



مثال: تابعی مثال بنویسید که حد آن در $-\infty$ برابر ۲ باشد.

آشنایی با مفهوم مشتق



فرض کنید P نقطه ای روی منحنی با طول a باشد. اگر حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ وجود داشته و مقدار آن

برابر m باشد، در این صورت خط مماس بر نمودار f در نقطه P ، خطی است که از نقطه P گذشته و شیب آن برابر m است. در واقع مشتق در یک نقطه برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه مورد نظر است.

در این صورت مقدار این حد را مشتق تابع f در نقطه a مینامیم و با $f'(a)$ نشان می دهیم.



$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{تعریف اول مشتق}$$

اگر مشتق تابع f در نقطه a وجود داشته باشد (حد فوق وجود داشته باشد) میگوییم تابع f در نقطه a مشتق پذیر است.



$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{تعریف دوم مشتق}$$



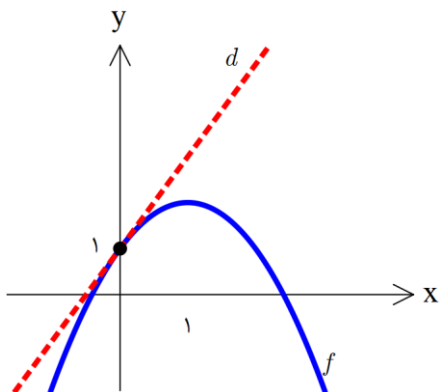


مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = 2x^2 + 3x$ را در $x = 1$ بیابید.

مثال: در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ مقدار $f'(1)$ را با تعریف بیابید.

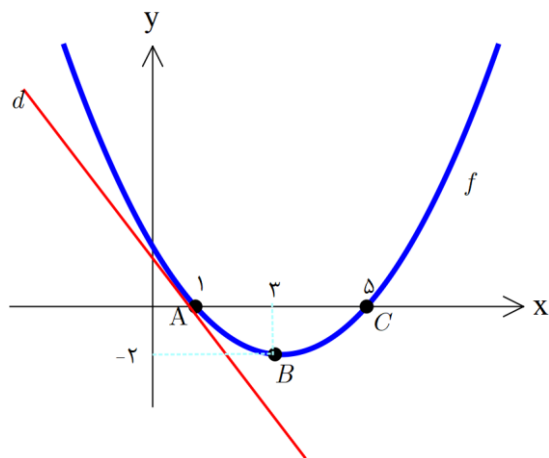
مثال: در شکل روبرو تابع $f(x) = -(x+1)^2 + 2$ رسم شده است.

شیب خط d را بیابید.





مثال: در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار f مماس شده است. تیر ۹۹



الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.

مثال: شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 + 1$ را در نقطه ای به طول $x = 2$ واقع بر منحنی بیابید.

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ را در نقطه $x = 3$ بیابید.





مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد، با استفاده از تعریف، مشتق تابع f را بر حسب x به دست آورید.

مقدار $f'(2)$ را حساب کنید.

مثال: اگر $f(x) = 1 - 2x$ باشد، $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید. دی ۹۷

مثال: مشتق تابع $f(x) = x^2 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x = -1$ به دست آورید.

خرداد ۹۸

مثال: اگر $f(x) = 5x^2 - x + 7$ باشد، ضابطه $f'(x)$ را به دست آورید.





مثال: معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^2 + 4x$ را در نقطه A به طول $x = 1$ واقع بر

نمودار تابع بنویسید.

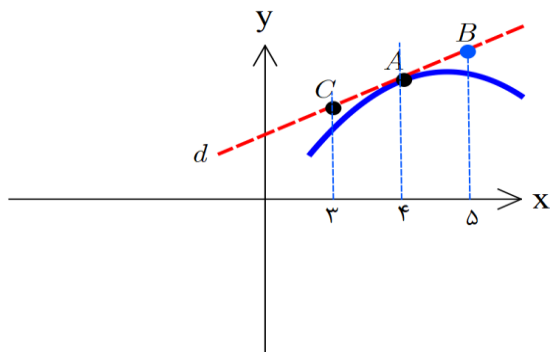
مثال: اگر $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ باشد،

الف) مقدار $f'(3)$ را به دست آورید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی f در نقطه ای به طول ۳ واقع بر آن را بنویسید.

مثال: در شکل مقابل خط d بر نمودار f مماس شده است. اگر $f(4) = 24$, $f'(4) = 1/5$

با توجه به شکل، مختصات نقاط C, B, A را بیابید. دی ۹۷



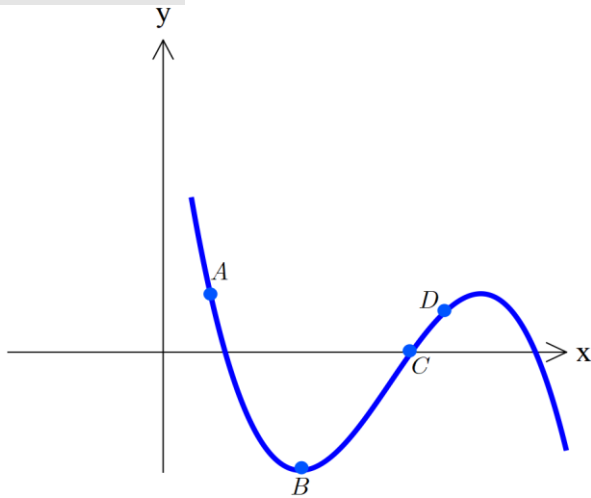
تیر ۹۸





مثال: نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده

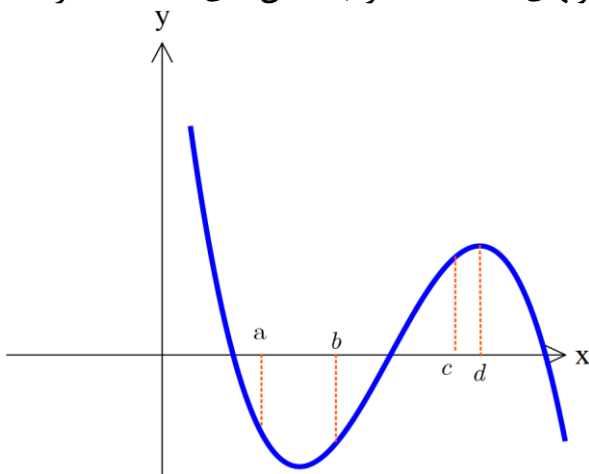
در جدول نظیر کنید. شهریور ۹۸



-۲	$\frac{1}{2}$	۰	۱	مقدار مشتق
				نقطه

مثال: با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل نقاط به طولهای d, c, b, a را با مشتق های داده شده در

جدول نظیر کنید. دی ۹۸



۲	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	مقدار مشتق
				نقطه

مشتق پذیری و پیوستگی



مشتق پذیری در یک نقطه

مشتق تابع در واقع شیب خط مماس بر منحنی است. یعنی اگر تابعی در یک نقطه حد مورد نظر در ابتدای فصل مشتق را داشت، میگوییم تابع در آن نقطه مشتق پذیر است.





پس برای آنکه تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱- تابع در $x = a$ پیوسته باشد.

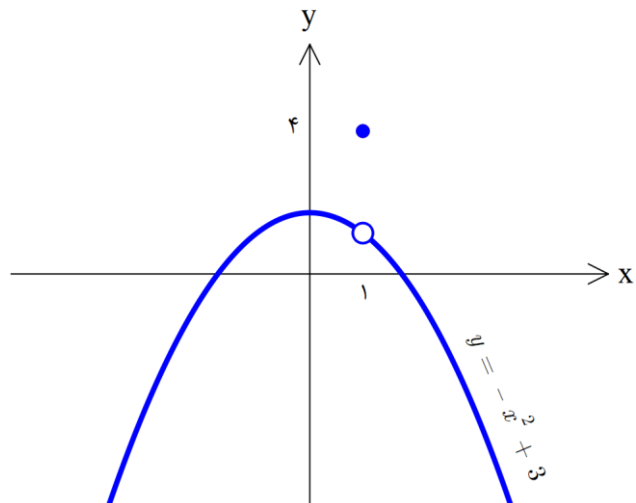
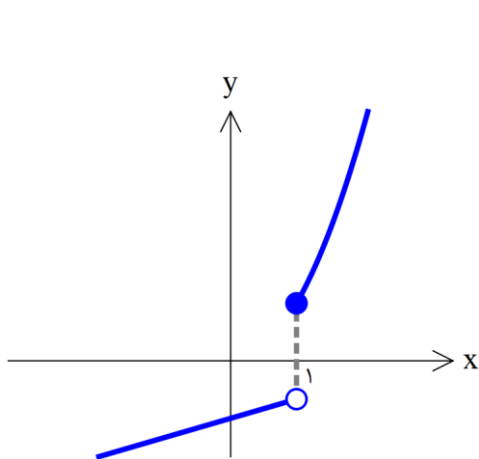
۲- مشتق چپ و راست در $x = a$ موجود و برابر باشند. (منظور از موجود بودن آن است که جواب حدهای فوق عدد شود)

مشتق چپ و مشتق راست

در نقطه $x = a$ شیب نیم مماس چپ را مشتق چپ میگوییم. و به صورت $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ نمایش میدهیم.

در نقطه $x = a$ شیب نیم مماس راست را مشتق راست میگوییم. و به صورت $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ نمایش میدهیم.

مثال: در تابع های رسم شده زیر مشخص کنید در نقطه $x = 1$ تابع مشتق پذیر است؟





مثال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. میخواهیم از روی نمودار تابع و یکبار هم با استفاده از

مشتق تابع، مشتق پذیری تابع در $x = 2$ را بررسی کنیم.

مثال: مشتق پذیری تابع روبرو را در نقطه بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

شهریور ۹۸





مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. خرداد ۹۸

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

نشان دهید که $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست. دی ۹۸





مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = -2$ بررسی کنید.

تیر ۹۹



دلایل مشتق پذیر نبودن تابع

♦ تابع در نقطه مورد نظر پیوسته نیست.

♦ تابع پیوسته است اما مشتق چپ و راست شرایط زیر را دارند:

۱- هر دو موجود ولی نابرابر هستند. (نقطه گوشه ای)

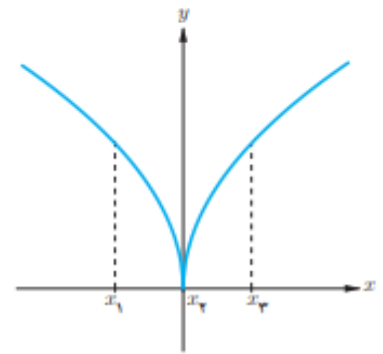
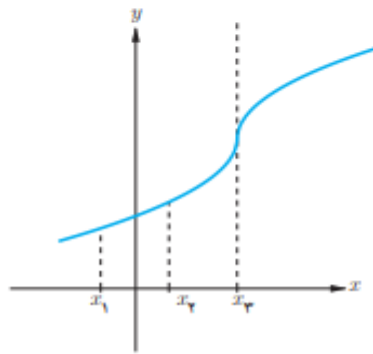
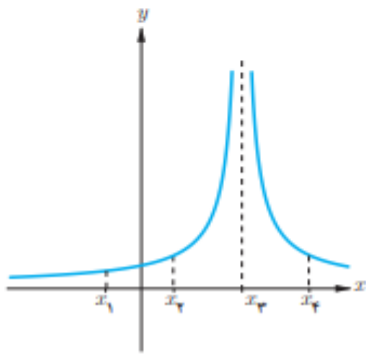
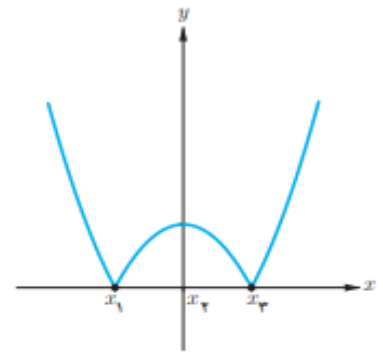
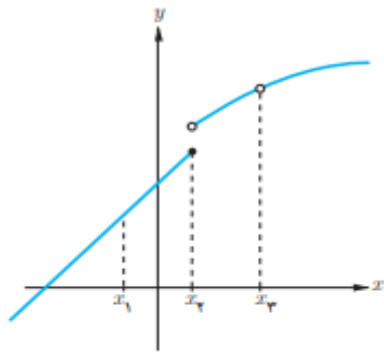
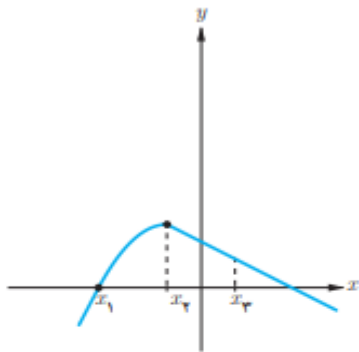
۲- یکی موجود و دیگری نامتناهی است. (نقطه گوشه ای)

۳- هر دو نامتناهی هستند. (مماس قائم)





مثال: در شکل های رسم شده زیر در کدام نقطه یا نقاط تابع مشتق پذیر نیست؟ چرا؟



مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.



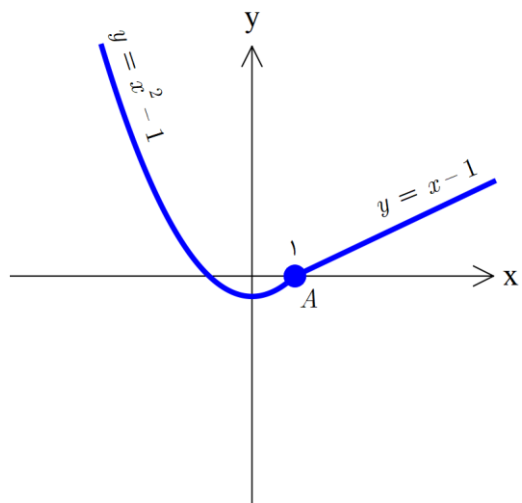


مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید. سپس معادله نیم

مماس راست و نیم مماس چپ را در $x = 2$ بنویسید.

مثال: یک تابع مثال بنزید که در نقطه $x = 4$ پیوسته باشد ولی مشتق پذیر نباشد.

مثال: در شکل زیر مشتق چپ و راست را از روی شکل در نقطه A یافته و نشان دهید در این مشتق پذیر نیست.





مثال: مشتق پذیری تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

مثال: مشتق پذیری تابع $y = \sqrt{x^2}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

دامنه تابع مشتق:



نقاطی از دامنه تابع f که در آنها تابع دارای مشتق باشد را دامنه مشتق پذیری گوییم. یعنی از روی دامنه تابع باید نقاط

$$D_{f'} = D_f - \{ \text{نقاط مشتق ناپذیر} \}$$

مثال: تابع $f(x) = |(x-3)(x+1)|$ در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟ دامنه تابع مشتق را بیابید.





مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$ داده شده است.

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید.

ب) ضابطه f' را به دست آورید.

ج) نمودار f و f' را رسم کنید.

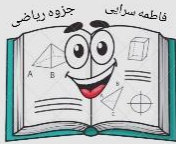
مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 5x & x \leq -1 \\ 3 & -1 < x < 2 \\ -4x+5 & x \geq 2 \end{cases}$ داده شده است.

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید.

ب) ضابطه f' را به دست آورید.

ج) نمودار f و f' را رسم کنید.





محاسبه تابع مشتق بعضی توابع

① $y = k \rightarrow y' = 0$ (عدد ثابت k)

چند جمله ای ها



② $y = x \rightarrow y' = 1$

③ $y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$

④ $y = u^n \rightarrow y' = nu'u^{n-1}$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$$

$$y = 3(x^2 + 1)^4 - 3x^5$$

$$y = 1 - \frac{x}{3} + 5x^3$$

$$y = 2\left(2 - \frac{x}{3}\right)^4$$

اعمال روی توابع در مشتق:



⑤ $y = f \pm g \rightarrow y' = f' \pm g'$

⑥ $y = f.g \rightarrow y' = f'.g + g'.f$

⑦ $y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$

در تابع های کسری مشتق تابع $y = \frac{1}{x}$ را به عنوان حالت خاص به یاد داشته باشید. $y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$





مثال: اگر $f'(2) = 3, g'(2) = 5$ حاصل عبارت $(2g - f)'(2)$ برابر است. دی ۹۷

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 1}$$

مثال: مشتق بگیرید. ساده کردن لازم نیست.

$$f(x) = \left(\frac{2}{2x - 1}\right)^5 \quad \text{دی ۹۷}$$

مثال: با استفاده از قوانین، مشتق بگیرید.

$$f(x) = (x^2 - 3x)^5 \quad \text{خرداد ۹۸}$$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5 \quad \text{تیر ۹۸}$$

$$f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1) \quad \text{دی ۹۸}$$





مثال: مشتق بگیرید.

$$g(x) = (x^2 + x) \left(\frac{x+1}{x-3} \right)$$

مثال: مشتق بگیرید. (ساده کردن الزامی نیست) خرداد ۹۹

الف) $f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5} \right)^4$

ب) $g(x) = \left(\frac{1}{x} \right) (\sqrt{3x+2})$

مشتق توابع رادیکالی

⑧ $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (حالت خاص $y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

⑨ $y = \sqrt[3]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ (حالت خاص $y = \sqrt[3]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$)



$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$y = \sqrt{x + 2}$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x}$$

مثال: مشتق بگیرید.





مثال: مشتق بگیرید.

$$g(x) = x^2 \sqrt{x+1} \quad (\text{دی } ۹۷)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x} \quad (\text{خرداد } ۹۸)$$

$$g(x) = \frac{5x^2 - x}{\sqrt{x}} \quad (\text{تیر } ۹۸)$$

$$g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}} \quad (\text{دی } ۹۸)$$

مثال: مشتق بگیرید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x}}{x^2 + 1} \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = (\sqrt{5-7x}) \left(4 - \frac{x}{3} \right) \quad (\text{ب})$$





مثال: مشتق بگیرید.

الف) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3}$

ب) $g(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

مثال: اگر $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^6}$ مقدار $f'(1)$ را بیابید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{ax^2 + a}{\sqrt{3x+1}}$ و $f'(1) = \frac{21}{8}$ مقدار a را بیابید.

$$y = (f \circ g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

مشتق تابع مرکب



یعنی در مشتق تابع مرکب اول مشتق تابع داخلی ضربدر مشتق تابع بیرونی به ازای تابع داخلی.

مثال: مشتق تابع $y = \sqrt{x^3 + 1}$ را با استفاده از مشتق تابع مرکب بیابید.





مثال: اگر $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ و $f'(x) = x^2 + 1$ مشتق تابع g را در $x = 2$ بیابید.

مثال: اگر $g(x) = x^2 + 2x$ و $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ باشد، مقدار مشتق $f \circ g$ را در $x = 0$ محاسبه کنید.

آهنگ تغییرات

در تابع $y = f(x)$ نسبت تغییرات تابع Δy به تغییرات متغیر Δx را آهنگ تغییرات می گویند.



$$\text{آهنگ تغییر } y \text{ نسبت به } x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

آهنگ متوسط تغییر: هنگامی که متغیر از a به b تغییر می کند مقدار $b - a$ را نمو متغیر و مقدار



$f(b) - f(a)$ را نمو تابع می نامند و نسبت $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ را آهنگ متوسط تغییرات تابع مینامیم.

نکته: اگر قرار دهیم $b - a = h$ مقدار متوسط تغییر تابع به صورت $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ خواهد بود.





مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ تغییر تابع را وقتی x از ۴ به ۲۵ تغییر می کند

بدست آورید. (نهایی دی ۸۹)

مثال: آهنگ تغییرات تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ وقتی x از ۲ به $\frac{2}{2}$ تغییر کند را به دست آورید. (نهایی خرداد ۸۷)

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-1}$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی x از $x_1 = 1$ تا

$x_2 = 5$ تغییر میکند تعیین کنید. (نهایی دی ۹۰)

مثال: یک توده باکتری پس از ساعت t دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده

در بازه زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟ دی ۹۷





مثال: یک توده باکتری پس از ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟ تیر ۹۹

مثال: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر میکند را به دست

آورید. شهریور ۹۸

مثال: تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد. اگر

X مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) باشد، حساب کنید که آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

دی ۹۸





آهنگ لحظه ای تغییر تابع: در تابع f مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ را آهنگ لحظه

ای تغییر تابع در نقطه a مینامیم.

تذکر: آهنگ تغییر لحظه ای تابع $f(x)$ در نقطه a همان تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه a است.

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ بر حسب متر داده شده است. تعیین کنید که در چه زمانی

سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی با هم برابرند؟ خرداد ۹۸

مثال: یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 3$ چقدر است؟ تیر ۹۸، تیر ۹۹





سرعت یک متحرک



الف) سرعت متوسط: سرعت متوسط همان آهنگ تغییر متوسط تابع $f(t)$ نسبت به متغیر t است.

اگر متحرکی با سرعت $S = f(t)$ حرکت کند در این صورت: $\text{سرعت متوسط} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

ب) سرعت لحظه ای: سرعت لحظه ای برابر است با حد سرعت متوسط وقتی t به t_0 میل می کند که آن را با $V(t_0)$ نمایش می دهیم.

$V \text{ سرعت متوسط} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

مثال: معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x(t) = 3t^2 - 4t + 2$ است. سرعت متوسط این

متحرک را در فاصله زمانی $t = 1$ و $t = 3$ محاسبه کنید. (نهایی خرداد ۹۰)

مثال: معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x = t^2 - 5t + 6$ است. اولاً: سرعت متوسط این

متحرک را در فاصله زمانی $t = 3$ تا $t = 5$ محاسبه کنید. ثانیاً: آهنگ آنی تغییرات x را در $t = 2$ به دست آورید.

نهایی شهریور ۸۶





مثال: موشکی به طور قائم رو به بالا پرتاب شده است. اگر این موشک پس از t ثانیه S متر را طی

کند و معادله حرکت آن به صورت $S = 180t - 5t^2$ باشد، سرعت موشک را ۵ ثانیه بعد از پرتاب حساب کنید. نهایی

شهریور ۷۹

مشتق دوم 

مشتق $y = f(x)$ یعنی $y' = f'(x)$ را در صورتی که وجود داشته باشد مشتق اول مینامیم و مشتق $y' = f'(x)$ را در صورت وجود مشتق دوم مینامیم و با $y'' = f''(x)$ نشان می دهیم.

نکته: اگر معادله حرکت یک متحرک $s = f(t)$ باشد، مشتق اول آن یعنی $s' = f'(t)$ را سرعت می نامند و با $v(t)$ نمایش می دهند. مشتق دوم $f(t)$ یا مشتق $v(t)$ را شتاب متحرک می گویند و با $a(t)$ نشان می دهند یعنی:

$$v(t) = f'(t)$$

$$a(t) = v'(t) = f''(t)$$

مثال: معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x = t^2 - 5t + 6$ است. شتاب این متحرک را در

زمان $t = 3$ محاسبه کنید.





مشتق پذیری در یک بازه



الف) بازه باز: تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) بازه بسته تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در a دارای مشتق راست (اول پیوستگی راست بررسی شود) و در b دارای مشتق چپ باشد (اول پیوستگی چپ داشته باشد)

📖 مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ را در بازه های خواسته شده بررسی کنید.

الف) بازه $[-2, 3]$

ب) بازه $[1, 3]$

📖 مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x-1|$ را در بازه های خواسته شده بررسی کنید.

الف) بازه $(-2, 1)$

ب) بازه $(2, 3)$

