

بسمه تعالی

درس نامه و نکات کلیدی و حل تمرین های فصل هشتم پایه نهم

سمیه انصاری-عبدالهادی آرامی-عبدالله بهزادی

درس اول: حجم و مساحت کره

حجم های هندسی سه دسته هستند :

(۱) حجم های منشوری

(۲) حجم های کروی

(۳) حجم های هرمی

دایره: یک شکل هندسی مسطح است که چنین تعریف می شود:

مجموعه نقاطی از صفحه است که همه ی این نقاط از یک نقطه مشخص به نام مرکز به یک فاصله ثابت است که این فاصله ثابت همان شعاع دایره است .

کره: یک شکل هندسی فضایی است که چنین تعریف می شود:

به مجموعه نقاطی از فضا گفته می شود که فاصله ی همه آنها از نقطه ای ثابت به نام مرکز به یک فاصله است که این فاصله ثابت همان شعاع کره است .

نکته) هر گاه یک دایره یا نیم دایره را حول قطرش دوران دهیم کره بوجود می آید

نکته) از دوران ربع دایره حول شعاع اش یک نیم کره بوجود می آید .

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{حجم کره:}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \quad \text{مثال (حجم کره به شعاع ۳ را بیابید:)}$$

$$S = 4\pi R^2 \quad \text{مساحت کره:}$$

مثال (مساحت نیم کره چوبی توپر به شعاع ۵ سانتی متر را بیابید :

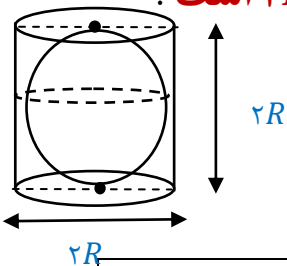
مساحت قاعده + مساحت رویه = مساحت نیم کره توپر

$$= \frac{1}{2}(4\pi R^2) + \pi R^2 = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 \Rightarrow 3\pi \times 5^2 = 75\pi$$

تذکره (اگر نیم کره تو خالی باشد مساحت قاعده را نباید جمع کنیم .

نکته (چنانچه کره ای به شعاع R در داخل استوانه ای محاط شود (استوانه بر کره

محیط شود) قطر قاعده ی استوانه $2R$ است و نیز ارتفاع استوانه نیز $2R$ است .



$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^2 h = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$$

* نکته: حجم فضای خالی بین کره و استوانه، $\frac{1}{3}$ حجم کره است .

* نکته: حجم استوانه $\frac{2}{3}$ حجم کره است و به عبارت دیگر حجم کره $\frac{2}{3}$ حجم استوانه است و

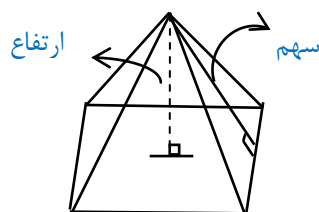
حجم فضای خالی $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است.

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس سوم را حل کنید.

درس دوم: حجم هرم و مخروط

هرم: یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است . قاعده ی هرم چند ضلعی میتواند باشد. روی محیط این چند ضلعی سطح هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس یکدیگر را قطع می کنند . به این سطح ها وجه جانبی گویند .

ارتفاع هرم: فاصله رأس هرم تا قاعده هرم (طول خط عمودی که از رأس بر قاعده رسم می شود) را گویند .



سهم: ارتفاع وارد شده از رأس هرم به ضلع قاعده

نکته) اگر قاعده هرم یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه های جانبی آن هم نهشت باشند، هرم را منتظم گوئیم.

چهار وجهی منتظم: هرم منتظم با قاعده مثلث متساوی الاضلاع را گویند که وجه های جانبی و قاعده با هم هم نهشت باشند .

یال: محل تقاطع هر دو وجه جانبی را یال هرم می گویند .

نکته) اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم آنها با هم برابر است .

حجم هرم:

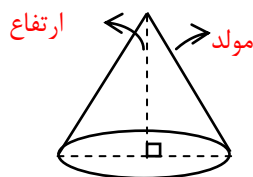
$$V = \frac{1}{3}sh \quad \left(\begin{array}{l} s = \text{مساحت قاعده} \\ h = \text{ارتفاع هرم} \end{array} \right)$$

مثال حجم هرم با قاعده مربع به ضلع ۶ سانی متر را بدست آورید؟ (ارتفاع هرم ۱۰ سانی متر است).

$$\text{سانی متر } 120 = 10 \times (6 \times 6) \times \frac{1}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3}sh \text{ : حجم هرم}$$

مخروط: شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط

مرکز این دایره است.



نکته: مخروط یال ندارد.

$$V = \frac{1}{3}sh \Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad \text{حجم مخروط}$$

نکته از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه قائمه، مخروط بدست می آید. ضلعی که مثلث را حوال آن دوران دادیم ارتفاع و ضلع دیگر زاویه قائمه مثلث، شعاع مخروط است.



مثال حجم مخروط حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائم ۶ و ۴ سانتی متر حول ضلع ۶ سانتی متر را بدست آورید .

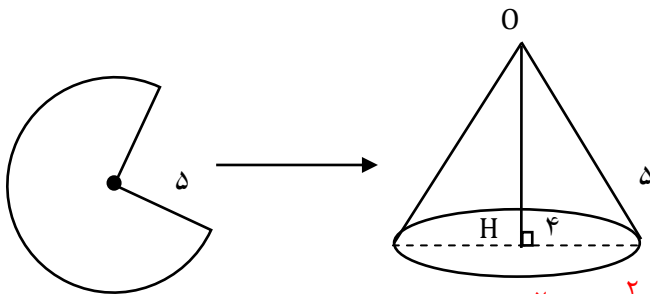
$$V = \frac{1}{3}sh \Rightarrow \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi \text{ متر شاع قاعده: ۴ سانتی متر ارتفاع مخروط: ۶ سانتی متر}$$

نکته می توان با قسمتی از دایره مخروط ساخت که در این صورت شعاع این دایره،

مولد مخروط خواهد بود

مثال با قسمتی از دایره به شعاع ۵ سانتی متر، مخروطی به شعاع قاعده ی ۴ ساخته ایم حجم

مخروط را بیابید.



$$OH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$OH = \sqrt{9} = 3$$

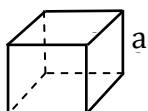
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 3 = 16\pi$$

درس سوم: سطح و حجم

$$V = sh \quad \left(\begin{array}{l} S = \text{مساحت قاعده} \\ h = \text{ارتفاع منشور} \end{array} \right) \quad \text{حجم منشور}$$

مساحت جانبی منشور: محیط قاعده \times ارتفاع

مساحت کل منشور: مساحت جانبی $+ 2$ برابر مساحت قاعده



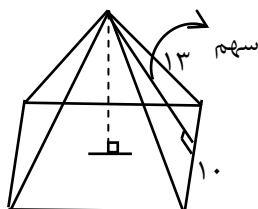
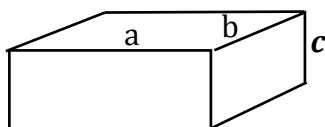
$$V = a^3 \quad \text{حجم مکعب به ضلع } a$$

$$S = 6a^2 \quad \text{مساحت کل مکعب به ضلع } a$$

$$S = 4a^2 \quad \text{مساحت جانبی مکعب به ضلع } a$$

$$V = a \times b \times c \quad \text{حجم مکعب مستطیل به اضلاع } a \text{ و } b \text{ و } c$$

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \quad \text{مساحت کل مکعب مستطیل به اضلاع } a \text{ و } b \text{ و } c$$



مساحت جانبی هرم: $\frac{1}{2} \times$ محیط قاعده \times سهم

مثال) مساحت جانبی هرم با قاعده مربع زیر را محاسبه کنید.

$$12 = \text{سهم} \Rightarrow \text{سهم}^2 = 144 \Rightarrow \text{سهم}^2 = 13^2 - 5^2$$

$$\text{محیط قاعده} = 4 \times 10 = 40$$

$$\text{مساحت جانبی هرم} = \frac{1}{2} \times 40 \times 12 = 240$$

نمونه سوالات امتحانی فصل هشتم

۱- حجم کره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر را بیابید.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{4000}{3}\pi$$

۲- مساحت نیم کره چوبی توپر به شعاع ۲۰ سانتی متر را بیابید.

$$S = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 20^2 = 1200\pi$$

۳- مساحت نیم کره تو خالی به شعاع ۲۰ سانتی متر را بیابید.

$$S = 2\pi R^2 = 2 \times \pi \times 20^2 = 800\pi$$

۴- یک کاسه به شکل نیم کره و به قطر 20 cm را پر از آب کرده و آب آن را در ظرف استوانه

ای شکل به قطر 20 cm می ریزیم. ارتفاع آب در استوانه چقدر است؟

$$\text{شعاع استوانه} = 20 \div 2 = 10\text{ cm} \quad \text{شعاع کاسه} = 20 \div 2 = 10\text{ cm}$$

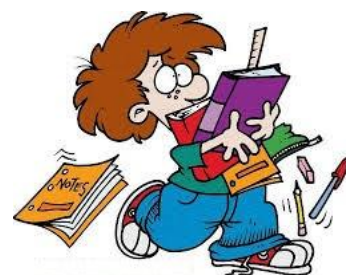
$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \pi R h^2 \Rightarrow \frac{2}{3}R = h \Rightarrow h = \frac{2}{3} \times 10 = \frac{20}{3}$$

۵- مساحت کل نیم کره چوبی توپری برابر با 300π است شعاع نیمکره و حجم آن را بدست

آورید.

$$3\pi R^2 = 300\pi \Rightarrow R^2 = \frac{300}{3} = 100 \Rightarrow R = \sqrt{100} = 10$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 10^3 = \frac{4000}{3}\pi$$



۶- کره ایی به شعاع 4 cm را درون کرده ای به شعاع 8 cm قرار می دهیم . حجم فضای خالی را بدست آورید.

$$V_{\text{کره کوچک}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = \frac{256}{3}\pi$$

$$V_{\text{کره بزرگ}} = \frac{4}{3} \times \pi \times 8^3 = \frac{2048}{3}\pi$$

$$\text{فضای خالی} = \frac{2048}{3}\pi - \frac{256}{3}\pi = \frac{1792}{3}\pi$$

۷- مساحت رویه یک کره برابر با 144π است شعاع و حجم کره را بدست آورید.

$$4\pi R^2 = 144\pi \Rightarrow R^2 = \frac{144}{4} = 36 \quad R = \sqrt{36} = 6$$

$$V_{\text{حجم}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288\pi$$

۸- اگر شعاع کره ایی را ۳ برابر کنیم، حجم و مساحت رویه آن چه تغییری می کند .

چون در مساحت شعاع به توان ۲ می رسد بنابراین مساحت ۹ برابر (3^2) می شود

ولی چون در حجم شعاع به توان ۳ می رسد بنابراین حجم ۲۷ برابر (3^3) می شود.

۹- با قسمتی از دایره به شعاع 10 cm ، مخروطی به شعاع 6 cm ساخته ایم حجم مخروط را بیابید .

$$h^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$$

۱۰- کره ای به شعاع ۳ درون استوانه ای محاط شده است . حجم فضای خالی بین کره و استوانه چقدر

است؟ $h = 3 \times 2 = 6$ استوانه

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi \quad \text{فضای خالی} = \frac{1}{3} \times 54\pi = 18\pi$$



۱۱- حجم هرمی را حساب کنید که قاعده ی آن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 8 cm می باشد و ارتفاع هرم 12 cm می باشد.

نکته: مساحت متساوی الاضلاع به ضلع a از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ بدست می آید.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 16\sqrt{3} \times 12 = 64\sqrt{3}$$

۱۲- قطر قاعده هرم 10 cm است قاعده هرم مستطیل شکل است و طول قاعده آن 8 cm و ارتفاع هرم برابر با 15 cm است. حجم هرم را بدست آورید.

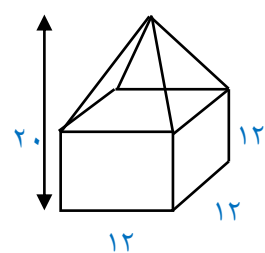
$$\text{عرض مستطیل} = x \Rightarrow x^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$$

$$S = 8 \times 6 = 48 \quad V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 48 \times 15 = 240$$

۱۳- حجم هرمی را حساب کنید که قاعده آن لوزی به قطرهای 10 و 8 سانتی متر و ارتفاع هرم 18 سانتی متر باشد.

$$S = \frac{8 \times 10}{2} = 40$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 40 \times 18 = 240$$



۱۴- حجم شکل مقابل را بدست آورید.

$$V_{\text{مکعب}} = 12 \times 12 \times 12 = 1728 \quad h = 20 - 12 = 8$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 8 = 384 \quad V_{\text{کل}} = 1728 + 384 = 2112$$

۱۵- حجم و مساحت کل مکعب به ضلع 5 cm را بدست آورید .

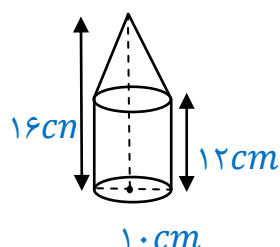
$$V = 5 \times 5 \times 8 = 125$$

$$S = 6 \times 5 \times 5 = 150$$

۱۶- حجم و مساحت کل مکعب مستطیلی که طول و عرض و ارتفاع آن به ترتیب 4 cm و 8 cm و 6 cm باشد را بدست آورید.

$$V = 4 \times 6 \times 8 = 192$$

$$S = 2(6 \times 4) + 2(4 \times 8) + 2(6 \times 8) = 48 + 64 + 96 = 208$$



۱۷- حجم شکل مقابل را بدست آورید. (قطر استوانه 10 سانتی متر است)

$$V = \pi R^2 h = \pi \times 5^2 \times 12 = 300\pi$$

$$h = 16 - 12 = 4$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 4 = \frac{100}{3} \pi$$

$$V = 300\pi + \frac{100}{3} \pi = \frac{1000}{3} \pi$$

۱۸- از دوران یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم 6 cm و 8 cm سانتی متر حول ضلع قائم 8 سانتی متر

آن چه شکلی بوجود می آید؟ حجم حاصل را بدست آورید. مخروط

$$h = 8 \quad R = 6$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$$

