روابط بین نسبت های مثلثاتی

$$\boxed{\sin^{2}x+\cos^{2}x=1}$$

مثال : درستی تساوی $(\sin x+\cos x)^{2}+(\sin x-\cos x)^{2}=2$ را بررسی کنید .

پاسخ : $\text{چپ}=\underbrace{\sin^{2}x+\cos^{2}x}_{1}+\cancel{2\sin x\cos x}+\underbrace{\sin^{2}x+\cos^{2}x}_{1}\cancel{-2\sin x\cos x}=1+1=2$

مثال : مقدار m را چنان بیابید که $\cos x=m-1$ ، $\sin x=m$ باشد .

پاسخ : $\sin^{2}x+\cos^{2}x=1\Rightarrow m^{2}+(m-1)^{2}=1\Rightarrow 2m^{2}-2m=0\Rightarrow 2m(m-1)=0\Rightarrow \begin{cases} m=0\\ m=1\end{cases}$

توجه بسیار مهم : از رابطه ی $\sin^{2}x+\cos^{2}x=1$ نتایج مفیدی بدست می آید که آنها را در دودسته بیان می کنم :

دسته اول : $\cos^{2}x=1-\sin^{2}x$ و $\sin^{2}x=1-\cos^{2}x$

مثال : ثابت کنید $\dfrac{\sin^{2}x}{1-\cos x}+\dfrac{\sin^{2}x}{1+\cos x}=2$.

پاسخ :

$$\text{چپ}=\frac{1-\cos^{2}x}{1+\cos x}+\frac{1-\cos^{2}x}{1-\cos x}=\frac{(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}{\cancel{1+\cos x}}+\frac{(1+\cos x)\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{1-\cos x}}=1-\cos x+1+\cos x=2$$

مثال : اگر $\sin\alpha+\sin^{2}\alpha=1$ ، نشان دهید : $\cos^{2}\alpha+\cos^{4}\alpha=1$.

پاسخ : $\sin\alpha+\sin^{2}\alpha=1\Rightarrow\sin\alpha+1-\cos^{2}\alpha=1\Rightarrow\cos^{2}\alpha=\sin\alpha\Rightarrow\left(\cos^{2}\alpha\right)^{2}=(\sin\alpha)^{2}$

$$\Rightarrow\cos^{4}\alpha=1-\cos^{2}\alpha\Rightarrow\cos^{2}\alpha+\cos^{4}\alpha=1$$

دسته دوم : $\sin^{4}x+\cos^{4}x=1-2\sin^{2}x\cos^{2}x$ و $\sin^{6}x+\cos^{6}x=1-3\sin^{2}x\cos^{2}x$

مثال : عبارت $\dfrac{\sin^{4}x+\cos^{4}x-1}{1-\sin^{6}x-\cos^{6}x}$ را ساده کنید .

پاسخ : $\dfrac{\sin^{4}x+\cos^{4}x-1}{1-\sin^{6}x-\cos^{6}x}=\dfrac{1-2\sin^{2}x.\cos^{2}x-1}{1-(1-3\sin^{2}x.\cos^{2}x)}=\dfrac{-2\cancel{\sin^{2}x}.\cancel{\cos^{2}x}}{3\cancel{\sin^{2}x}.\cancel{\cos^{2}x}}=-\dfrac{2}{3}$

$\sin x = \cos x \cdot \tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\cos x = \sin x \cdot \cot x$

*با توجه به تعاریف قبلی ، می دانیم کُتانژانت معکوس تانژانت است ، بنابراین $\tan x \cdot \cot x = ۱$ وهمچنین $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ است .

مثال : با فرض $\frac{۲\sin x + ۵\cos x}{۳\cos x - \sin x} = -\frac{۲}{۳}$ مقدار $\cot x$ را بیابید .

پاسخ : $\frac{۲\sin x + ۵\cos x}{۳\cos x - \sin x} = -\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\div \sin x} \frac{۲ + ۵\cot x}{۳\cot x - ۱} = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۶ + ۱۵\cot x = -۶\cot x + ۲ \Rightarrow \cot x = -\frac{۴}{۲۱}$

مثال : صحت برابری $\frac{\cos^۴ x - \sin^۴ x}{\cos^۲ x} = (۱ + \tan x)(۱ - \tan x)$ را ثابت کنید .

پاسخ :

$$\frac{\cos^۴ x - \sin^۴ x}{\cos^۲ x} = \frac{(\cos^۲ x - \sin^۲ x).\overbrace{(\cos^۲ x + \sin^۲ x)}^{۱}}{\cos^۲ x} = \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}$$

$$= \frac{\cos^۲ x}{\cos^۲ x} - \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} = ۱ - \tan^۲ x = (۱ + \tan x)(۱ - \tan x)$$

مثال : با فرض $\tan x + ۳\cot x = ۵$ حاصل $\tan^۲ x + ۹\cot^۲ x$ را بدست آورید .

پاسخ : $\tan^۲ x + ۹\cot^۲ x = (\underbrace{\tan x + ۳\cot x}_{۵})^۲ - ۶ \times \underbrace{\tan x . \cot x}_{۱} = ۲۵ - ۶ = ۱۹$

توجه بسیار مهم : از روابط گفته شده نتایج مفیدی می توان گرفت که عبارتند از :

نتیجه شماره(۱) : $۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ " این تساوی را می توان به صورت $\cos^۲ x = \frac{۱}{۱ + \tan^۲ x}$ نیز بیان کرد."

اثبات : $۱ + \tan^۲ x = ۱ + \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{\cos^۲ x + \sin^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{\cos^۲ x}$

نتیجه شماره(۱) : $۱ + \cot^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x}$ " این تساوی را می توان به صورت $\sin^۲ x = \frac{۱}{۱ + \cot^۲ x}$ نیز بیان کرد."

اثبات : $۱ + \cot^۲ x = ۱ + \frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin^۲ x} = \frac{۱}{\sin^۲ x}$

مثال : اگرزاویه ی x در ربع سوم دایره ی مثلثاتی و $\cot x = \frac{۴}{۳}$ فرض شود ، سایر نسبت های مثلثاتی آن را تعیین کنید .

پاسخ : $\tan x = \frac{۱}{\cot x} = \frac{۳}{۴}$ و $\sin^۲ x = \frac{۱}{۱+\cot^۲ x} = \frac{۱}{۱+\frac{۱۶}{۹}} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin x = -\frac{۳}{۵}$

$$\cos x = \sin x . \cot x = -\frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۳} = -\frac{۴}{۵}$$

مثال : ثابت کنید $\sin^۲ x = \frac{\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$. پاسخ : $\frac{\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x} = \frac{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\frac{۱}{\cos^۲ x}} = \frac{\sin^۲ x \times \cos^۲ x}{\cos^۲ x} = \sin^۲ x$

حل چند نمونه سوال جالب :

۱- ثابت کنید $\frac{\cos x - \cos y}{\sin y + \sin x} = \frac{\sin y - \sin x}{\cos x + \cos y}$.

پاسخ : یکی از روشهای اثبات آن است که فرض کنیم تساوی برقرار است و با انجام اعمال برگشت پذیر ریاضی به یک تساوی همیشه درست برسیم . بدین منظور تساوی فوق را طرفین وسطین نموده تا به یک تساوی همیشه درست دست یابیم .

$$(\sin y - \sin x).(\sin y + \sin x) = (\cos x + \cos y).(\cos x - \cos y)$$

$$\Rightarrow \sin^۲ y - \sin^۲ x = \cos^۲ x - \cos^۲ y \Rightarrow \sin^۲ y + \cos^۲ y = \sin^۲ x + \cos^۲ x \Rightarrow ۱ = ۱ \xrightarrow{\text{همیشه درست}}$$

۲- c,b,a را چنان بیابید که به ازای هر مقدار از x داشته باشیم : $\frac{\sin x . \cos x}{\sin x + \cos x + ۱} = a \sin x + b \cos x + c$.

پاسخ : ابتدا طرف چپ را از حالت کسری خارج می کنیم . برای این منظور صورت ومخرج آن را در $\sin x + \cos x - ۱$ ضرب می کنیم :

$$\text{چپ} = \frac{\sin x . \cos x}{(\sin x + \cos x + ۱)} \times \frac{\sin x + \cos x - ۱}{\sin x + \cos x - ۱} = \frac{\sin x . \cos x \times (\sin x + \cos x - ۱)}{\underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} + ۲\sin x \cos x - ۱}$$

$$= \frac{\sin x . \cos x \times (\sin x + \cos x - ۱)}{۲\sin x \cos x} = \frac{۱}{۲}\sin x + \frac{۱}{۲}\cos x - \frac{۱}{۲}$$

با مقایسه جواب بدست آمده و با سمت راستِ سؤال بدیهی است که باید : $c = -\frac{۱}{۲}$, $a = b = \frac{۱}{۲}$ باشد .

۳- با فرض $\sin x - \cos x = ۰/۱$ ، حاصل هریک از عبارات زیر را بدست آورید .

الف) $\sin x.\cos x$

$$\sin x - \cos x = ۰/۱ \Rightarrow (\sin x - \cos x)^۲ = ۰/۰۱ \Rightarrow ۱ - ۲\sin x.\cos x = ۰/۰۱ \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{۹۹}{۲۰۰}$$

ب) $(۲ + ۳\sin x).(۲ - ۳\cos x)$

$$(۲ + ۳\sin x).(۲ - ۳\cos x) = ۴ + ۶\sin x - ۶\cos x - ۹\sin x \cos x$$

$$= ۴ + ۶\underbrace{(\sin x - \cos x)}_{۰/۱} - ۹\underbrace{(\sin x \cos x)}_{\frac{۹۹}{۲۰۰}} = \frac{۲۹}{۲۰۰}$$

۴- ثابت کنید عبارت $\dfrac{(\sin x - \cos x - ۱)(\sin x - \cos x + ۱)}{\sin x.\cos x}$ مستقل از x است .

پاسخ : برای این که نشان دهیم عبارت مستقل از x است ، باید آن را تا حد امکان ساده کرد ، بطوری که ساده شده ی آن برحسب متغیر x نباشد ، (جواب آن یک عدد شود).

$$\frac{(\sin x - \cos x - ۱)(\sin x - \cos x + ۱)}{\sin x.\cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)^۲ - ۱}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x \cos x - ۱}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{۱ - ۲\sin x \cos x - ۱}{\sin x \cos x} = \frac{-۲\cancel{\sin x \cos x}}{\cancel{\sin x \cos x}} = -۲ \Rightarrow$$ مستقل از x است

۵- نشان دهید عبارت $\sin x.\cos x(۱ + \tan x)(۱ + \cot x)$ مربع کامل است .

پاسخ : $$\sin x.\cos x.(۱ + \tan x).(۱ + \cot x) = \sin x.\cos x.(۱ + \frac{\sin x}{\cos x}).(۱ + \frac{\cos x}{\sin x})$$

$$= \cos x.(۱ + \frac{\sin x}{\cos x}) \times \sin x.(۱ + \frac{\cos x}{\sin x}) = (\cos x + \sin x) \times (\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^۲ \Rightarrow$$

مربع کامل است

۶- هر گاه $x \in (۰, \frac{\pi}{۲})$ ، نشان دهید : $\sin x \prec \tan x \prec \sec x$.

پاسخ : با توجه به اینکه در ناحیه اول کلیه نسبتهای مثلثاتی مثبت اند نا مساوی داده شده را اثبات می کنیم .

اثبات طرف چپ نامساوی : $$\cos x \prec ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\cos x} \succ ۱ \xrightarrow{\times \sin x} \frac{\sin x}{\cos x} \succ \sin x \Rightarrow \tan x \succ \sin x$$

اثبات طرف راست نامساوی : $$\sin x \prec ۱ \xrightarrow{\div \cos x} \tan x \prec \frac{۱}{\cos x} \xrightarrow{\frac{۱}{\cos x} = \sec x} \tan x \prec \sec x$$

۷- اگر $۴\sin x + ۳\cos x = ۵$ ، مقدار $\tan x$ را بیابید.

پاسخ : تساوی فرض را نوشته و با توجه به ناصفر بودن $\cos x$ دو طرف را بر $\cos x$ تقسیم می کنیم و ...

$$۴\sin x + ۳\cos x = ۵ \xrightarrow{\div \cos x} ۴\tan x + ۳ = \frac{۵}{\cos x} \Rightarrow (۴\tan x + ۳)^۲ = (\frac{۵}{\cos x})^۲$$

$$\Rightarrow ۱۶\tan^۲ x + ۲۴\tan x + ۹ = \frac{۲۵}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۱۶\tan^۲ x + ۲۴\tan x + ۹ = ۲۵ \times (۱ + \tan^۲ x)$$

$$\Rightarrow ۹\tan^۲ x - ۲۴\tan x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (۳\tan x - ۴)^۲ = ۰ \Rightarrow \tan x = \frac{۴}{۳}$$

۸- درستی رابطه $\frac{۱}{\sin^۴ x} + \frac{۱}{\tan^۴ x} = ۱ + \frac{۲\cot^۲ x}{\sin^۲ x}$ را بررسی کنید .

پاسخ : ابتدا طرف چپ را بر حسب سینوس ساده می کنیم .

$$\frac{۱}{\sin^۴ x} + \frac{۱}{\tan^۴ x} = \frac{۱}{\sin^۴ x} + \frac{\cos^۴ x}{\sin^۴ x} = \frac{۱ + (۱ - \sin^۲ x)^۲}{\sin^۴ x} = \frac{\sin^۴ x - ۲\sin^۲ x + ۲}{\sin^۴ x}$$

حال طرف راست را بر حسب سینوس ساده می کنیم .

$$۱ + \frac{۲\cot^۲ x}{\sin^۲ x} = ۱ + \frac{\frac{۲\cos^۲ x}{\sin^۲ x}}{\sin^۲ x} = ۱ + \frac{۲\cos^۲ x}{\sin^۴ x} = \frac{\sin^۴ x + ۲ \times (۱ - \sin^۲ x)}{\sin^۴ x} = \frac{\sin^۴ x - ۲\sin^۲ x + ۲}{\sin^۴ x}$$

با مقایسه چپ و راست ، نتیجه میگیریم تساوی برقرار است .

تمرین

۱- درستی هر یک از تساویهای زیر را ثابت کنید :

الف) $(x \sin t - y \cos t)^۲ + (y \sin t + x \cos t)^۲ = x^۲ + y^۲$

ب) $(r \sin\alpha \sin\beta)^۲ + (r \sin\alpha \cos\beta)^۲ + (r \cos\alpha)^۲ = r^۲$

پ) $\frac{۱ + \cos x}{۱ - \cos x} - \frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x} = \frac{۴\cos x}{\sin^۲ x}$

ت) $\cos^۴ x - \sin^۴ x = (۱ - \sqrt{۲}\sin x)(۱ + \sqrt{۲}\sin x)$

ث) $\frac{۱ + \cos x}{\sin^۳ x} = \frac{۱}{\sin x - \sin x . \cos x}$

ج) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x$

چ) $\cos^2 x = \dfrac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$

۲- حاصل عبارت $P = \dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^4 - (\cos\theta-\sin\theta)^4}{\cos\theta.\sin\theta}$ را بیابید .

۳- به ازای چه مقدار از p داریم $\sin x = \dfrac{p}{p+1}$ و $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{p+1}$.

۴- با فرض $\sin x + \cos x = 0/5$ ، حاصل عبارات $\sin^3 x + \cos^3 x$ را بدست آورید .

۵- با توجه به دستگاه معادلاتی $\begin{cases} \sin x + \cos x = a \\ \sin x.\cos x = b \end{cases}$ رابطه ای مستقل از x بین b,a بنویسید .

۶- حاصل عبارت $\sin^2 x(1+\cos^2 x)(1+\cos^4 x)(1+\cos^8 x)+\cos^{16} x$ را به ازای $\cos x = \dfrac{\pi}{8}$ بدست آورید.

۷- اگر $2\sin x + 3\cos x = 1$ باشد ، حاصل $13\cos^2 x - 6\cos x$ را بیابید .

۸- m را طوری پیدا کنید که عبارت $A = \sin^6 x + \cos^6 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x)$ ، مستقل از x باشد .

۹- با توجه به دستگاه $\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = a \\ \sin^6 x + \cos^6 x = b \end{cases}$ رابطه ای مستقل از x بین b,a بنویسید .