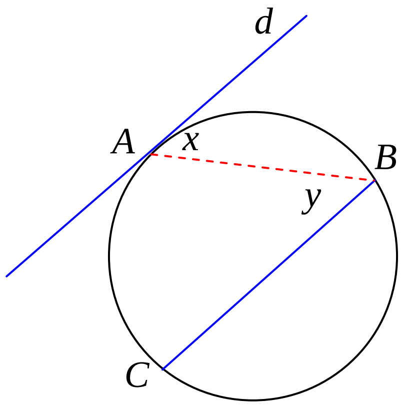
حل:

$\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = ۷۰ \to \dfrac{y}{۲} = ۷۰ \to y = ۱۴۰$

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰ \to \overset{\frown}{AB} + ۱۴۰ + ۱۲۰ = ۳۶۰ \to \overset{\frown}{AB} = ۱۰۰$

$\angle x = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \dfrac{۱۰۰}{۲} = ۵۰^\circ$

تمرین۲۷ : ثابت کنید که کمان های محصور بین خط مماس بر دایره و یک وتر از آن که موازی خط مماس باشد، به یک اندازه هستند.



اثبات: وتر AB را رسم می کنیم. در این صورت:

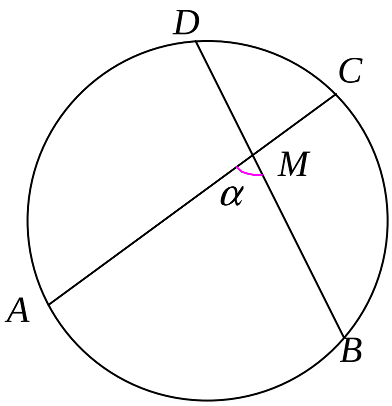
ظلی : $\angle x = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ و محاطی : $\angle y = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$

از طرفی چون $d \parallel CB$ پس $\angle x = \angle y$ لذا $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$

یعنی $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

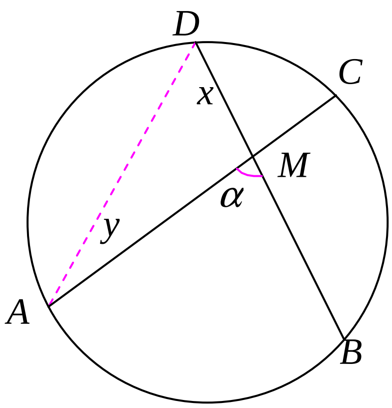
زاویه‌ی بین وتر های متقاطع

دو وتر از دایره ممکن است همدیگر را داخل ، روی دایره و یا خارج آن قطع کنند. اگر دو وتر همدیگر را روی دایره قطع کنند، زاویه‌ی تشکیل شده، یک زاویه‌ی محاطی است. برای حالت های دیگر دو قضیه‌ی زیر را بیان می کنیم.



قضیه : اندازه‌ی زاویه ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود، برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی از دایره است که به ضلع ها و امتداد ضلع های آن زاویه محدودند.

$$\text{حکم: } \angle\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

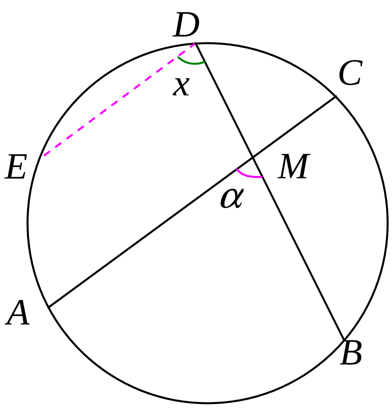


اثبات: وتر AD را رسم می کنیم. در این صورت:

$$\text{محاطی : } \angle x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \quad \text{و} \quad \text{محاطی : } \angle y = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

از طرفی α زاویه‌ی خارجی مثلث AMB است. پس

$$\angle\alpha = \angle x + \angle y = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$



اثبات: به روشی دیگر

وتر DE را موازی وتر AC رسم می کنیم. در این صورت:

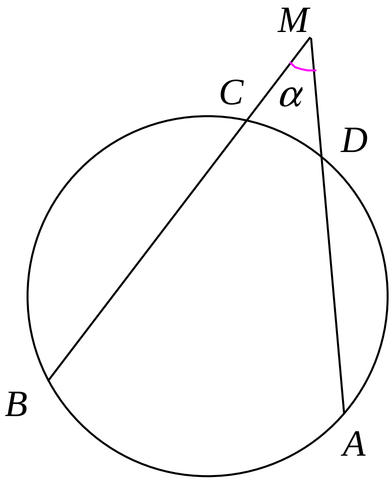
$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AE} \quad \text{و} \quad \angle\alpha = \angle x$$

$$\text{محاطی : } \angle x = \frac{\overset{\frown}{BE}}{۲}$$

$$\angle\alpha = \angle x = \frac{\overset{\frown}{BE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

***

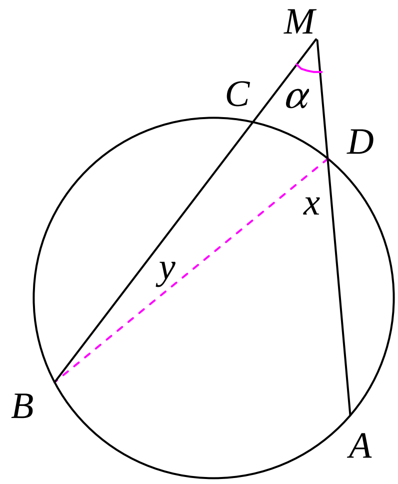
قضیه : اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می آید، برابر نصف (قدر مطلق) تفاضل اندازه‌ی کمان هایی از آن دایره است که به ضلع های آن زاویه محدودند.



حکم : $\angle\alpha=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}$

اثبات: وتر BD را رسم می کنیم. در این صورت:

محاطی : $\angle y=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$



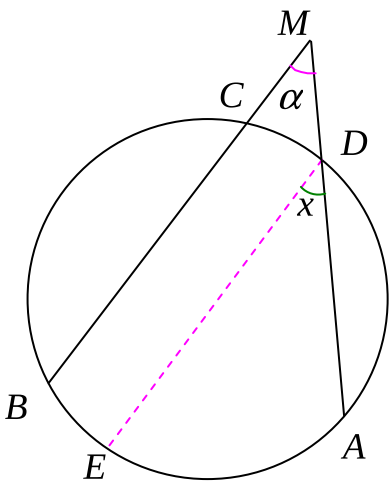
و   محاطی : $\angle x=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

از طرفی x زاویه‌ی خارجی مثلث BMD است. پس

$$\angle\alpha+\angle y=\angle x\rightarrow\angle\alpha=\angle x-\angle y=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

اثبات: به روشی دیگر

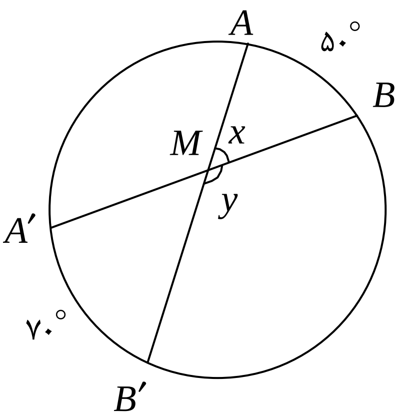
وتر BE را موازی MB رسم می کنیم. در این صورت:



$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BE}$ و   محاطی : $\angle x=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$

$$\angle\alpha=\angle x=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{BE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

تمرین۲۸: با توجه به شکل زیر مقدار های x و y را تعیین کنید.

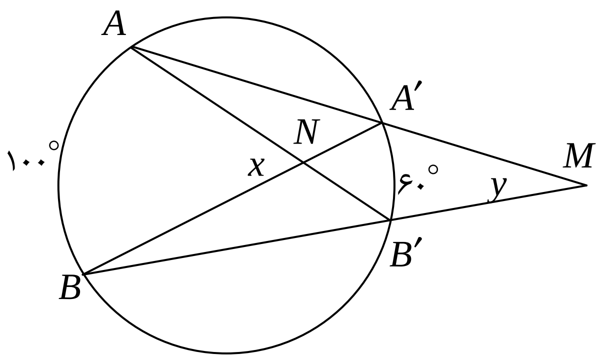


حل:

$$\angle x=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\frac{۵۰+۷۰}{۲}=۶۰^\circ$$

$$\angle y=۱۸۰-\angle x=۱۸۰-۶۰=۱۲۰^\circ$$

تمرین۲۹ : با توجه به شکل زیر ، مقدار های x و y را تعیین کنید.

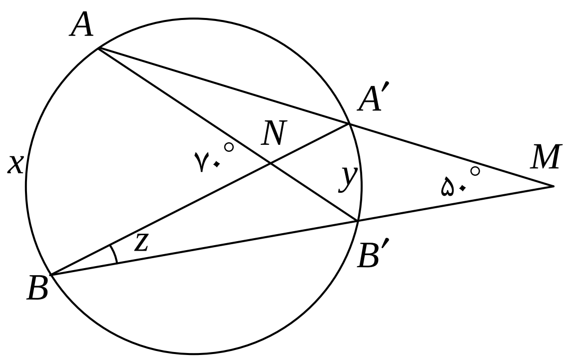


حل:

$$\angle ANB=\frac{۱۰۰+۶۰}{۲}=۸۰^\circ$$

$$\angle AMB=\frac{۱۰۰-۶۰}{۲}=۲۰^\circ$$

تمرین۳۰ : با استفاده از شکل روبرو مقدار های x و y و z را تعیین کنید.



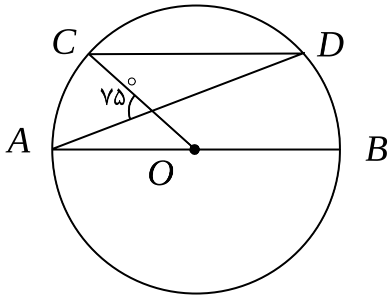
حل:

$$\left.\begin{array}{l}\angle ANB=\dfrac{x+y}{۲}=۷۰\rightarrow x+y=۱۴۰\\ \angle AMB=\dfrac{x-y}{۲}=۵۰\rightarrow x-y=۱۰۰\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}x+y=۱۴۰\\ x-y=۱۰۰\end{cases}\rightarrow x=۱۲۰^\circ \quad , \quad y=۲۰^\circ$$

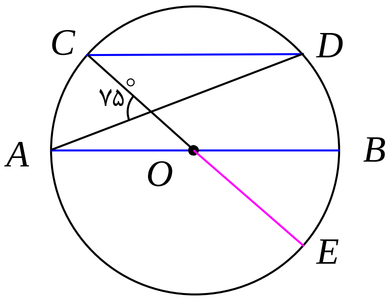
$$z=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰^\circ$$

***

تمرین ۳۱ : در شکل مقابل نقطه‌ی O مرکز دایره و $AB \parallel CD$ ، اندازه‌ی کمان CD را به دست آورید.



حل : ابتدا قطر CE را رسم می کنیم.



$$\angle AOC = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE} = x$$

$$AB \parallel CD \rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = x \rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BE} = x + x = ۲x$$

$$\frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{۲} = ۷۵ \rightarrow \frac{x + ۲x}{۲} = ۷۵ \rightarrow x = ۵۰^\circ$$

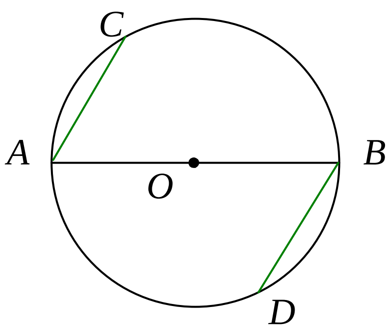
$$\overset{\frown}{DE} = ۲x = ۲(۵۰) = ۱۰۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰ - ۱۰۰ = ۸۰^\circ$$

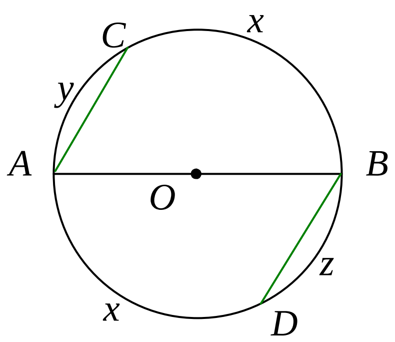
***

تمرین ۳۲ : در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازیند، ثابت کنید:

$$AC = BD$$



حل :



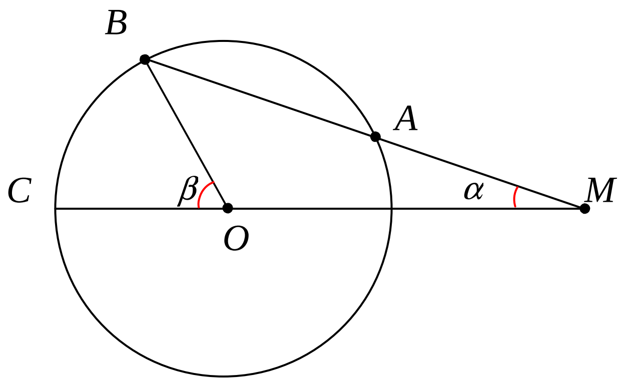
$AC \parallel BD \rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

لذا اگر قرار دهیم $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = x$ می توان نوشت:

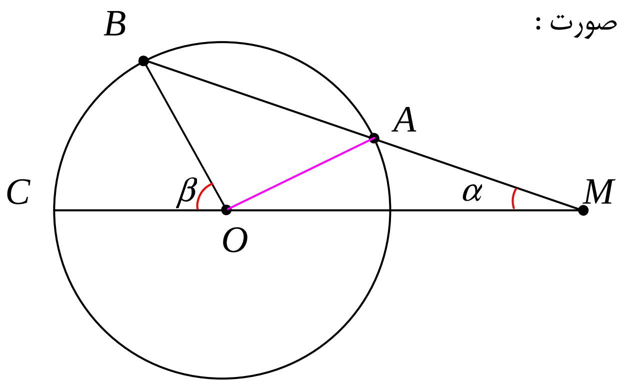
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AC} = ۱۸۰ - x = y \\ \overset{\frown}{BD} = ۱۸۰ - x = z \end{array}\right\} \rightarrow y = z \rightarrow AC = BD$$

***

تمرین۳۳ : با توجه به شکل زیر از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است. اگر اندازه‌ی MA برابر شعاع دایره باشد، ثابت کنید که $\beta = ۳\alpha$



حل : ابتدا شعاع OA را رسم می کنیم. در این صورت :



مطابق مسئله چون $OA = AM = r$، پس مثلث OAM متساوی الساقین است.

$\angle AOM = \angle M = \alpha$

زاویه‌ی OAB برای مثلث OAM یک زاویه‌ی خارجی محسوب می شود، لذا :

$\angle OAB = \alpha + \alpha = ۲\alpha$

از طرفی $OA = OB = r$ چون لذا، مثلث AOB یک مثلث متساوی الساقین است. پس :

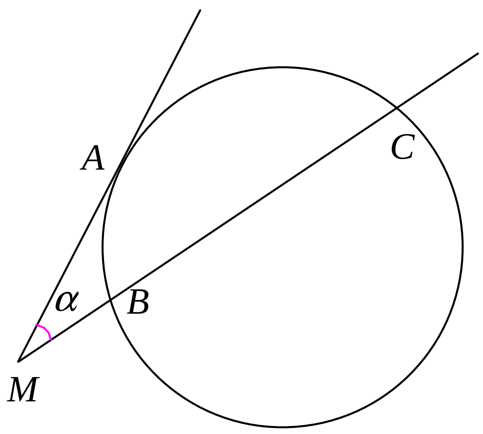
$$\angle OAB = \angle B = ۲\alpha$$

همچنین زاویه‌ی BOC یک زاویه‌ی خارجی برای مثلث OBM محسوب می شود. پس :

$$\beta = \angle B + \angle M = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$$

***

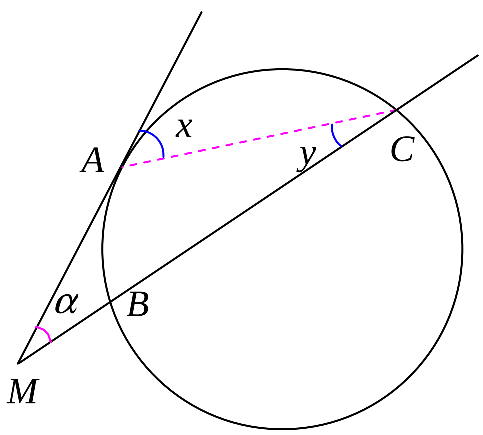
زاویه‌ی بین وتر و مماس



قضیه : اندازه‌ی زاویه ای که یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن دایره را قطع می کند، برابر نصف (قدر مطلق) تفاضل اندازه‌ی کمان هایی از دایره است که به ضلع های آن زاویه محدود هستند.

حکم : $\angle \alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

اثبات: وتر AC را رسم می کنیم. در این صورت:



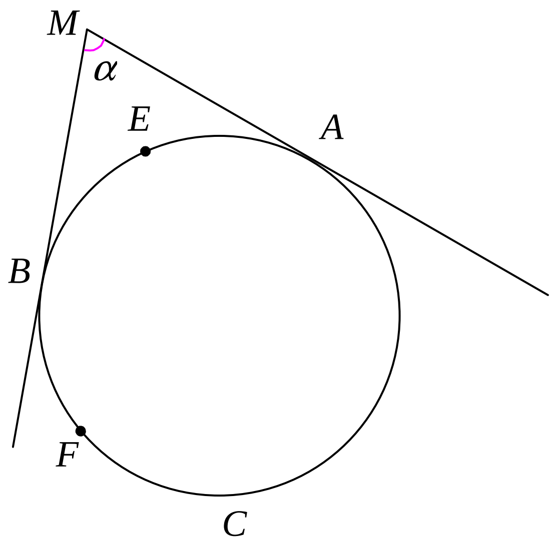
ظلی : $\angle x = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$ و محاطی : $\angle y = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

از طرفی x زاویه‌ی خارجی مثلث ACM است. پس

$$\angle \alpha + \angle y = \angle x \rightarrow \angle \alpha = \angle x - \angle y = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$$

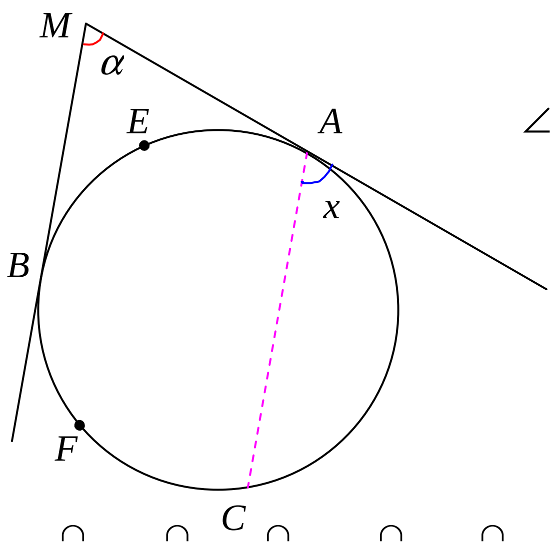
***

زاویه‌ی بین دو مماس



قضیه : اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو خط مماس رسم شده از یک نقطه‌ی بیرون دایره برابر نصف (قدرمطلق) تفاضل دو کمان ایجاد شده بین دو نقطه-ی تماس است.

حکم: $\angle\alpha=\dfrac{\overset{\frown}{AFB}-\overset{\frown}{AEB}}{۲}$



اثبات: از نقطه‌ی A وتر AC را موازی MB رسم می کنیم. در این صورت:

$\angle\alpha=\angle x$ و $\overset{\frown}{AEB}=\overset{\frown}{CFB}$

از طرفی x زاویه‌ی ظلی بوده و برابر $\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$است.

پس:

$$\angle x=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AFB}-\overset{\frown}{CFB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AFB}-\overset{\frown}{AEB}}{۲}\rightarrow\angle\alpha=\frac{\overset{\frown}{AFB}-\overset{\frown}{AEB}}{۲}$$

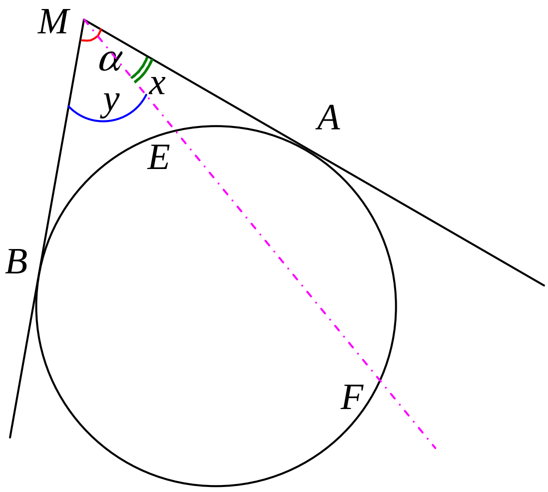
اثبات: به روشی دیگر:

از نقطه‌ی M محل تقاطع این دو خط مماس، خطی رسم می کنیم که دایره را در نقاط E و F قطع کند. حال طبق قضیه‌ی قبل می توان نوشت:

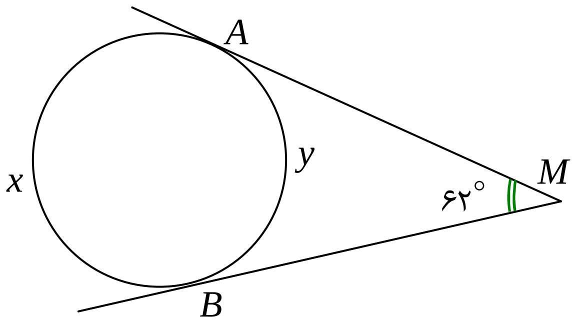
$\angle x=\dfrac{\overset{\frown}{AF}-\overset{\frown}{AE}}{۲}$ و $\angle y=\dfrac{\overset{\frown}{BF}-\overset{\frown}{BE}}{۲}$

$$\angle\alpha=\angle x+\angle y=\frac{\overset{\frown}{AF}-\overset{\frown}{AE}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{BF}-\overset{\frown}{BE}}{۲}$$

$$=\frac{(\overset{\frown}{AF}-\overset{\frown}{AE})+(\overset{\frown}{BF}-\overset{\frown}{BE})}{۲}=\frac{(\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{BF})-(\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{AE})}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AFB}-\overset{\frown}{AEB}}{۲}$$



تمرین۳۴ : با توجه به شکل زیر، مقدار های x و y را تعیین کنید.



حل:

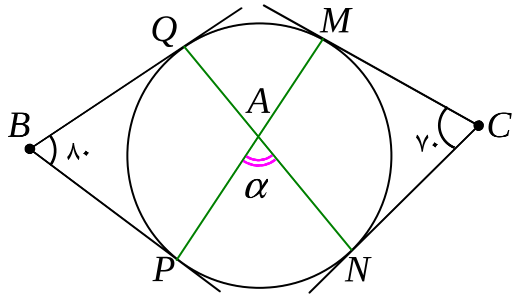
$$\angle AMB=\frac{x-y}{۲}=۶۲\rightarrow x-y=۱۲۴$$

از طرفی واضح است که کمان های x و y کل دایره را کامل می کنند. پس : $x+y=۳۶۰$

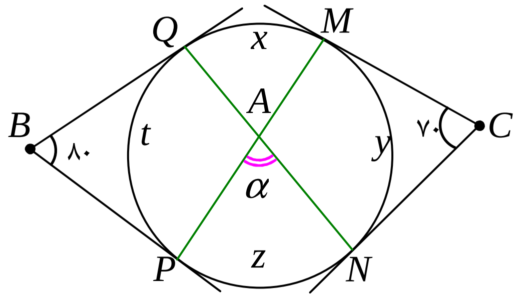
$$\rightarrow\begin{cases}x+y=۳۶۰\\x-y=۱۲۴\end{cases}\rightarrow x=۲۴۲^{\circ}\quad,\quad y=۱۱۸^{\circ}$$

***

تمرین۳۵ : در شکل زیر اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. مقدار α را تعیین کنید.



حل : ابتدا کمان های روی دایره را به صورت زیر نامگذاری می کنیم.



لذا :

$$\begin{cases} \frac{x+y+z-t}{۲}=۸۰ \rightarrow x+y+z-t=۱۶۰ \\ \frac{x+t+z-y}{۲}=۷۰ \rightarrow x+t+z-y=۱۴۰ \end{cases} \rightarrow ۲x+۲z=۳۰۰ \xrightarrow{\div ۲} x+z=۱۵۰$$

$$\rightarrow \alpha=\frac{x+z}{۲}=\frac{۱۵۰}{۲}=۷۵$$

تمرین برای حل :

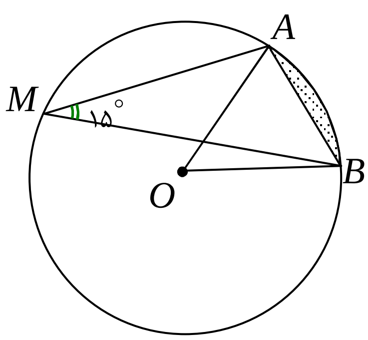
۳۶ : در شکل مقابل دایره‌ی $C(O,۵)$ را در نظر بگیرید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

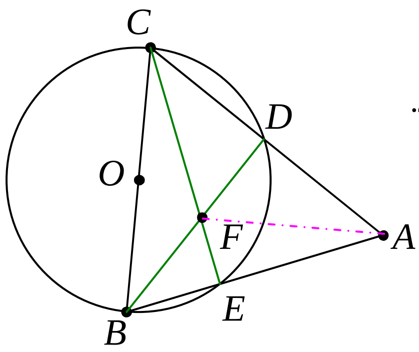
الف : اندازه و طول کمان AB را تعیین کنید.

ب : مساحت و محیط دایره را به دست آورید.

ج : مساحت قطاع AOB را محاسبه کنید.

د : مساحت قطعه‌ی هاشور خورده را بیابید.





۳۷ : در شکل مقابل BC قطر دایره است. ثابت کنید که :

الف) پاره خط های BD و CE ارتفاع های مثلث ABC می باشند.

ب) امتداد AF بر BC عمود است.

ج) $AB \times EC = AC \times BD$

***

تهیه کننده : جابر عامری

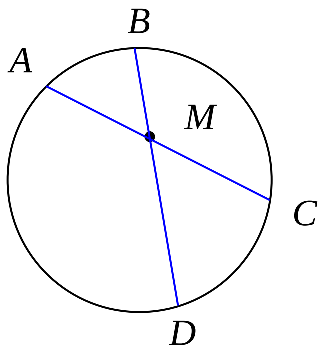
دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

درس دوّم : رابطه های طولی در دایره

اگر خط های شامل دو وتر یکدیگر را در درون یا بیرون دایره قطع کنند. بین اندازه‌ی پاره خطهای حاصل روابطی داریم که در این درس به بررسی آنها می پردازیم.

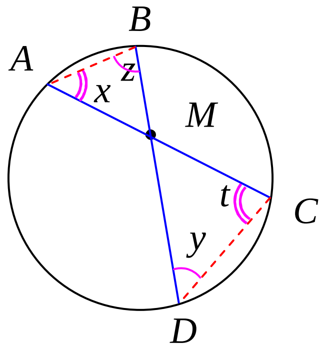
روابط طولی حاصل از وتر های متقاطع

قضیه : هرگاه دو وتر در داخل دایره یکدیگر را قطع نمایند، حاصل ضرب دو قطعه‌ی جدا شده از یکی با حاصل ضرب دو قطعه‌ی جدا شده از دیگری مساوی است.



حکم : $AM \times CM = BM \times DM$

اثبات: وتر های AB و CD را رسم می کنیم. آنگاه خواهیم داشت:



محاطی : $\angle x = \angle y = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

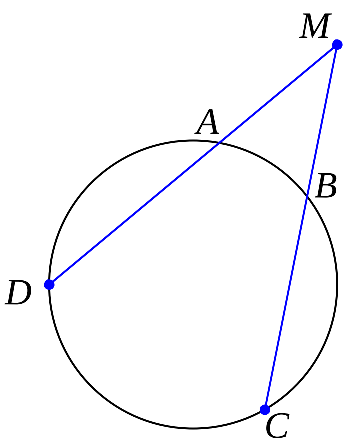
محاطی : $\angle z = \angle t = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{AMB} \approx \overset{\Delta}{CMD} \rightarrow \frac{AM}{DM} = \frac{BM}{CM} = \frac{AB}{CD}$$

$$\rightarrow \frac{AM}{DM} = \frac{BM}{CM} \rightarrow AM \times CM = BM \times DM$$

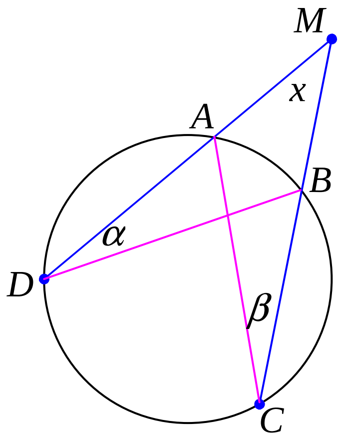
***

قضیه : هرگاه دو وتر در نقطه ای در بیرون دایره متقاطع باشند، حاصل ضرب دوقطعه ای که آن دایره بر هر یک از وتر ها پدید می آورد با حاصل ضرب دو قطعه ی وتر دیگر برابر است.



حکم : $MA \times MD = MB \times MC$

اثبات: نقطه‌ی A را به C و نقطه‌ی B را به D وصل می کنیم. در این صورت داریم:



مشترک $\angle x = \angle x$

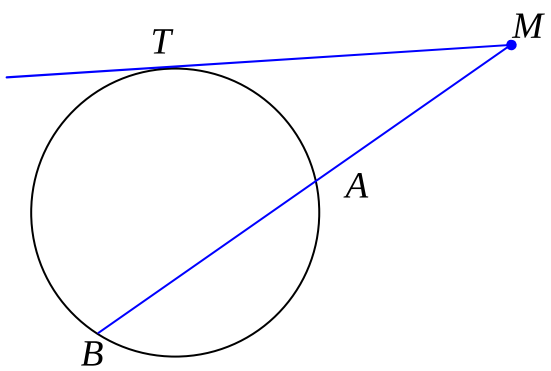
محاطی $\angle \alpha = \angle \beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{MBD} \approx \overset{\Delta}{MAC} \to \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD}$$

$$\to \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD} \to MA \times MD = MB \times MC$$

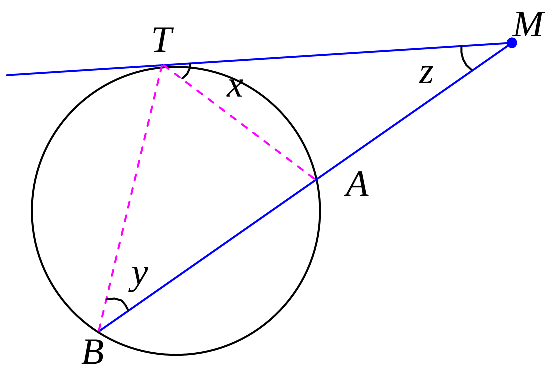
***

قضیه : اگر از یک نقطه واقع در بیرون دایره یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره ای رسم کنیم،اندازه‌ی مماس واسطه‌ی هندسی است بین اندازه‌ی دو قطعه‌ی قاطع



حکم : $MT^{۲} = MA \times MB$

اثبات: نقطه‌ی T را به نقاط A و B وصل می کنیم. در این صورت زاویه‌ی x ظلی و زاویه‌ی y محاطی و روبرو به کمان AT هستند. لذا:



$$\angle x = \angle y = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}$$

از طرفی:

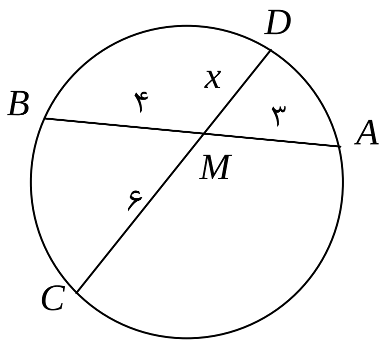
$$\left.\begin{array}{l}\angle x = \angle y \\ \angle z = \angle z\end{array}\right\} \to \overset{\Delta}{MTA} \approx \overset{\Delta}{MTB} \to \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} = \frac{AT}{BT}$$

$$\to \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \to MT^{۲} = MA \times MB$$

***

تمرین ۱: در هر مورد مقدار مجهول را بیابید.

الف:

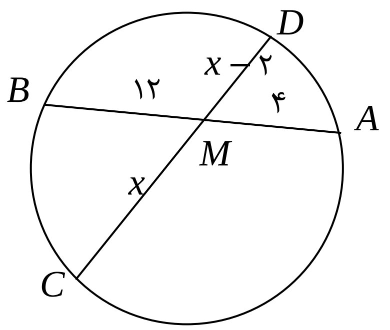


حل:

$$MA \times MB = MC \times MD$$
$$\rightarrow ۳ \times ۴ = ۶ \times x \rightarrow x = ۲$$

***

ب :

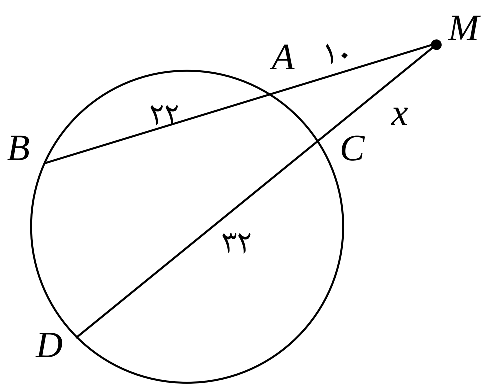


حل:

$$MA \times MB = MC \times MD$$
$$\rightarrow ۴ \times ۱۲ = x \times (x - ۲)$$
$$\rightarrow x^{۲} - ۲x - ۴۸ = ۰$$
$$\rightarrow (x + ۶)(x - ۸) = ۰$$
$$\rightarrow x = -۶ \ (غ) \quad , \quad x = ۸$$

***

ج:



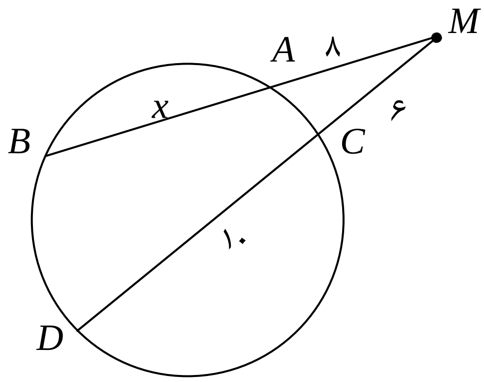
حل:

$$MA \times MB = MC \times MD$$
$$\rightarrow ۱۰ \times (۱۰ + ۲۲) = x \times (x + ۳۲)$$
$$\rightarrow x^{۲} + ۳۲x - ۳۲۰ = ۰$$
$$\rightarrow (x + ۴۰)(x - ۸) = ۰$$
$$\rightarrow x = ۸ \quad , \quad x = -۴۰ (غ)$$

***

د :

حل :

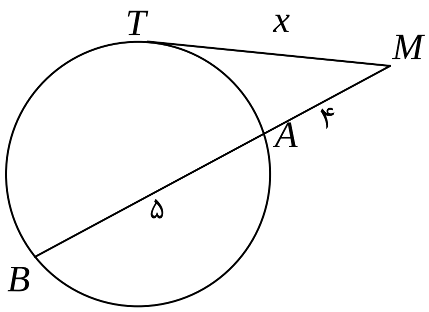


$$MA\times MB=MC\times MD$$
$$\rightarrow ۸\times(۸+x)=۶\times(۶+۱۰)$$
$$\rightarrow ۶۴+۸x=۹۶\rightarrow x=۴$$

***

هـ :

حل:

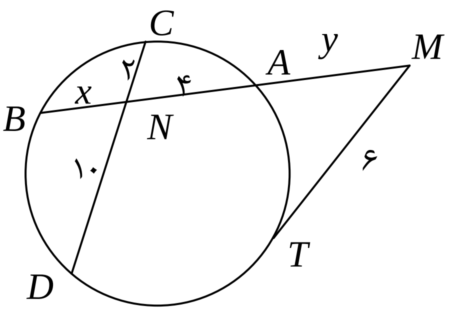


$$MT^{۲}=MA\times MB$$
$$\rightarrow x^{۲}=۴(۴+۵)$$
$$\rightarrow x^{۲}=۳۶\rightarrow x=۶$$

***

و :

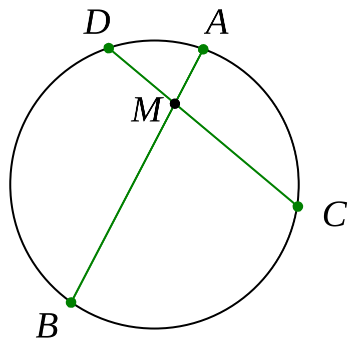
حل:



$$NA\times NB=NC\times ND$$
$$\rightarrow ۴\times x=۲\times ۱۰\rightarrow x=۵$$
$$MT^{۲}=MA\times MB$$
$$\rightarrow ۶^{۲}=y(y+۴+x)$$
$$\xrightarrow{x=۵} ۳۶=y(y+۴+۵)$$
$$\rightarrow y^{۲}+۹y-۳۶=۰$$
$$\rightarrow (y+۱۲)(y-۳)=۰$$
$$\rightarrow y=-۱۲(\text{غ})\quad ,\quad y=۳$$

***

تمرین۲: در شکل مقابل وتر AB، وتر CD را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB=۱۱$ و $CD=۹$ سانتی متر باشند. تعیین کنید وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟



حل :

$$\frac{CM}{MD}=\frac{۲}{۱}\to\frac{CM}{MD+CM}=\frac{۲}{۱+۲}\to\frac{CM}{DC}=\frac{۲}{۳}\to\frac{CM}{۹}=\frac{۲}{۳}\to CM=۶$$

$$\to MD=CD-CM=۹-۶=۳$$

$$AM\times MB=CM\times MD\to AM\times(۱۱-AM)=۳\times۶$$

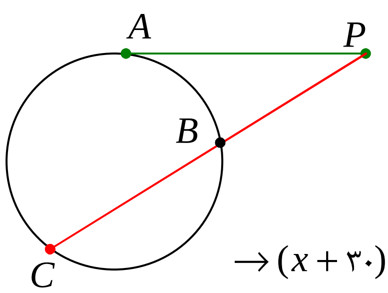
$$\xrightarrow{AM=x}x(۱۱-x)=۱۸\to x^{۲}-۱۱x+۱۸=۰\to(x-۲)(x-۹)=۰$$

$$\to\begin{cases}x=۲\to AM=۲\,,\,MB=۹\to\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{۲}{۹}\\x=۹\to AM=۹\,,\,MB=۲\to\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{۹}{۲}\end{cases}$$

***

تمرین۳ : از نقطه‌ی A واقع روی دایره ای مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$، رسم کرده ایم. سپس از نقطه‌ی P خط راستی گذرانده ایم که دایره را در نقاط C و B قطع کرده و $BC=۲۰$ است. طول های PB و PC را به دست آورید.

حل : ابتدا شکل مربوط به مسئله را رسم می کنیم.



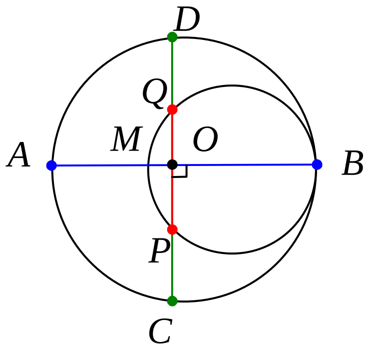
$$AP^{۲}=BP\times CP\xrightarrow{BP=x}(۱۰\sqrt{۳})^{۲}=x(x+۲۰)$$

$$\to x^{۲}+۲۰x-۳۰۰=۰$$

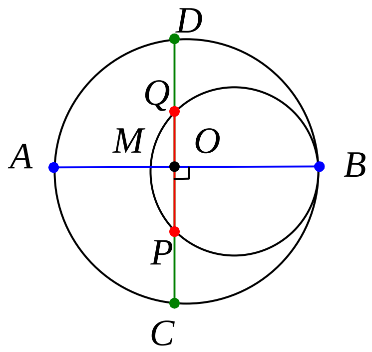
$$\to(x+۳۰)(x-۱۰)=۰\to\begin{cases}x=-۳۰\quad\text{غیرقابل قبول}\\x=۱۰\to BP=۱۰,\ CP=۱۰+۲۰=۳۰\end{cases}$$

تمرین۴ : در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره‌ی بزرگتر بر هم عمودند.

اگر $AM = ۱۶$ و $DQ = ۱۰$ شعاع های دو دایره را پیدا کنید.



حل : ابتدا فرض می کنیم که شعاع دایره‌ی بزرگ R و شعاع دایره‌ی کوچک r باشد. از طرفی می دانیم که در هر دایره قطر عمود بر هر وتر آن وتر را نصف می کند. در دایره‌ی کوچکتر، قطر BM بر وتر PQ عمود است. لذا :



$$OP = OQ \rightarrow OQ = OD - DQ = R - ۱۰$$

$$OM = OA - AM = R - ۱۶$$

$$OP \times OQ = OB \times OM$$
$$\rightarrow (R - ۱۰)(R - ۱۰) = R(R - ۱۶)$$
$$\rightarrow R^۲ - ۲۰R + ۱۰۰ = R^۲ - ۱۶R \rightarrow ۴R = ۱۰۰$$
$$\rightarrow R = ۲۵$$
$$OM = R - ۱۶ = ۲۵ - ۱۶ = ۹$$

$$\rightarrow BM = R + OM = ۲۵ + ۹ = ۳۴$$

$$\xrightarrow{BM = ۲r} ۲r = ۳۴ \rightarrow r = ۱۷$$

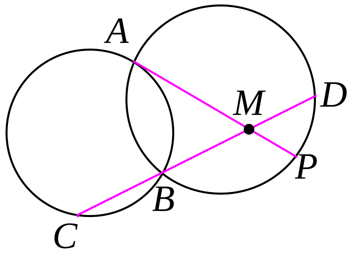
***

تمرین برای حل :

۵ : در شکل مقابل MA بر دایره‌ی کوچک مماس است

و $x = MD = MB = BC$ و $MP = ۱$.

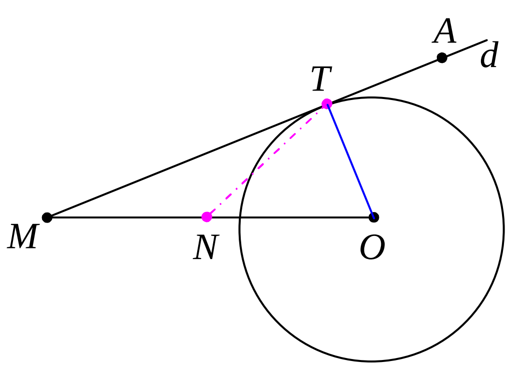
اندازه‌ی x را به دست آورید.



ویژگی خط مماس بر دایره از نقطه‌ی خارج دایره

خط مماس رسم شده از یک نقطه‌ی خارج دایره ویژگی جالبی دارد که در ادامه به این ویژگی می پردازیم.

اگر خط d در نقطه‌ی T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d و در دو طرف نقطه‌ی T باشند، واضح است که پاره خط های MT و AT نیز بر دایره مماس اند. حال اگر O مرکز دایره باشد، چون شعاع دایره بر خط مماس در نقطه‌ی تماس عمود است، بنابراین مثلث OMT در رأس T قائم الزاویه است. و اگر N وسط پاره خط OM باشد، چون در هر مثلث قائم الزاویه ، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است، پس $NM = NO = NT$. بنابراین هر دایره به مرکز N و قطر OM از نقطه‌ی T می گذرد.

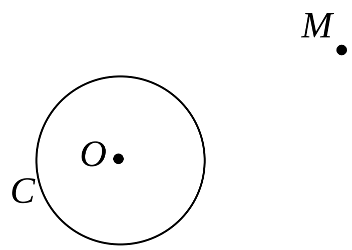


از این ویژگی می توان، در رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای مانند M خارج دایره، استفاده کرد.

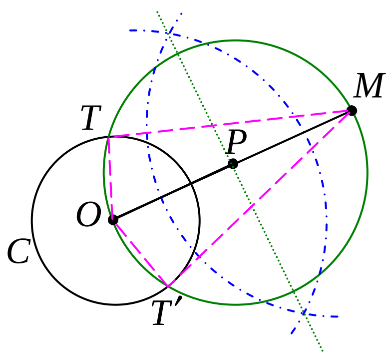
رسم مماس بر دایره از نقطه‌ی خارج دایره

در تمرین بعد به روش این رسم می پردازیم.

تمرین۶ : دایره‌ی $C(O,R)$ و نقطه‌ی M واقع در خارج این دایره داده شده اند.از نقطه‌ی M خطی رسم کنید که بر دایره مماس باشند. مسئله چند جواب دارد؟



حل : نقطه‌ی M را به مرکز دایره‌ی C وصل می کنیم. حال با رسم عمود منصف پاره خط OM نقطه‌ی وسط این پاره خط را پیدا می کنیم. اگر این نقطه را P بنامیم، به مرکز P و شعاع OP (یا PM) دایره‌ی دیگری رسم می کنیم. این دایره ، دایره‌ی C را در نقاط T و T' قطع می کند. زاویه های OTM و $OT'M$ محاطی و روبرو به قطر این دایره هستند، لذا هر دو قائمه اند. در نتیجه MT و MT' به ترتیب در نقاط T و T' بر دایره‌ی C مماسند.

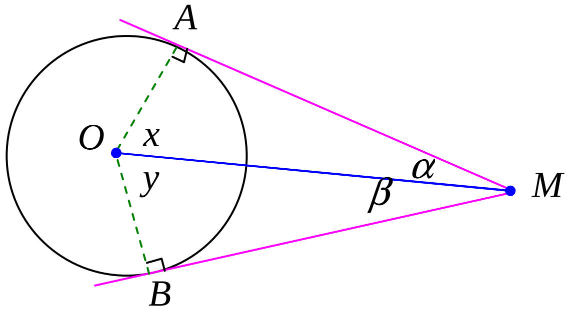


تمرین۷ : هرگاه از یک نقطه در بیرون دایره ای دو مماس بر آن دایره رسم شود.

الف: قطعاتی از مماس ها که بین آن نقطه و نقاط تماس محصورند، متساویند.

ب: خطی که آن نقطه را به مرکز دایره وصل می کند، زاویه‌ی بین دو مماس و همچنین زاویه‌ی بین شعاع های نقاط تماس را نصف می کند.

حل : با توجه به شکل مقابل می توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ OM=OM \end{array}\right\} \rightarrow \underset{\text{(وتر و یک ضلع)}}{\overset{\Delta}{AOM} \cong \overset{\Delta}{BOM}} \rightarrow \left(\begin{array}{l} AM=BM \\ \angle x=\angle y \\ \angle\alpha=\angle\beta \end{array}\right.$$

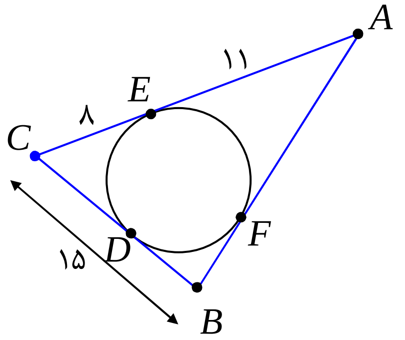
نتیجه: هرگاه از یک نقطه در بیرون دایره ای دو مماس بر آن رسم شود، خطی که آن نقطه را به مرکز دایره متصل می کند، عمود منصف وتری از دایره است که دو نقطه ی تماس را به هم وصل می کند.

اثبات: با توجه به شکل فوق چون $OA=OB$ و $AM=BM$ پس نقاط M و O از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند. لذا روی عمود منصف AB قرار دارند. یعنی OM عمود منصف AB است.

***

تمرین۸ : با توجه به شکل روبرو محیط مثلث ABC را بیابید.

حل:



$CD=CE=۸$

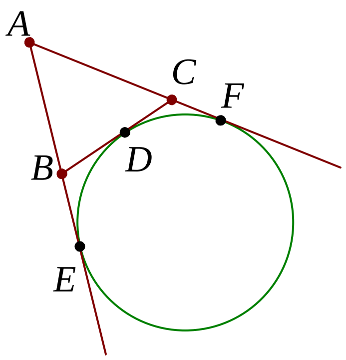
$BD=BC-CD=۱۵-۸=۷$

$BF=BD=۷$

$AF=AE=۱۱$

حال محیط مثلث ABC را به شکل زیر محاسبه می کنیم.

$$\therefore P=AB+BC+AC=(AF+BF)+(BD+DC)+(AE+EC)$$
$$=(۱۱+۷)+(۷+۸)+(۱۱+۸)=۵۲$$



تمرین ۹ : با توجه به شکل مقابل، ثابت کنید که با تغییر مکان نقطه‌ی D روی دایره بین دو نقطه‌ی E و F، محیط مثلث ABC ثابت می ماند.

حل: با توجه به تمرین۶ داریم:

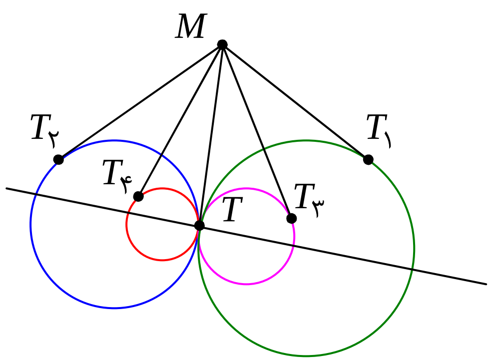
$AE = AF$ و $CD = CF$ و $BD = BE$

اکنون محیط مثلث ABC را به شکل زیر محاسبه می کنیم.

$$P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + (BD + DC) + AC$$
$$= \underbrace{AB + BE}_{AE} + \underbrace{CF + AC}_{AF} = AE + AF = AE + AE = ۲AE$$

و چون محیط مثلث ABC وابسته به محل قرار گرفتن نقطه‌ی D نیست، لذا همواره ثابت بوده و برابر $۲AE$ یا $۲AF$ است.

***



تمرین ۱۰ : مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه‌ی T بر هم مماس اند و از نقطه‌ی M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم. ثابت کنید.

$$MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴ = ...$$

حل : طول مماس های رسم شده از یک نقطه‌ی خارج هر دایره با هم برابرند. از نقطه‌ی M دو مماس MT و $MT_۱$ بر یک دایره رسم شده اند. پس $MT_۱ = MT$

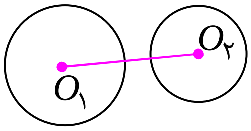
همچنین از نقطه‌ی M دو مماس MT و $MT_۲$ بر یک دایره رسم شده اند. پس $MT_۲ = MT$

به طریق مشابه داریم :

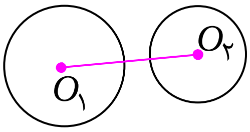
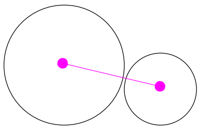
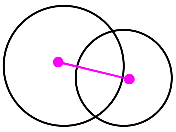
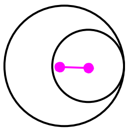
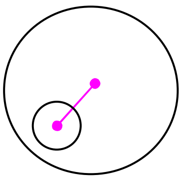
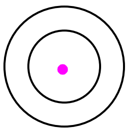
$$\left.\begin{array}{l} MT_۱ = MT \\ MT_۲ = MT \\ MT_۳ = MT \\ \quad ... \end{array}\right\} \rightarrow MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = ...$$

حالت های مختلف دو دایره نسبت به هم

پاره خطی که مرکز های دو دایره را به هم وصل می کند و به آنها محدود باشد را خط المرکزین می نامند.



اگر R_1 و R_2 شعاع های دو دایره و طول خط المرکزین دو دایره $d = O_1O_2$ باشد. با فرض اینکه $R_1 > R_2$. حالت های مختلف دو دایره نسبت به هم را می توان به شکل زیر مشاهده کرد.

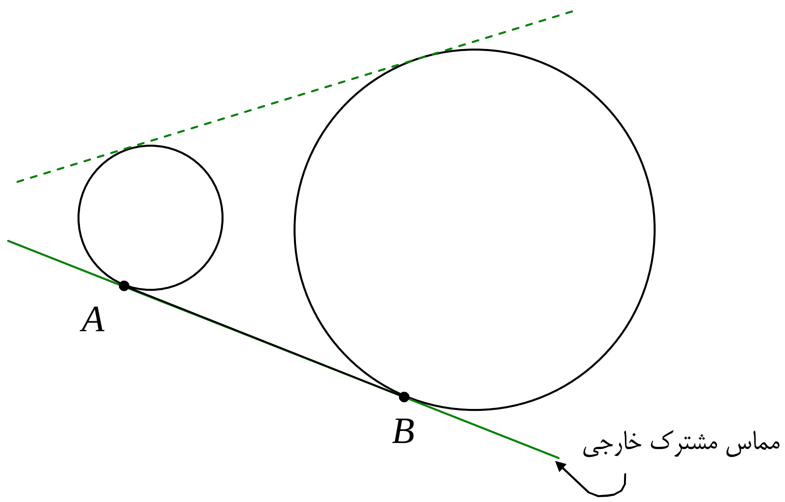
ردیف	حالت	شکل نمونه	رابطه
۱	دو دایره بیرون یکدیگرند.(متخارج)		$d > R_1 + R_2$
۲	دو دایره مماس بیرونی اند.		$d = R_1 + R_2$
۳	دو دایره متقاطع اند.		$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$
۴	دو دایره مماس درونی اند.		$d = R_1 - R_2$
۵	دو دایره درون یکدیگرند.(متداخل)		$d < R_1 - R_2$
۶	دو دایره هم مرکزند.		$d = 0$

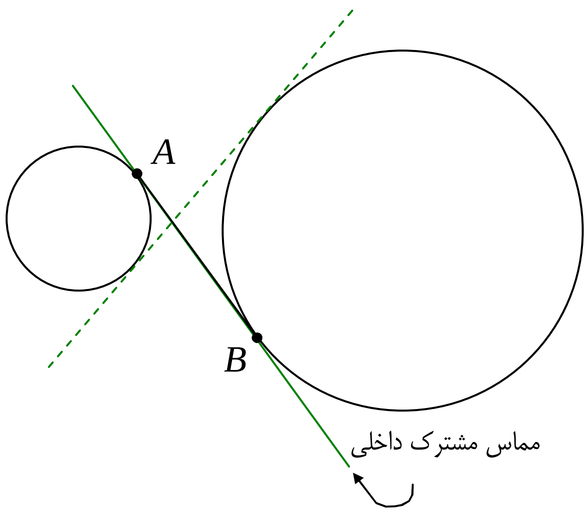
تمرین ۱۱ : اندازه‌ی شعاع های دو دایره ۷ و ۳ است. اگر اندازه‌ی خط المرکزین ۵ باشد. این دو دایره نسبت به هم چه حالتی دارند؟چرا؟

مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک دو دایره ، پاره خط یا خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد.

اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط را *مماس مشترک خارجی* و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط را *مماس مشترک داخلی* می نامند.

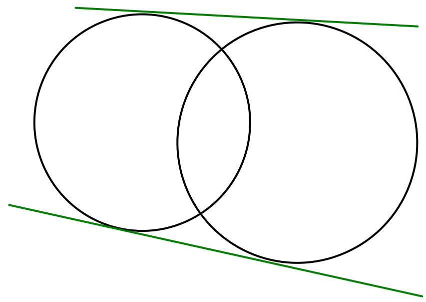




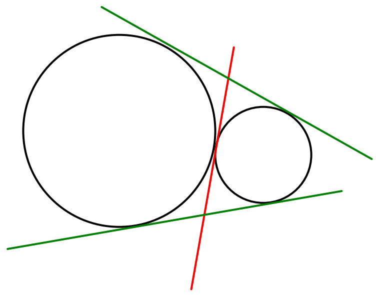
***

در شکل های فوق دو دایره‌ی رسم شده، دو مماس مشترک خارجی و دو مماس مشترک داخلی دارند. بستگی به وضعیت دو دایره نسبت به هم ، تعداد مماس های مشترک می تواند تغییر کند. به شکل های زیر توجه کنید.

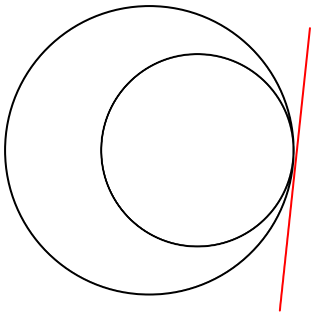
الف: دو دایره متقاطع هستند و فقط دو مماس مشترک خارجی دارند.



ب : دو دایره مماس بیرونی هستند و دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی دارند.



ج : دو دایره مماس داخلی هستند و فقط یک مماس خارجی دارند.



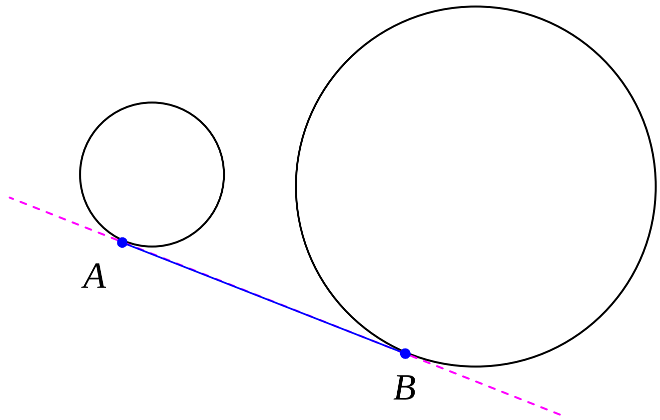
***

جدول زیر تعداد مماس مشترک خارجی و مماس مشترک داخلی دو دایره را با توجه به وضعیت دو دایره نشان می دهد.

وضعیت دو دایره	تعداد مماس مشترک خارجی	تعداد مماس مشترک داخلی
دو دایره متخارج هستند.	۲	۲
دو دایره مماس خارجی هستند.	۲	۱
دو دایره متقاطع هستند.	۲	۰
دو دایره مماس داخلی هستند.	۱	۰
دو دایره متداخل هستند.	۰	۰

محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک دو دایره

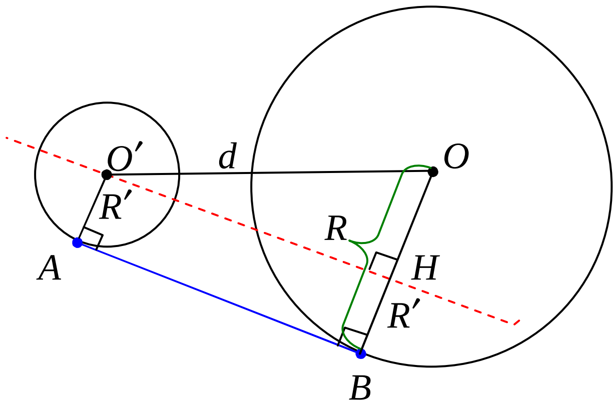
پاره خط مماس مشترک دو دایره قسمتی از خط مماس مشترک دو دایره است که بین دو نقطه‌ی تماس محصور باشد (مانند پاره خط AB در شکل زیر). اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک دو دایره را می توان بر حسب اندازه‌ی شعاع های دو دایره و طول خط المرکزین آنها بدست آورد.



***

الف: محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک خارجی دو دایره

از نقطه‌ی O' (مرکز دایره‌ی کوچکتر) خطی موازی AB رسم می کنیم. واضح است که چهارضلعی $ABHO'$ به دلیل توازی اضلاع مقابل و داشتن زاویه‌ی قائمه مستطیل است و همچنین مثلث $OO'H$ قائم الزاویه است. پس داریم:



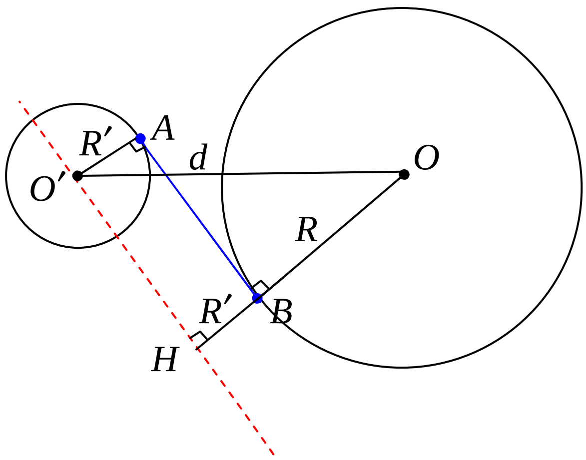
$$\overset{\Delta}{OO'H} : OO'^{۲} = OH^{۲} + O'H^{۲}$$
$$\rightarrow d^{۲} = (R-R')^{۲} + AB^{۲}$$
$$\rightarrow AB^{۲} = d^{۲} - (R-R')^{۲}$$
$$\rightarrow AB = \sqrt{d^{۲} - (R-R')^{۲}}$$

اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک خارجی دو دایره

$$\boxed{AB = \sqrt{d^{۲} - (R-R')^{۲}}}$$

ب : محاسبه‌ی اندازه پاره خط مماس مشترک داخلی دو دایره

از نقطه‌ی O' (مرکز دایره‌ی کوچکتر) خطی موازی AB رسم می کنیم. واضح است که چهارضلعی $ABHO'$ به دلیل توازی اضلاع مقابل و داشتن زاویه‌ی قائمه مستطیل است و همچنین مثلث $OO'H$ قائم الزاویه است. پس داریم:



$$\overset{\Delta}{OO'H} : OO'^{۲} = OH^{۲} + O'H^{۲}$$
$$\to d^{۲} = (R+R')^{۲} + AB^{۲}$$
$$\to AB^{۲} = d^{۲} - (R+R')^{۲}$$
$$\to AB = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}}$$

اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک داخلی دو دایره

$$\boxed{AB = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}}}$$

***

نتیجه : چون اندازه‌ی مماس های مشترک بستگی به اندازه‌ی شعاع ها و طول خط المرکزین دارد. پس:

الف : اندازه‌ی پاره خط های مماس مشترک خارجی دو دایره مساوی است.

ب : اندازه‌ی پاره خط های مماس مشترک داخلی دو دایره مساوی است.

***

تمرین ۱۲ : دو دایره‌ی $C(O,۷)$ و $C'(O',۱)$ را با فرض اینکه $OO' = ۱۰$ داده شده اند.

الف: وضع دو دایره را نسبت به هم بنویسید.

ب: تعیین کنید که این دو دایره چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی دارند؟

ج: اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک خارجی را در صورت وجود بدست آورید.

د: اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک داخلی را در صورت وجود بدست آورید.

حل: مجموع شعاع های دو دایره را با طول خط المرکزین مقایسه می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} R=۷ \\ R'=۱ \end{array}\right\} \rightarrow R+R'=۷+۱=۸ \xrightarrow{d=۱۰} R+R'<d$$

لذا دو دایره متخارج هستند. پس دو خط مماس مشترک خارجی و دو مماس مشترک داخلی دارند.

اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک خارجی دو دایره

$$AB=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۱۰^۲-(۷-۱)^۲}=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=\sqrt{۶۴}=۸$$

اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک داخلی دو دایره

$$AB=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۱۰^۲-(۷+۱)^۲}=\sqrt{۱۰۰-۶۴}=\sqrt{۳۶}=۶$$

***

تمرین۱۳ : دو دایره‌ی $C(O,۹)$ و $C'(O',۴)$ مماس بیرونی هستند. اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک خارجی آنها را بدست آورید.

حل: چون دو دایره مماس خارجی هستند، پس:

$$d=R+R'=۹+۴=۱۳$$

لذا اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک خارجی دو دایره

$$AB=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۱۳^۲-(۹-۴)^۲}=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

***

تمرین ۱۴ : با استفاده از دستور محاسبه‌ی طول پاره خط مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس بیرونی $AB=۲\sqrt{RR'}$

حل : در دو دایره مماس خارجی $d=OO'=R+R'$ پس :

$$AB=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{(R+R')^۲-(R-R')^۲}$$

$$=\sqrt{(R^۲+۲RR'+R'^۲)-(R^۲-۲RR'+R'^۲)}=\sqrt{۴RR'}=۲\sqrt{RR'}$$

***

تمرین۱۵ : طول خط المرکزین دو دایره به شعاع های ۸ و ۳ برابر ۱۳ می باشد. اگر اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک خارجی آنها برابر $۵m-۳$ باشد. مقدار m را بیابید.

حل :

$$AB=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}$$
$$\to ۵m-۳=\sqrt{۱۳^{۲}-(۸-۳)^{۲}} \to ۵m-۳=\sqrt{۱۶۹-۲۵} \to ۵m-۳=۱۲ \to m=۳$$

***

تمرین۱۶: دو دایره‌ی $C(O,۲x+۲)$ و $C'(O',x)$ مماس خارجی هستند. اگر طول خط المرکزین $d=۴x+۱$ باشد. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید.

حل: چون دو دایره مماس خارجی هستند، پس:

$$d=R+R' \to ۴x+۱=(۲x+۲)+x \to x=۱$$
$$\to \begin{cases} R=۲x+۲=۲(۱)+۲=۴ \\ R'=x=۱ \\ d=۴x+۱=۴(۱)+۱=۵ \end{cases}$$

لذا اندازه‌ی پاره خط مماس مشترک خارجی دو دایره

$$AB=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}=\sqrt{۵^{۲}-(۴-۱)^{۲}}=\sqrt{۲۵-۹}=\sqrt{۱۶}=۴$$

***

تمرین۱۷ : طول شعاع های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

حل : با فرض $R>R'$ می توان نوشت:

مماس مشترک خارجی $\sqrt{۸^{۲}-(R-R')^{۲}}=۳\sqrt{۷} \to ۶۴-(R-R')^{۲}=۶۳ \to R-R'=۱$

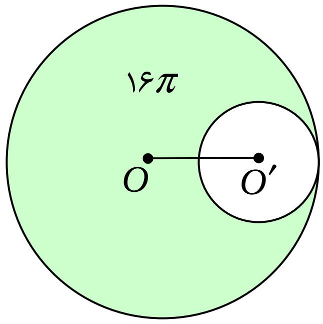
مماس مشترک داخلی $\sqrt{۸^{۲}-(R+R')^{۲}}=\sqrt{۱۵} \to ۶۴-(R+R')^{۲}=۱۵ \to R+R'=۷$

$$\begin{cases} R-R'=۱ \\ R+R'=۷ \end{cases} \to R=۴ \ , \ \ R'=۳$$

***

تمرین۱۸ : طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه‌ی محدود بین آنها ۱۶π سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.

حل : فرض می کنیم، R شعاع دایره‌ی بزرگ و R' شعاع دایره‌ی کوچک باشند. در این صورت:



$$OO' = ۲ \rightarrow R - R' = ۲$$

$$S - S' = \pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۱۶\pi \xrightarrow{\div \pi} R^۲ - R'^۲ = ۱۶$$

$$\rightarrow (R - R')(R + R') = ۱۶$$

$$\rightarrow ۲(R + R') = ۱۶ \rightarrow R + R' = ۸$$

اکنون با حل دستگاه زیر اندازه‌ی شعاع های دو دایره را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} R - R' = ۲ \\ R + R' = ۸ \end{cases} \rightarrow R = ۵ \ , \ \ R' = ۳$$

تمرین برای حل :

۱۹ : دو دایره به شعاع ۱ و ۴ سانتی متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آنها برابر $۳x + ۱$ باشد.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : **www.mathtower.ir**

کانال تلگرام : **@amerimath**

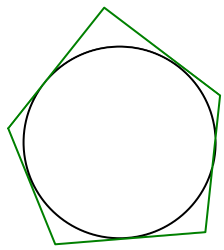
درس سوّم : چندضلعی های محاطی و محیطی

در این درس با دو مفهوم چند ضلعی های محاطی و محیطی و ویژگی های آنها آشنا می شویم.

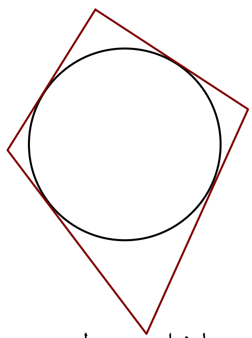
چند ضلعی های محیطی و محاطی

تعریف چند ضلعی محیطی : یک چند ضلعی را محیطی می نامند، هرگاه همه‌ی اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند.

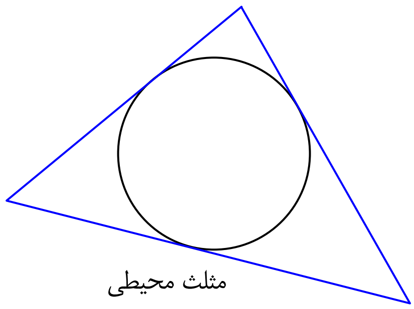
چون تمام اضلاع هر یک ازچند ضلعی های زیر بر یک دایره مماس می باشند، پس محیطی هستند. در هر مورد دایره را محاطی می نامند.



پنج ضلعی محیطی
دایره‌ی محاطی



چهارضلعی محیطی
دایره‌ی محاطی

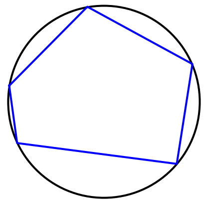


مثلث محیطی
دایره‌ی محاطی

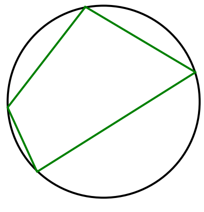
***

تعریف چند ضلعی محاطی: یک چند ضلعی را محاطی می نامند، هرگاه همه‌ی رئوس آن روی دایره واقع باشند.

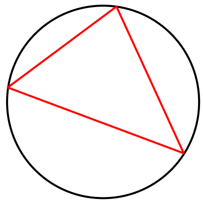
چون تمام رأس های هر یک ازچند ضلعی های زیر روی یک دایره قرار دارند، پس محاطی هستند. در هر مورد دایره را محیطی می نامند.



پنج ضلعی محاطی
دایره‌ی محیطی



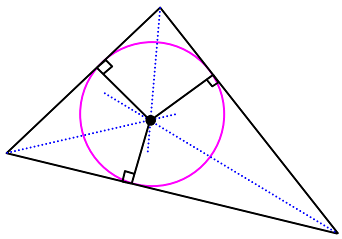
چهارضلعی محاطی
دایره‌ی محیطی



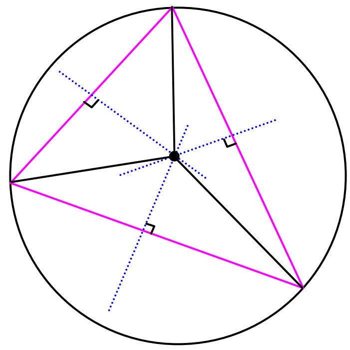
مثلث محاطی
دایره‌ی محیطی

***

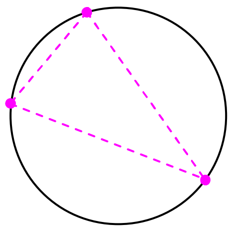
نتیجه:



۱ . نقطه‌ی برخورد نیمساز های زاویه های درونی هر مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است. بنابراین از نقطه‌ی برخورد نیمسازها می توان یک دایره محاط در مثلث رسم کرد. پس هر مثلث همواره بر یک دایره محیط است.



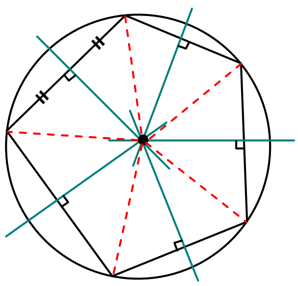
۲ . نقطه‌ی برخورد عمود منصف های اضلاع هر مثلث از سه رأس آن به یک فاصله است. بنابراین از نقطه‌ی برخورد عمود منصف ها می توان یک دایره محیط بر مثلث رسم کرد. پس هر مثلث همواره در یک دایره محاط است.



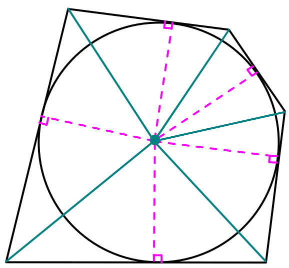
۳ . بر هر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست یک دایره و فقط یک دایره می گذرد.

***

نتیجه : با توجه به موضوع فوق می توان نتیجه های زیر را به اشاره کرد.



الف : یک چندضلعی، محاطی است، اگر و فقط اگر عمودمنصف های همه‌ی اضلاع آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره‌ی محیطی چندضلعی است.

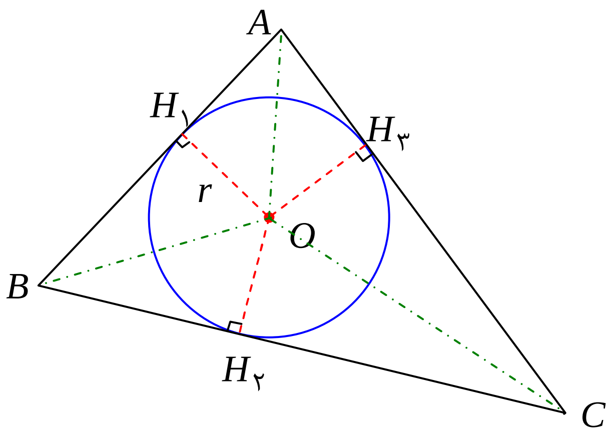


ب : یک چند ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه‌ی نیمسازهای زاویه های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره‌ی محاطی چندضلعی است.

***

دایره‌ی محاطی داخلی مثلث

همانطور که قبل از این داشتیم، به مرکز نقطه‌ی همرسی نیمساز های زاویه های داخلی هر مثلث می توان دایره ای محاط در آن مثلث رسم کرد. در شکل زیر دایره‌ی محاطی در مثلث به مرکز O، و شعاع چون $OH_۱ = OH_۲ = OH_۳ = r$، رسم شده است این دایره را دایره‌ی محاطی داخلی مثلث می نامند و شعاع آن را با r نمایش می دهند.



دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ، دایره ای است که بر هر سه ضلع مثلث مماس باشد.

نتیجه : با توجه به شکل فوق می توان تساوی زیر را برای مساحت مثلث ABC نوشت:

$$S(ABC) = S(AOB) + S(BOC) + S(AOC)$$

$$S = \frac{۱}{۲} AB \times OH_۱ + \frac{۱}{۲} BC \times OH_۲ + \frac{۱}{۲} AC \times OH_۳ = \frac{۱}{۲} r(AB + BC + AC)$$

حال اگر محیط مثلث ABC را با $۲p$ نمایش دهیم، می توان نوشت:

$$S = \frac{۱}{۲} r \times ۲p$$

لذا

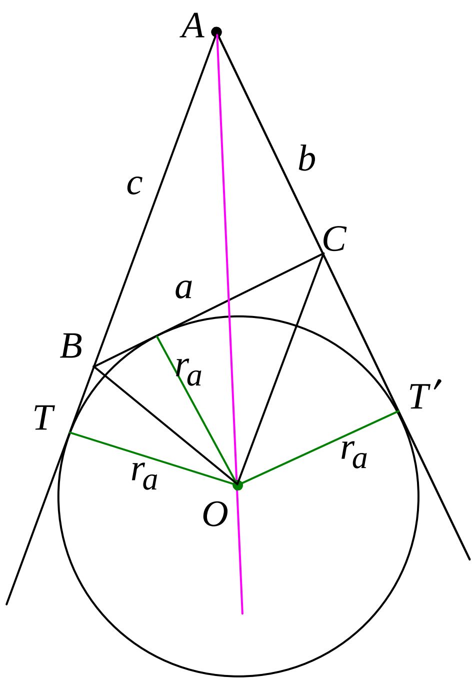
$$S = r\,p$$

تمرین ۱ : ثابت کنید که اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$ است.

حل : در هر مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a داریم: $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ و $۲p = ۳a$، پس

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

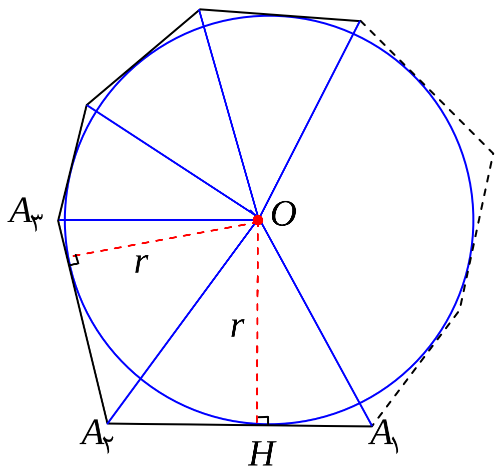
دایره‌ی محاطی خارجی مثلث



مطابق شکل زیر، اگر نیمساز زاویه‌ی A از مثلث ABC را رسم کنیم. نیمساز زاویه‌ی خارجی C را در نقطه ای مانند O قطع می کند. این نقطه از خط BC و خط های AC و AB به یک فاصله است.چرا؟ بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A می نامند. شعاع این دایره را با r_a نشان می دهند. به همین ترتیب دو دایره‌ی محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.

دایره‌ی محاطی خارجی مثلث، دایره ای است که بر یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر مماس باشد.

تمرین ۲ : نشان دهید که مساحت هر چند ضلعی محیطی، با حاصل ضرب شعاع دایره‌ی محاطی در نصف محیط چندضلعی برابر است.



حل: اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $۲P$ شعاع دایره محاطی برابر r باشد. می خواهیم نشان دهیم که $S = rP$

مطابق شکل، مرکز دایره‌ی محاطی را به رئوس چندضلعی وصل نموده تا n مثلث تشکیل شود. طول ارتفاع همه‌ی این مثلث ها برابر شعاع دایره‌ی محاط در چندضلعی محیطی است. پس :

$$S_t = S_{OA_۱A_۲} + S_{OA_۲A_۳} + \dots + S_{OA_nA_۱}$$

$$\to S_t = \frac{۱}{۲} r \times A_۱A_۲ + \frac{۱}{۲} r \times A_۲A_۳ + \dots + \frac{۱}{۲} r \times A_nA_۱$$

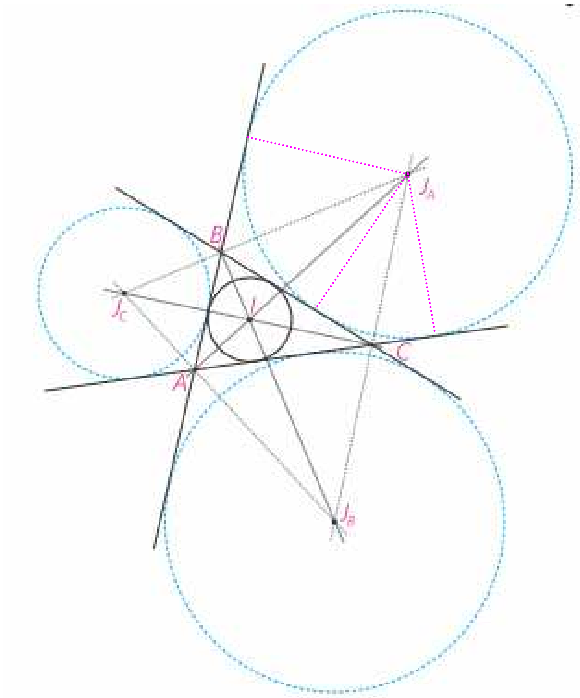
$$\to S_t = \frac{۱}{۲} r \times (A_۱A_۲ + A_۲A_۳ + \dots + A_nA_۱) = \frac{۱}{۲} r \times (۲P) = rP$$

تمرین۳ : با توجه به مفهوم دایره‌ی محاطی خارجی ، ثابت کنید.

الف) $S = r_a(p-a)$ و $r_a = \dfrac{S}{p-a}$

ب) $S = r_b(p-b)$ و $r_b = \dfrac{S}{p-b}$

ج) $S = r_c(p-c)$ و $r_c = \dfrac{S}{p-c}$



حل : کافی است، حالت الف را ثابت کنیم. اثبات حالت های دیگر نیز به همین صورت انجام می شود.

$$S(\Delta ABC) = S(\Delta OAC) + S(\Delta OAB) - S(\Delta OBC)$$

اگر مساحت مثلث ABC را با S نشان دهیم،

$$S = \frac{۱}{۲} r_a AC + \frac{۱}{۲} r_a AB - \frac{۱}{۲} r_a BC$$

$$S = \frac{۱}{۲} r_a (AC + AB - BC) = \frac{۱}{۲} r_a (b + c - a)$$

اگر محیط مثلث را با $۲p$ نشان دهیم،

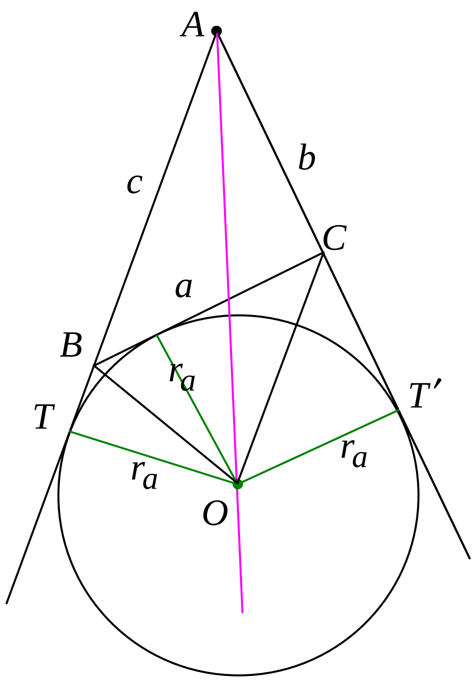
داریم. $۲p = a + b + c$ پس $b + c = ۲p - a$

$$S = \frac{۱}{۲} r_a (۲p - a - a) = \frac{۱}{۲} r_a (۲p - ۲a)$$

در نتیجه

$$S = r_a (p - a)$$

بنابراین:



$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

تمرین برای حل :

تمرین ۴ : ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی برابر نصف وتر است.

تمرین ۵ : طول اضلاع مثلثی ۵ و ۱۲ و ۱۳ است. اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی آن را بدست آورید.

تمرین ۶ : یک مثلث متساوی الاضلاع در یک دایره به شعاع R محاط شده است. ثابت کنید که مساحت این مثلث برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^{۲}$ است.

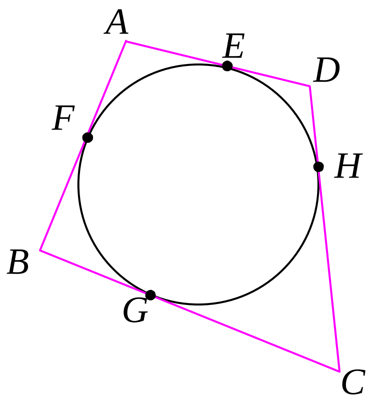
تمرین ۷ : در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $۲\sqrt{۳}$، اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی خارجی و اندازه شعاع دایره‌ی محیطی را به دست آورید.

***

چهارضلعی های محاطی و محیطی

برخلاف مثلث، همه‌ی چندضلعی های دیگر، لزوماً محاطی و محیطی نیستند.در این قسمت به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهارضلعی می پردازیم.

قضیه : مجموع دو ضلع مقابل هر چهار ضلعی محیطی با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.



حکم : $AB+CD=AD+BC$

اثبات: پیشتر داشتیم که اگر از یک نقطه‌ی بیرون دایره، دو مماس بر دایره رسم کنیم، اندازه های این دو مماس برابر است.

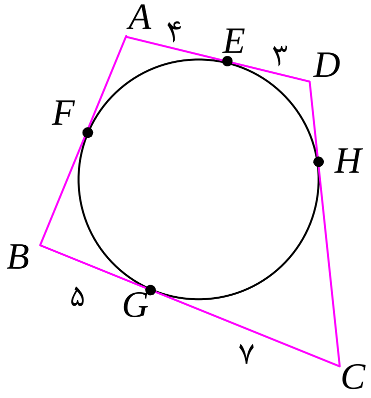
$$AF=AE$$
$$BF=BG$$
$$DH=ED$$
$$CH=CG$$

$$+)\overline{\quad AF+BF+DH+CH=AE+BG+ED+CG \quad}$$

$$\underbrace{AF+BF}_{AB}+\underbrace{DH+CH}_{CD}=\underbrace{AE+ED}_{AD}+\underbrace{BG+CG}_{BC}\rightarrow AB+CD=AD+BC$$

***

تمرین۸: با توجه به شکل مقابل محیط چهارضلعی را بدست آورید.



حل:

$$AB+CD=AD+BC$$
$$AD+BC=۴+۳+۵+۷=۱۹$$

حال محیط را به شکل زیر محاسبه می کنیم.

$$
\begin{aligned}
&۲P = AB + BC + CD + AD \\
&= (AB + CD) + (AD + BC) = ۲(AD + BC) = ۲(۱۹) = ۳۸
\end{aligned}
$$

***

تمرین ۹ : اندازه های سه ضلع مجاور از یک چهار ضلعی محیطی به ترتیب ۷ و ۱۱ و ۱۶ سانتی متر است. اندازه‌ی ضلع چهارم آن را تعیین کنید.

حل: فرض می کنیم که اندازه‌ی ضلع چهارم برابر x باشد. پس اندازه های اضلاع این چهارضلعی به ترتیب به صورت ۷ و ۱۱ و ۱۶ و x می باشند. لذا:

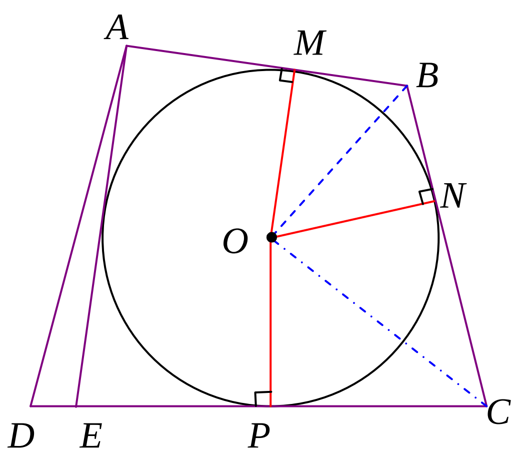
$$x + ۱۱ = ۱۶ + ۷ \rightarrow x = ۱۲$$

***

قضیه (عکس قضیه قبل) : هر چهار ضلعی که مجموع دو ضلع مقابل آن با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر باشند، بر یک دایره محیط است.

اثبات:

نیمساز های دو زاویه‌ی B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می کنند. با توجه به ویژگی نیمساز زاویه نقطه‌ی O از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است. لذا $OM = ON = OP$



اکنون دایره ای به مرکز O و شعاع OM رسم می کنیم. این دایره بر اضلاع AB و BC و CD مماس است. حال اگر این دایره بر AD مماس باشد که حکم ثابت است و چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.

امّا اگر این دایره بر AD مماس نباشد، از A بر آن مماسی رسم می کنیم تا خط CD را در نقطه ای مانند E قطع کند. در این صورت نقطه‌ی E بین نقاط P و D یا نقطه‌ی D بین نقاط E یا P واقع می شود. پس چهارضلعی $ABCE$ محیطی است و $AB + EC = AE + BC$ پس

$$AB - BC = AE - EC \quad (۱)$$

اگر فرض قضیه، یعنی $AB + DC = AD + BC$ را به صورت زیر بنویسیم

$$AB - BC = AD - DC \quad (۲)$$

از روابط (۲) و (۱) خواهیم داشت:

$$AE - EC = AD - DC$$

پس :

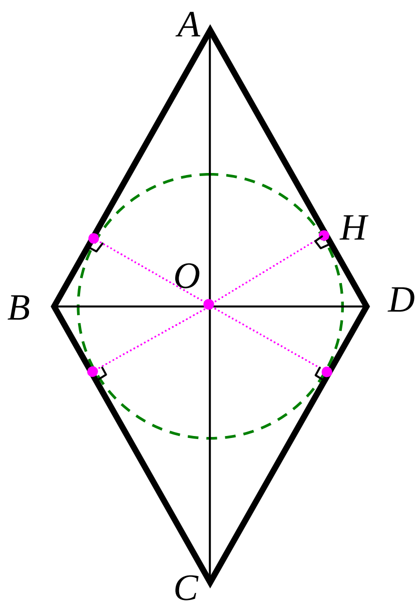
$$AD = AE - EC + DC = AE + DE$$

این رابطه امکان ندارد. (چرا؟) پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.

اثبات به روشی دیگر :

این قضیه را در دو حالت زیر ثابت می کنیم.

اثبات: در حالتی که چهارضلعی مورد نظر لوزی باشد.



چون قطر های لوزی نیمساز زاویه های متناظر آن نیز می باشند، پس نقطه‌ی O محل تقاطع قطرها از هر ضلع لوزی به یک فاصله است، لذا به مرکز O و شعاع OH (پاره خط عمود بر ضلع AB) دایره ای رسم می کنیم. این دایره بر تمام اضلاع لوزی مماس خواهد شد. بنابر این هر لوزی محیطی است.

اثبات: در حالتی که چهارضلعی مورد نظر لوزی نباشد.

فرض کنیم که در چهارضلعی $ABCD$ داشته باشیم :

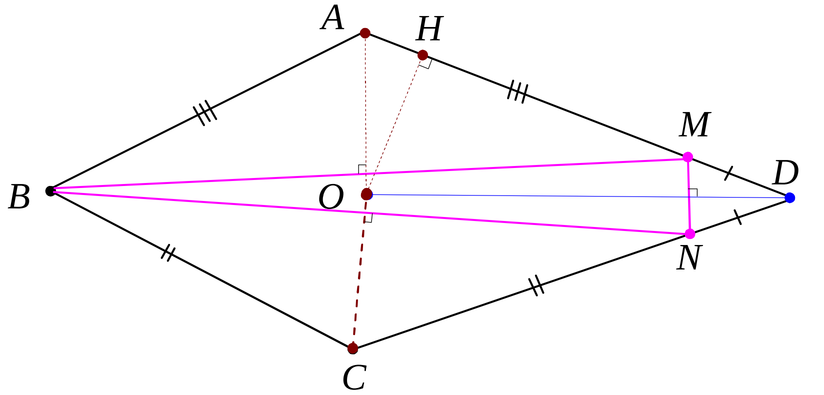
$$AB + CD = BC + AD \text{ و } AD > AB \text{ و } CD > BC$$

لذا : $CD - BC = AD - AB$

اکنون $AM = AB$ را بر AD و $CN = BC$ را بر CD جدا می کنیم. با توجه به رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

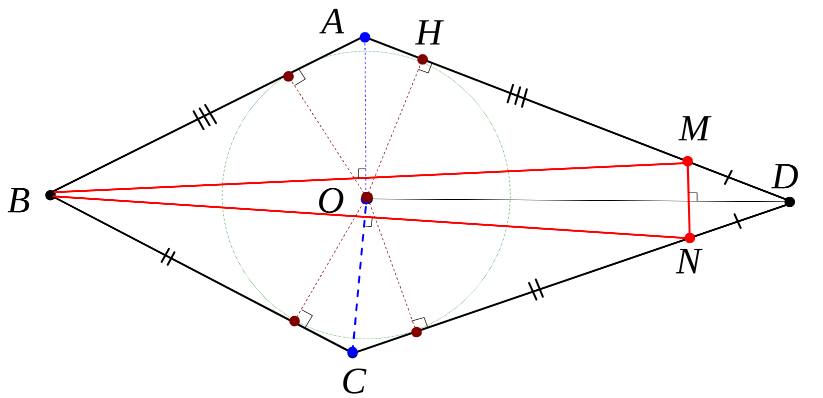
$CD-BC=AD-AB$

$\xrightarrow{BC=CN,AB=AM} CD-CN=AD-AM \to ND=MD$



چون نقاط B و N و M بر یک استقامت نیستند، پس از وصل کردن آنها یک مثلث به نام BMN پدید می آید. چون مثلث ABM متساوی الساقین است، پس نیمساز زاویه‌ی A عمود منصف قاعده‌ی BM است و به همین ترتیب چون مثلث BCN متساوی الساقین است، پس نیمساز زاویه‌ی C عمود منصف قاعده ی BN است. از طرفی چون مثلث DMN متساوی الساقین است، پس نیمساز زاویه‌ی D عمود منصف قاعده‌ی MN است.

این عمود منصف ها همدیگر را در یک نقطه مانند O قطع می کنند و نقطه‌ی O از اضلاع زاویه های مذکور از مثلث های نامبرده به یک فاصله است. پس نقطه‌ی O از چهار ضلع چهار ضلعی $ABCD$ به یک فاصله است. به مرکز O و شعاع OH دایره ای رسم می کنیم. این دایره بر همه‌ی اضلاع چهارضلعی مماس می شود. بنابر این چهارضلعی محیطی است.

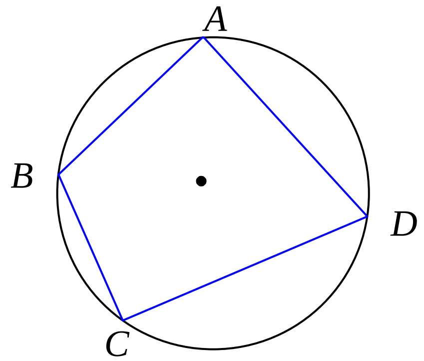


***

تمرین ۱۰ : دو چهارضلعی نام ببرید که همواره بر یک دایره محیط باشند.

حل: طبق خاصیت تساوی مجموع اندازه های دو ضلع مقابل در یک چهارضلعی محیطی این دو چهارضلعی می توانند، **مربع** و **لوزی** باشند.

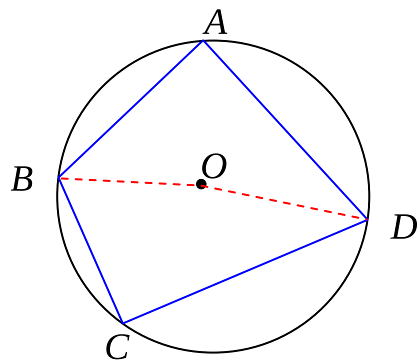
قضیه : در هر چهار ضلعی محاطی زاویه های مقابل مکمل یکدیگرند.



حکم : $\angle A+\angle C=۱۸۰^\circ$

$\angle B+\angle D=۱۸۰^\circ$

اثبات: مرکز دایره را به رئوس B و D وصل می کنیم. چون زاویه های BAC و BCD محاطی هستند، پس:



$$\angle A=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲}$$

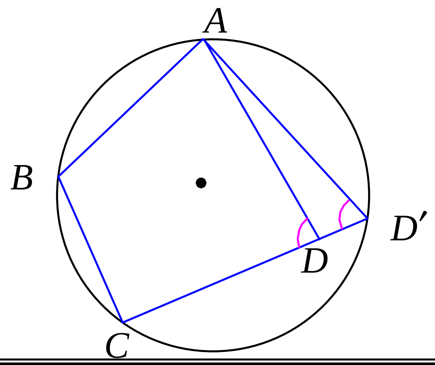
$$\angle C=\frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲}$$

$$\angle A+\angle C=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{DAB}}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰^\circ$$

و به همین ترتیب ثابت می شود که $\angle B+\angle D=۱۸۰^\circ$

***

قضیه (عکس قضیه قبل) : هر چهار ضلعی که زاویه های مقابل آن مکمل یکدیگر باشند، یک چهار ضلعی محاطی است.



اثبات: می دانیم که از هر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست یک دایره می گذرد. حال نشان می دهیم که دایره ای که از نقاط A و B و C می گذرد، از نقطه‌ی D نیز می گذرد. اگر این دایره از رأس D نگذرد (برهان خلف)

نقطه‌ی برخورد خط CD یا امتداد آن با دایره را D' می نامیم و از نقطه‌ی D' به A وصل می کنیم.

چهارضلعی $ABCD'$ محاطی است، پس $\angle B + \angle D' = ۱۸۰^\circ$.

از طرفی طبق فرض داشتیم $\angle B + \angle D = ۱۸۰^\circ$ لذا $\angle D = \angle D'$

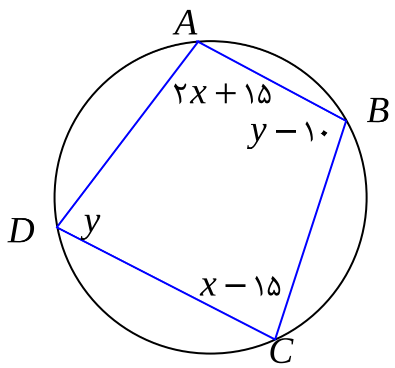
حال چون زاویه‌ی D زاویه‌ی خارجی مثلث ADD' . بنابراین $\angle D > \angle D'$ و این با نتیجه‌ی فوق متناقض است. لذا دایره از رأس D می گذرد.

تمرین ۱۱ : دو چهار ضلعی نام ببرید که همواره در یک دایره محاط باشند.

حل: طبق خاصیت مکمل بودن زاویه های روبرو در چهار ضلعی محاطی این دو چهار ضلعی می توانند **مربع و مستطیل** باشند.

***

تمرین۱۲: با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی x و y را پیدا کنید.



حل: چون در چهار ضلعی محاطی زاویه های روبرو مکمل یکدیگرند.

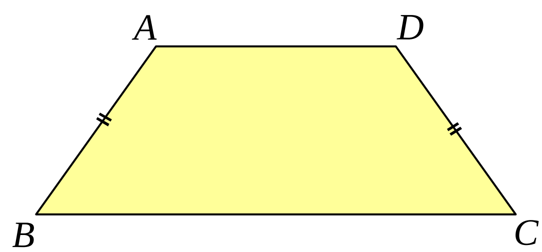
پس:

$$\angle A + \angle C = ۱۸۰^\circ \rightarrow ۲x + ۱۵ + x - ۱۵ = ۱۸۰ \rightarrow x = ۶۰$$

$$\angle B + \angle D = ۱۸۰^\circ \rightarrow y + y - ۱۰ = ۱۸۰ \rightarrow y = ۹۵$$

تمرین۱۳ : ثابت کنید، یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

حل : این قضیه دو شرطی است، لذا در دو حالت زیر اثبات می شود.



حالت اوّل :

حکم : $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=۱۸۰^\circ$ فرض : $AD \parallel BC$ و $AB=CD$

برهان :

$AB=CD \Rightarrow \angle A=\angle D \quad (۱)$

مورب AB و $AD \parallel BC \Rightarrow \angle A+\angle B=۱۸۰^\circ$

$\xrightarrow{(۱)} \angle D+\angle B=۱۸۰^\circ$

به روش مشابه ثابت می شود $\angle A+\angle C=۱۸۰^\circ$

حالت دوّم :

حکم : $AB=CD$ فرض: $AD \parallel BC$ و $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=۱۸۰^\circ$

برهان :

مورب AB و $AD \parallel BC \Rightarrow \angle A+\angle B=۱۸۰^\circ$

$\angle D+\angle B=۱۸۰^\circ \xrightarrow{(۱)} \angle A+\angle B=\angle D+\angle B$

$\Rightarrow \angle A=\angle D \Rightarrow AB=CD$

تمرین۱۴ : جدول زیر را با چندضلعی های زیر کامل کنید.

مستطیل ، لوزی ، مثلث ، مربع ، ذوزنقه ، ذوزنقه متساوی الساقین ، کایت

چندضلعی محیطی				
چندضلعی محاطی				

***

تمرین۱۵ : ثابت کنید که هر چندضلعی منتظم[1] ، هم محاطی و هم محیطی است.

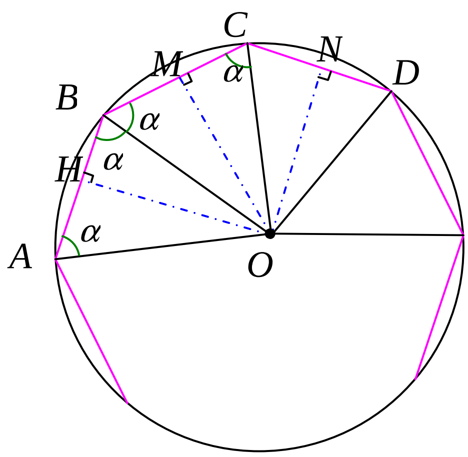
حل : فرض کنید ، اندازه‌ی هر زاویه‌ی n منتظم ....$ABCD$ برابر ۲α باشد. عمود منصف های دو ضلع AB و BC را رسم می کنیم. این عمود منصف ها در نقطه ای مانند O متقاطع هستند. بنابراین :

$$OA=OB=OC$$

[1]. هر چندضلعی محدب که تمام اضلاع آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز هم اندازه باشند را چندضلعی منتظم می نامند. مانند مثلث متساوی الاضلاع و مربع که به ترتیب سه ضلعی منتظم و چهارضلعی منتظم هستند.

پس دو مثلث OAB و OBC به حالت تساوی سه ضلع هم نهشت هستند.(چرا؟) در نتیجه

$$\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \alpha$$



اکنون نقطه‌ی D را به O وصل می کنیم. زاویه‌ی OCD برابر α است؟ (چرا؟) لذا دو مثلث OCD و OCB به حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین آنها هم نهشت هستند و این یعنی

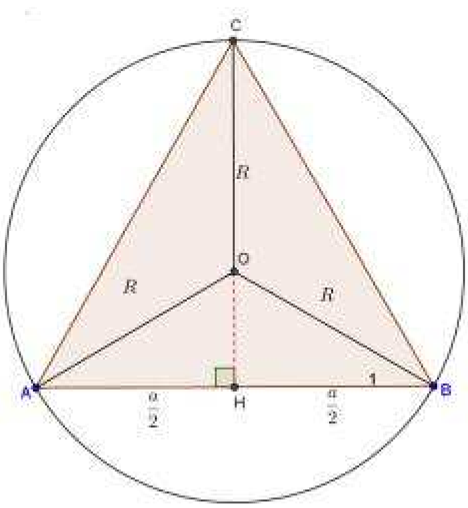
$$OA = OB = OC = OD$$

با ادامه‌ی این روند داریم $OA = OB = OC = OD = ...$ و $OH = ON = OM = ...$ بنابراین نقطه‌ی O از همه‌ی رأس ها به یک فاصله است. پس مرکز دایره ای است که از تمام رأس های n شلعی منتظم می گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع ها به یک فاصله است، پس دایره‌ای است که بر تمام ضلع های n ضلعی منتظم مماس است.

***

تمرین۱۶: یک مثلث متساوی الاضلاع در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد. مساحت آن را بر حسب R به دست آورید.



$$\Delta(OBH): \angle H = ۹۰^\circ \quad , \quad \angle B_۱ = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰^\circ$$

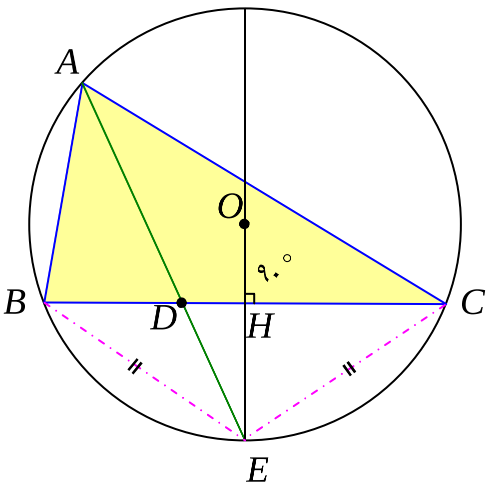
$$\cos ۳۰^\circ = \frac{BH}{OB} \rightarrow BH = OB.\cos ۳۰^\circ \rightarrow \frac{a}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} R$$

$$\Rightarrow a = R\sqrt{۳} \Rightarrow S(\Delta ABC) = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(R\sqrt{۳})^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴} R^۲$$

تمرین۱۷ : یک مثلث متساوی الاضلاع در دایره ای به شعاع $۲\sqrt{۳}$ محاط شده باشد. مساحت آن را به دست آورید.

***

تمرین۱۸ : ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه‌ی مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث قطع می کنند.



حل : فرض کنیم، عمود منصف ضلع BC دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در نقطه‌ی E قطع کند. حال باید ثابت کنیم که AE نیمساز زاویه‌ی BAC مقابل به ضلع BC است. چون هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

پس $BE = CE$ و این یعنی $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$

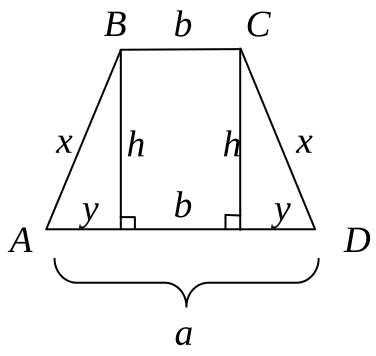
پاره خط AE را رسم نموده تا دو زاویه‌ی محاطی $\angle CAE$ و $\angle BAE$ تشکیل شود:

$$\left.\begin{array}{l} \angle BAE = \dfrac{\overset{\frown}{BE}}{۲} \\ \angle CAE = \dfrac{\overset{\frown}{CE}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}} \angle BAE = \angle CAE$$

پس AE همان نیمساز زاویه‌ی A می باشد. لذا می توان گفت که عمود منصف ضلع BC و نیمساز زاویه‌ی مقابل به آن ضلع، یکدیگر را در نقطه‌ی E روی دایره‌ی محیطی مثلث قطع می کنند.

***

تمرین۱۹ : یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی، ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده‌ی آن ضربدر میانگین هندسی آنها



حل : چون ذوزنقه‌ی $ABCD$ محاطی است، پس متساوی الساقین است. پس :

$$AB = CD = x$$

همچنین

$$y + b + y = a \rightarrow ۲y = a - b \rightarrow y = \frac{a-b}{۲}$$

حال چون چهارضلعی $ABCD$ محیطی است. پس :

$$AB + CD = AD + BC \rightarrow ۲x = a + b \rightarrow x = \frac{a+b}{۲}$$

برای محاسبه‌ی مساحت ذوزنقه، ابتدا ارتفاع آن را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$y^۲ + h^۲ = x^۲ \rightarrow h^۲ = x^۲ - y^۲ = (\frac{a+b}{۲})^۲ - (\frac{a-b}{۲})^۲ = \frac{۴ab}{۴} = ab \rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S = \frac{۱}{۲}(a+b)h = \frac{a+b}{۲} \times \sqrt{ab}$$

***

تمرین ۲۰ : اندازه‌ی قاعده های یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین ۴ و ۹ سانتی متر می باشد. مساحت این ذوزنقه را تعیین کنید.

***

تمرین۲۱ : اگر r_a و r_b و r_c شعاع های سه دایره‌ی محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a و h_b و h_c اندازه های سه ارتفاع باشند. نشان دهید:

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

حل : برای دایره‌ی محاطی داخلی مثلث داریم.

$$S = rp \rightarrow r = \frac{S}{p}$$

همچنین برای دایره های محاطی خارجی مثلث داشتیم :

الف) $S = r_a(p-a)$ و $r_a = \dfrac{S}{p-a}$

ب) $S = r_b(p-b)$ و $r_b = \dfrac{S}{p-b}$

ج) $S = r_c(p-c)$ و $r_c = \dfrac{S}{p-c}$

پس :

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\frac{S}{p-a}} + \frac{1}{\frac{S}{p-b}} + \frac{1}{\frac{S}{p-c}} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S}$$

$$= \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

برای اثبات قسمت دوّم می توان ابتدا روابط زیر را نوشت :

$$S = \frac{1}{2} a \times h_a \rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

$$S = \frac{1}{2} b \times h_b \rightarrow h_b = \frac{2S}{b}$$

$$S = \frac{1}{2} c \times h_c \rightarrow h_c = \frac{2S}{c}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{2S}{a}} + \frac{1}{\frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{2S}{c}} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

***

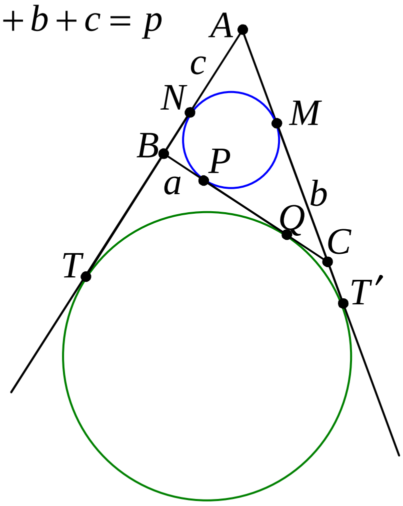
تمرین۲۲ : اگر نقاط تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M و N و P باشند و T و T' نقطه های تماس یک دایره‌ی محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$AM = AN = p - a$ و $BN = BP = p - b$ و $CM = CP = p - c$ و $AT = AT' = p$

حل :

$AB + AC + BC = ۲p \to ۲a + ۲b + ۲c = ۲p \to a + b + c = p$

$$\to \begin{cases} a = p - (b + c) \to BN = BP = p - a \\ b = p - (a + c) \to CM = CP = p - b \\ c = p - (a + b) \to AM = AN = p - c \end{cases}$$



$BT = BQ$ و $CT' = CQ$

$AT + AT' = AB + BT + AC + CT' = AB + BQ + AC + CQ$

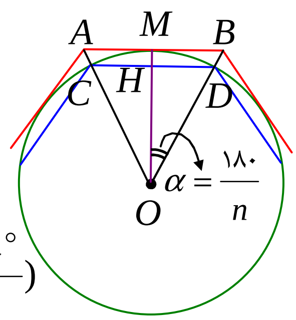
$= AB + AC + BC = ۲p$

$AT = AT' \to AT + AT' = ۲AT = ۲p \to AT = AT' = p$

تمرین۲۳ : یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلع های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه

$$CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n} \quad \text{و} \quad AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$$

حل :



$$\angle AOB = \frac{۳۶۰^\circ}{n} \to \angle AOM = \angle BOM = \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$\Delta(OAM); \angle M = ۹۰^\circ \to \tan(\alpha) = \frac{AM}{OM}$$

$$\to ۲AM = ۲OM \times \tan(\alpha) \xrightarrow{AB = ۲AM} AB = ۲r \times \tan(\frac{۱۸۰^\circ}{n})$$

$$\angle COD = \frac{۳۶۰^\circ}{n} \to \angle COH = \angle DOH = \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$\Delta(OCH);\angle H=۹۰^\circ \rightarrow \sin(\alpha)=\frac{CH}{OC}$$

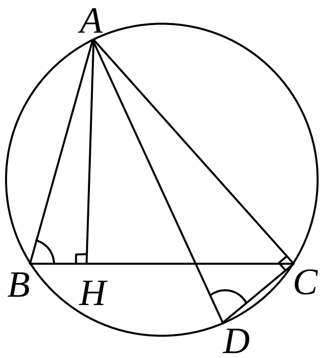
$$\rightarrow ۲CH=۲OC\times\sin(\alpha)\xrightarrow{۲CH=CD} CD=۲r\times\sin(\frac{۱۸۰^\circ}{n})$$

***

تمرین ۲۴ : ثابت کنید در مثلث ABC، اگر S مساحت مثلث و R شعاع دایره‌ی محیطی آن باشد، آنگاه

$$R=\frac{abc}{۴S}$$

اثبات: فرض می کنیم که زاویه‌ی B حاده باشد. دایره‌ی محیطی مثلث ABC، ارتفاع AH و قطر AD را رسم می کنیم. از D به C وصل می کنیم. زاویه‌ی ACD محاطی مقابل به قطر AD است. پس



$$\angle ACD=۹۰^\circ$$

از طرف دیگر دو زاویه‌ی B و D محاطی مقابل به کمان AC هستند.

در نتیجه :

$$\angle B=\angle D=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

پس دو مثلث ACD و AHB به حالت تساوی دو زاویه متشابه اند. بنابراین:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AH}=\frac{DC}{BH}$$

یا

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AH}\rightarrow AB\times AC=AD\times AH$$

از طرف دیگر $AH=\frac{۲S}{BC}$: پس

$$AB\times AC=AD\times\frac{۲S}{BC}$$

و چون $AD=۲R$: پس

$$R=\frac{AB\times AC\times BC}{۴S}$$

یا

$$R=\frac{abc}{۴S}$$

***

تمرین برای حل :

۲۵ : ثابت کنید که اگر در یک چهارضلعی محدب، یک قطر عمود منصف قطر دیگر باشد، آن چهارضلعی محیطی است.

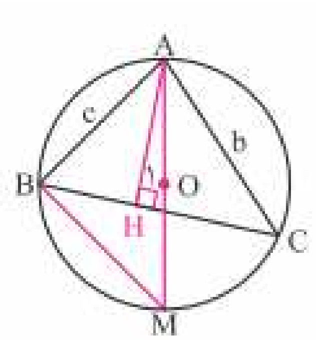
۲۶ : مساحت مثلث متساوی الاضلاعی برابر $۹\sqrt{۳}$ است. اندازه‌ی ضلع و اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن را به دست آورید.

۲۷ : دایره ای به شعاع ۵ سانتی متر در یک شش ضلعی منتظم محاط و بر یک شش ضلعی منتظم دیگری محیط شده است. اندازه‌ی ضلع هر یک از این شش ضلعی ها را به دست آورید.

***

تمرین ۲۸ : ثابت کنید که حاصل ضرب اندازه های دو ضلع از هر مثلث برابر است با حاصل ضرب قطر دایره‌ی محیطی آن مثلث در ارتفاع وارد بر ضلع سوم، است.

حل : از رأس A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می دهیم تا دایره را در M قطع کند و از M به B وصل می کنیم. واضح است که :



$$\angle ABM=\frac{\overset{\frown}{ACM}}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{r}\angle ABM=\angle H_۱=۹۰^\circ\\ \angle M=\angle C=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{array}\right\}\rightarrow \Delta(ABM)\approx\Delta(AHC)\rightarrow\frac{AB}{AH}=\frac{AM}{AC}$$

$$\rightarrow\frac{c}{h_a}=\frac{۲R}{b}\rightarrow b.c=۲R.h_a$$

تمرین ۲۹ : درون دایره ای مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۶ محاط شده، شعاع دایره را بیابید.

حل : با توجه اینکه ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ می باشد، پس :

$$h_a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \xrightarrow{a=۶} h_a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶)=۳\sqrt{۳}$$

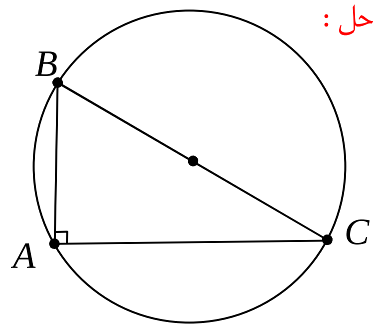
$$b.c=۲R.h_a \to (۶)(۶)=۲R.(۳\sqrt{۳}) \to R=\frac{۳۶}{۶\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

تمرین ۳۰ : درون دایره ای مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع ۳ و۴ محاط شده است.

الف : شعاع دایره‌ی محیطی مثلث را محاسبه کنید.

ب : مساحت و محیط مثلث را بیابید.

حل :



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \xrightarrow{AB=۳\ ,\ AC=۴} BC=۵$$

$$AB\times AC=BC\times h_a \to ۳\times ۴=۵\times h_a \to h_a=\frac{۱۲}{۵}$$

$$AB\times AC=۲R\times h_a \to ۲R=۵ \to R=\frac{۵}{۲}$$

مساحت مثلث $S=\pi R^۲=\pi(\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۲۵}{۴}\pi$

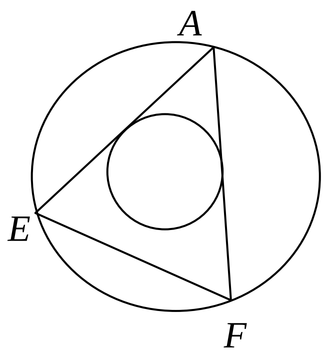
محیط مثلث $۲P=۲\pi R=۲\pi(\frac{۵}{۲})=۵\pi$

روش دوم : می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه، وتر مثلث همان قطر دایره‌ی محیطی آن است. یعنی :

$$R=\frac{BC}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

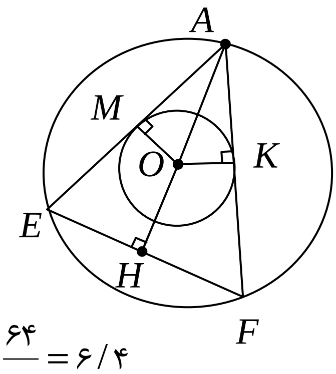
تمرین ۳۱ : شعاع های دو دایره‌ی هم مرکز ۵ و۳ است. از نقطه‌ی A روی دایره‌ی بزرگ تر دو وتر AE و AF را مماس بر دایره‌ی کوچک تر رسم کنیم. اندازه‌ی EF کدام است؟

۱) ۴/۸ ۲) ۶/۴ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۲/۸



حل: در مثلث قائم الزاویه OAK داریم،

$$OA^{۲}=AK^{۲}+OK^{۲}\to ۵^{۲}=AK^{۲}+۳^{۲}\to AK^{۲}=۱۶\to AK=۴$$



$$AF=AE=۲AK=۲AM=۲\times ۴=۸$$

$$AE\times AF=۲R\times AH\leftarrow ۸\times ۸=۲(۵)\times AH\to AH=\frac{۶۴}{۱۰}=۶/۴$$

$$\Delta(AEH):\ AE^{۲}=AH^{۲}+EH^{۲}\to ۸^{۲}=(۶/۴)^{۲}+EH^{۲}\to EH=۴/۸$$

$$EF=۲EH=۲\times ۴/۸=۹/۶$$

$$AF=AE=۲AK=۲AM=۲\times ۴=۸$$

$$AE\times AF=۲R\times AH\to ۸\times ۸=۲(۵)\times AH\to AH=\frac{۳۲}{۵}$$

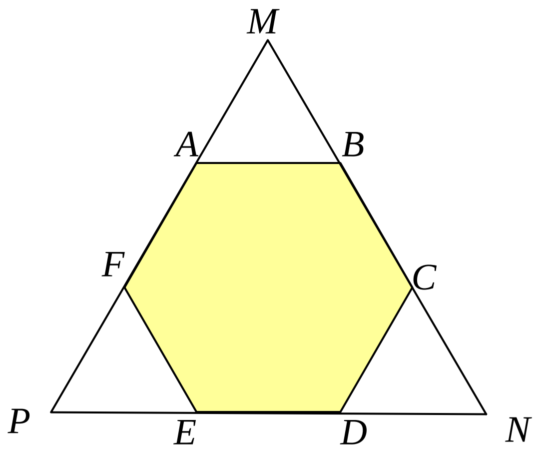
***

توجه : سایر تمرین ها برای مطالعه است.

تمرین ۳۲ : شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم.

الف : نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

ب : نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوّم مساحت مثلث MNP است.

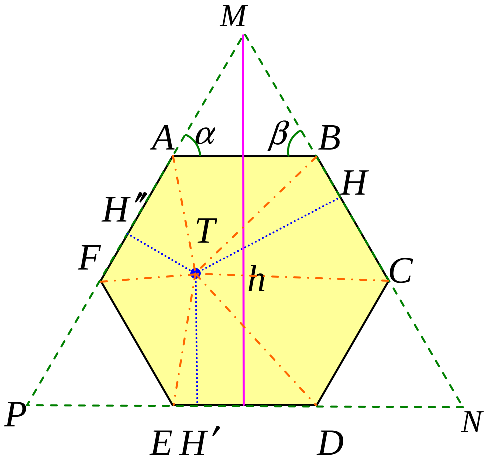


پ : از نقطه‌ی دلخواه Tدرون شش ضلعی عمودهای TH و TH' و TH'' را به ترتیب بر BC و ED و AF رسم کنید. مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت : مجموع مساحت های مثلث های TBC و TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$

حل :



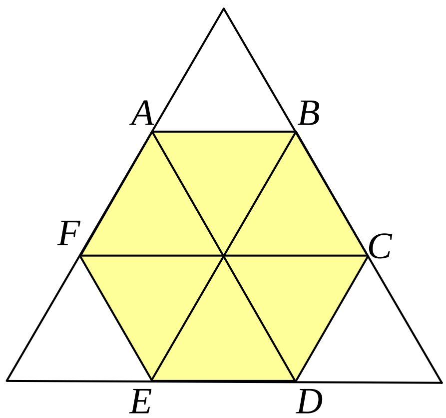
الف :

$$\angle A=\angle B=\dots=\angle F=\frac{(۶-۲)\times ۱۸۰}{۶}=۱۲۰^\circ=\frac{۴\times ۱۸۰}{۶}=۱۲۰^\circ \rightarrow \angle\alpha=\angle\beta=۶۰^\circ$$

$$\angle M=۶۰^\circ \rightarrow \angle N=\angle P=۶۰^\circ \rightarrow MN=MP=NP$$

ب : بزرگترین قطرهای شش ضلعی تا به شش مثلث همنهشت تقسیم شود.

$$\frac{S(AB..F)}{S(MNP)}=\frac{۶S}{۹S}=\frac{۲}{۳}$$



پ : مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع برابر است با ارتفاع آن مثلث

$$TH+TH'+TH''=h$$

$$S(TBC)+S(TDE)+S(TAF)=\frac{۱}{۲}TH\times BC+\frac{۱}{۲}TH'\times DE+\frac{۱}{۲}TH''\times AF$$

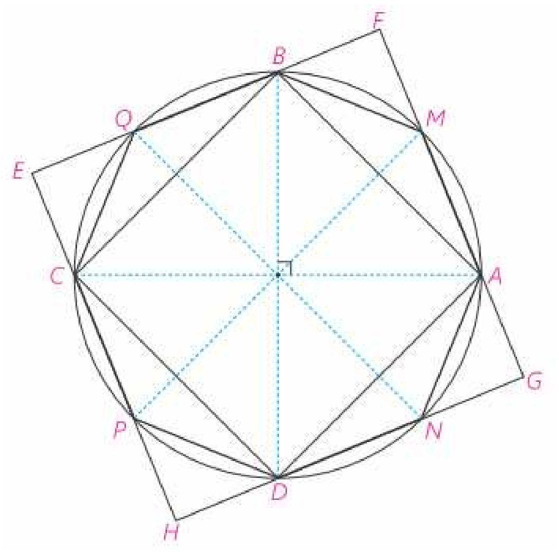
$$=\frac{۱}{۲}TH\times a+\frac{۱}{۲}TH'\times a+\frac{۱}{۲}TH''\times a=\frac{۱}{۲}a\times(TH+TH'+TH'')$$

$$=\frac{۱}{۲}a\times h=S(MNP)$$

به طریق مشابه ثابت می شود:

$$S(TAB)+S(TCD)+S(TEF)=S(MNP)+S(TDE)+S(TAF)$$

$$=S(TAB)+S(TCD)+S(TEF)$$



تمرین۳۳ : دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می کنیم. چهارضـلعی $ABCD$ یک مربع است؟ چرا؟ عمود منصف های ضلع هـای این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کننـد. نـشان دهید، هـشت ضـلعی $AMBQCPDN$ منـتظم است.

حل :

قطرهای چهارضلعی $ABCD$ مساوی ، همدیگر را نصف می کنند و بر هم عمودند، لـذا ایـن چهارضـلعی مربع است.

چهارضلعی $AMBQCPDN$ زاویه های مساوی و همچنین اضلاع مساوی دارد. لذا منتظم است.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام و سروش : @amerimath