



همسایگی



هر بازه باز به صورت (a, b) که $x_0 \in (a, b)$ باشد را یک همسایگی برای x_0 تعریف می‌کنیم. اگر بازه به صورت $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ باشد را همسایگی متقارن x_0 می‌گویند و δ را شعاع همسایگی می‌گویند.

بازه (x_0, b) را همسایگی راست و بازه (a, x_0) را همسایگی چپ x_0 می‌گویند.

📖 مثال: درستی و نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) بازه $(3, 4)$ یک همسایگی ۴ است.

ب) $(-1, 0)$ یک همسایگی راست برای -1 است.

📖 مثال: اگر بازه $(2x+4, x-1)$ یک همسایگی ۱ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

📖 مثال: اگر $(a-3, 2a+1)$ یک همسایگی $x=1$ باشد، حدود a کدام است؟



حد تابع در نقطه x_0

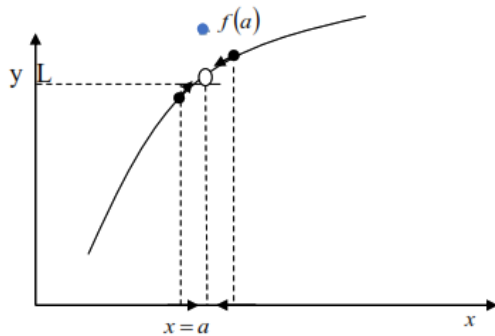
تعریف: برای یک تابع دلخواه مانند $f(x)$ در $x = a$ حد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای حد L است اگر بتوانیم مقدار $f(x)$ را از سمت راست و چپ به L نزدیک کنیم هرگاه x را

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم. در واقع باید یک همسایگی از a موجود باشد. و می‌نویسیم:



نکته: مهم نیست تابع در $x = a$ تعریف شده باشد یا تعریف نشده باشد. فقط همسایگی آن نقطه مهم است.



📖 مثال: تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 4 \\ 1 & x = 4 \\ \frac{1}{2}x+1 & x < 4 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) آیا تابع در نقطه $x = 4$ ، تعریف شده است.

ب) با رسم نمودار f در همسایگی محذوف ۴ مقدار $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ را به دست آورید.

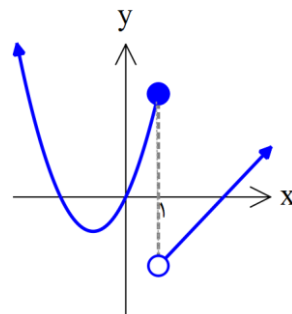
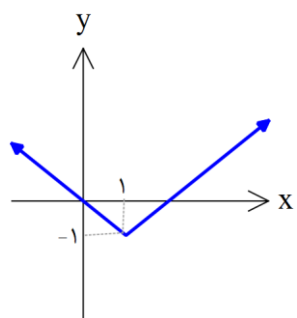
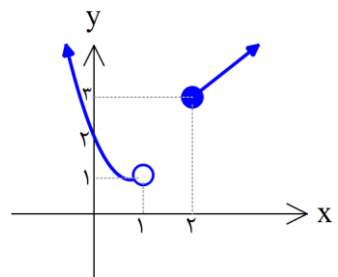
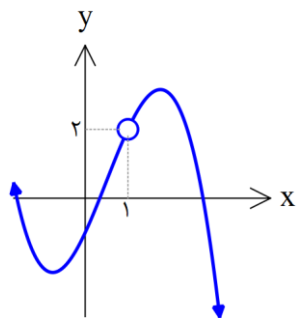
پ) با استفاده از نمودار f حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} f(x)$ (۴)
 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} f(x)$ (۳)
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (۲)
 $\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x)$ (۱)



جزوه حسابان ۱ یازدهم ریاضی

📖 مثال: کدام یک از توابعی که رسم شده است فقط در همسایگی چپ نقطه ۱ تعریف شده است؟



📖 مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع برابر نباشد.

📖 مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی چپ ۱- تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی راست ۱- تعریف نشده باشد.

📖 مثال: با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{x-2} + 1$ وجود حد را در اطراف نقطه $x = 2$ بررسی کنید.



📖 مثال: با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{3-x} - 2$ مقدار حد را در اطراف نقطه $x = 3$ بررسی کنید.

📖 مثال: نمودار تابع $f(x) = [x] - 1$ را در فاصله $[-2, 2]$ رسم کنید.

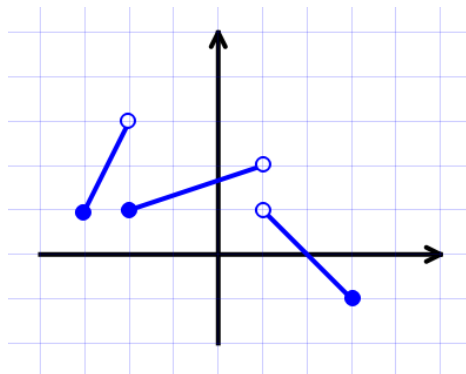
الف) حد چپ تابع f در نقطه $x = -1$ را به دست آورید.

ب) حد راست تابع f در نقطه $x = -1$ را به دست آورید.

شرط اینکه تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای حد باشد این است که:

اولاً: در یک همسایگی از a تعریف شده باشد

ثانیاً: حد راست در نقطه $x = a$ با حد چپ در این نقطه موجود و با هم برابر باشد.



📖 مثال: حد تابع f زیر را از روی شکل بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(2x) & x \leq \frac{\pi}{8} \\ a + \cos(2x) & x > \frac{\pi}{8} \end{cases}$ در $\frac{\pi}{8}$ حدداشته باشد، مقدار a را بیابید.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 4x-1 & x < 2 \\ 9 & x = 2 \\ 2x+3 & x > 2 \end{cases}$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- الف) ۹ ب) ۷ پ) ۵ ت) ۴

مثال: مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -2$ حد داشته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + a & x > -2 \\ \frac{4 - 3x^2}{x + 4} & x < -2 \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} ax-1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟ سراسری ۸۶



مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 2ax - b & x < 2 \\ bx + 3a & x \geq 2 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 22$ مقدار ab چقدر است؟

الف) ۶ ب) ۸ پ) ۱۲ ت) ۱

حد توابع شامل جز صحیح

ابتدا باید مقدار داخل جز صحیح را بسازیم

سپس باید ببینیم مقدار داخل جز صحیح همسایگی چه نقطه ای شده است

در آخر با توجه به همسایگی چپ و راست و مقایسه آنها ببینیم تابع در نقطه جدید حد دارد یا

مثال ۳۰۷: حاصل حدهای جز صحیح زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} [-3x + 5]$

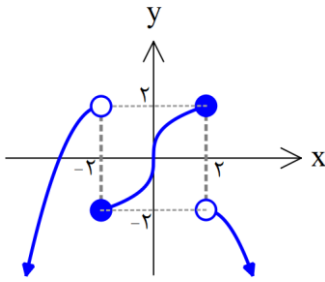
ب) $\lim_{x \rightarrow \cdot} [-3x^2]$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[-3x] - [2x - 1]}{[2x] + [-4x + 3]}$

مثال: با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \frac{x+1}{[x]-3}$ در نقطه $x=3$ چه می توان گفت؟

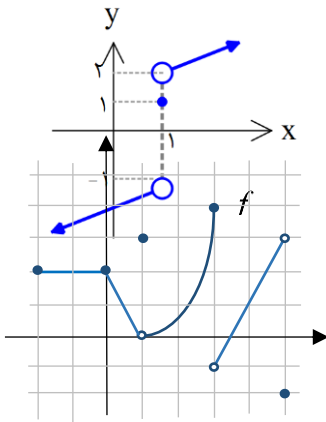


مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $A = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ کدام است؟



- الف) -۴ (ب) صفر
پ) ۲ (ت) ۴

مثال: با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{پ)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{ت)}$$

قضایای حد تابع:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{①}$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{②}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right) \quad \text{③}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n \quad \text{④}$$



مثال: اگر تابع های f, g در $x=1$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow 1} (2f + g)(x) = 3$ و

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f - 3g)(x) = 5, \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right)(x) \text{ را بیابید.}$$

مثال: اگر تابع f در نقطه ۱ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 1$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

❖ در محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ دو حالت وجود دارد:

① حالت $\frac{0}{0}$ به وجود نمی‌آید. در این صورت مقدار $f(a)$ را محاسبه می‌کنیم.

② حالت $\frac{\infty}{\infty}$ به وجود می‌آید. در این صورت از روش های زیر استفاده می‌کنیم

- توابع کسری: در حالت می‌توان از تجزیه صورت و مخرج و ساده کردن عامل ابهام، حد را بیابیم.

- توابع رادیکالی: در این حالت می‌توان با کمک اتحادهایی که خوانده ایم مثل مزدوج و چاق و لاغر عامل ابهام را بیرون بکشیم و ساده کنیم.

- توابع مثلثاتی: با استفاده از قضیه فشردگی که اثبات آن در مقوله این کتاب نمیگنجد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$



جزوه حسابان ۱ یازدهم ریاضی

پس حواستان باشد روابط هم ارزی فوق اولاً فقط برای \sin و \tan تعریف شده، ثانیاً زمانی می‌توان از این روابط استفاده کرد که کمان آنها به سمت صفر میل کند. در ضمن می‌توان از روابط مثلثاتی مهمی مثل $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ و $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ هم استفاده کرد.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$ چقدر است؟

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{4x + 1} - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5 - x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4 - \sqrt{x - 2}} - 2}{\sqrt{x - 2}}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|-x^2 + 3x - 2|}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3+x)(2+3x) - 6}{11x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+5} - 2}{\sqrt{3x-2} - 1}$$




$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^r x}{\cos^r x - 1}$$

روش تغییر متغیر

اگر در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ با روش های فوق به جواب نرسیدید تغییر متغیر $x - a = t$ را امتحان کنید و به خاطر داشته باشید در حد باز سازی شده جدید که بر حسب متغیر t است همواره $t \rightarrow 0$



مثال: با روش تغییر متغیر حدهای زیر را محاسبه کنید. 

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\sin \pi x}$$

پیوستگی تابع در $x = a$



تابع $f(x)$ را در $x = a$ پیوسته گوئیم هرگاه اولاً تابع در این نقطه تعریف شده باشد، ثانیاً حد تابع در این نقطه موجود باشد.

ثالثاً: مقدار حد تابع در $x = a$ بامقدار تابع برابر باشد. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

❖ در $x = a$ پیوستگی راست داریم هرگاه: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

❖ در $x = a$ پیوستگی چپ داریم هرگاه: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

📖 مثال: پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ در $x = 2$ چگونه است؟



مثال: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + 3 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{x + |x|}{\sin x} & x > 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

مثال: پیوستگی توابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & x \neq -2 \\ -4 & x = -2 \end{cases}$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

مثال: با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y = |x + 1| - 3$

ب) $y = x - [x]$

پ) $y = \begin{cases} x^2 + 4 & x \leq -1 \\ -2x + 5 & x > -1 \end{cases}$



جزوه حسابان ۱ یازدهم ریاضی

مثال: مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x^2}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = [x]([x] + a) \quad (\text{ب})$$

مثال: تابع $f(x) = \sqrt{2x-6} + 3$ بر کدام بازه پیوسته است.

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ در نقطه $x=3$ را بررسی کنید.

مثال: نقاط ناپیوستگی تابع $y = [x] + [-x]$ را تعیین کنید.

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \cos 2x - \sin^2 x & x < 0 \\ -2 & x = 0 \\ 2x^2 - 4x & x > 0 \end{cases}$ در نقطه $x=0$ را تعیین کنید.



جزوه حسابان ۱ یازدهم ریاضی

مثال: پیوستگی تابع روبرو را در $x=1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} [x] + 1 & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x < 1 \end{cases}$$

مثال: مقدار k را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + k & x \geq -1 \\ \frac{|x+1|}{x+1} & x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته نباشد.

مثال: مقدار a را طوری بیابید که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a|x| + 1 & x \leq 1 \\ x^2 + 2ax + 2 & x > 1 \end{cases}$$



مثال: مقدار a, b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & x > 0 \\ 2a + b & x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & x < 0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

مثال: برای چه مقدارهایی از m تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 2mx + 2 - m}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

مثال: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} x - a & x \leq 2 \\ \frac{a(1 + \sqrt{1-x})}{x^2 - 2x} & x > 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟ سراسری ریاضی ۹۴



مثال: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ همواره پیوسته است؟ سراسری تجربی ۹۲

پیوستگی تابع f در بازه



① تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است هرگاه در هر نقطه درونی بازه پیوسته باشد. یعنی نقاط ناپوستگی تابع در بازه مورد نظر قرار نگیرد.

② تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

در هر نقطه درونی بازه (a, b) پیوسته باشد.

در نقطه $x = a$ پیوسته راست باشد. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

در نقطه $x = b$ پیوسته چپ باشد $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$



مثال: پیوستگی تابع روبرو را در بازه های $[-1, 1]$, $[-2, 1]$ بررسی کنید.

