



جزوه ریاضی ۱ پایه دهم * مجتمع استعداد های ناب صالحین آبادان * آقای ملاسعیدی

هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می گیرند را یک دنباله می نامیم . به هر کدام از اعداد ، جملات دنباله



گفته می شود . به طور مثال در دنباله ی $۲, ۳, ۵, ۹, \dots$ اولین عدد را جمله اول نامیده و با نماد $t_1 = -۲$ نمایش

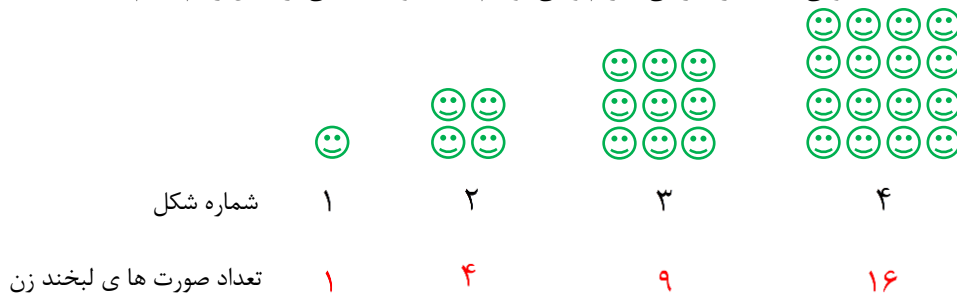
می دهیم ، به همین ترتیب $t_2 = ۳$ و $t_3 = ۵$ و ... خواهد بود .

بعضی مواقع جملات دنباله دارای یک الگو هستند و گاهی نیز الگوی خاصی ندارند . اگر بتوانیم الگوی جملات یک دنباله را بنویسیم ، آن را جمله ی عمومی دنباله می نامیم .

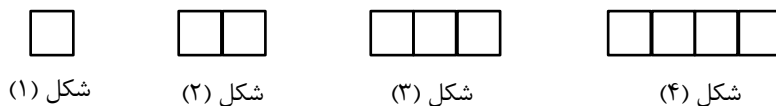
به عنوان نمونه در دنباله ی $۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots$ ، هر جمله مربع کامل می باشد ، به این صورت که :

$$t_1 = 1^2 \text{ و } t_2 = 2^2 \text{ و } t_3 = 3^2 \text{ و } t_4 = 4^2 \text{ و } \dots \Rightarrow t_n = n^2$$

بنابراین $t_n = n^2$ را جمله ی عمومی دنباله در نظر می گیریم و می توانیم یک الگوی هندسی برای آن رسم کنیم :



مثال : در شکل زیر الگویی برای تعداد پاره خط های شکل n ام یافته و تعیین کنید صدمین شکل دارای چند پاره خط است ؟

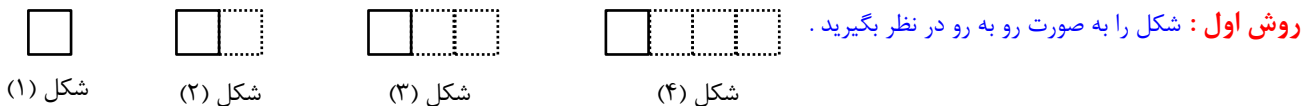


شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

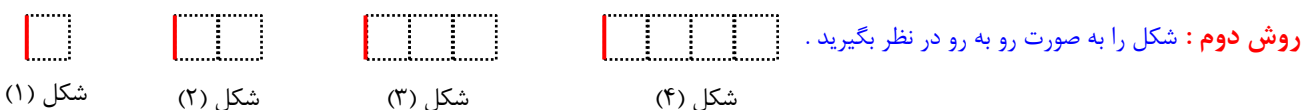
شکل (۴)

در شکل اول ۴ پاره خط داریم که در شکل دوم ۳ پاره خط به آن اضافه شده است .

اگر ۶ پاره خط (۲×۳) به شکل اول اضافه کنیم ، شکل سوم پدید می آید . و در صورتی که $۳ \times ۳ = ۹$ پاره خط به شکل اول اضافه کنیم ، شکل چهارم درست می شود . بنابراین :

$$t_1 = ۴ \text{ , } t_2 = ۴ + (۱ \times ۳) \text{ , } t_3 = ۴ + (۲ \times ۳) \text{ , } t_4 = ۴ + (۳ \times ۳) \Rightarrow t_n = ۴ + ((n-1) \times ۳)$$

که با ساده کردن آن خواهیم داشت : $t_n = ۳n + ۱$



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

شکل اول به صورت $(۱ \times ۳) + ۱$ ، شکل دوم $(۲ \times ۳) + ۱$ ، شکل سوم $(۳ \times ۳) + ۱$ و شکل چهارم $(۴ \times ۳) + ۱$

می باشد . بنابراین جمله عمومی دنباله $t_n = ۱ + (n \times ۳) = ۳n + ۱$ خواهد بود . در نتیجه $t_{۱۰۰} = ۳ \times ۱۰۰ + ۱ = ۳۰۱$



جزوه ریاضی ۱ پایه دهم * مجتبع استعداد های ناب صالحین آبادان * آقای ملاسعیدی

مثال : جمله ی عمومی دنباله $2, 9, 28, 65, \dots$ را تعیین کنید .

پاسخ : اگر از هر جمله یک واحد کم کنیم ، آن جمله مکعب کامل خواهد شد . $1, 8, 27, 64, \dots$

بنابراین دنباله به صورت $\dots, 4^3 + 1, 3^3 + 1, 2^3 + 1, 1^3 + 1$ و جمله عمومی آن $a_n = n^3 + 1$ است .

مثال : چهار جمله ی نخست هر یک از دنباله های $a_n = (n-1)(n-2) + n^3$ و $b_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ را بنویسید .

پاسخ : در هر دنباله مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را جایگزین n کرده و جملات را محاسبه می کنیم .

$$a_n \rightarrow 1, 8, 29, 70, \dots \quad \text{و} \quad b_n \rightarrow 0, 1, 0, \frac{1}{4}, \dots$$

مثال : اگر $a_{n+1} = (-1)^n n^5$ ، جمله هفتم دنباله را بنویسید .

پاسخ : برای تعیین a_7 باید تساوی داده شده را به ازای $n = 2$ محاسبه نمود . بنابراین $a_7 = (-1)^2 \times 2^5 = 32$

مثال : کدام جمله از دنباله $t_n = \frac{2n-1}{n+3}$ برابر $\frac{3}{4}$ است ؟

پاسخ : کفایت جمله عمومی را برابر $\frac{3}{4}$ قرار داده و معادله را حل کنیم تا شماره جمله (مقدار n) مشخص شود .

$$\frac{2n-1}{n+3} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 \times (2n-1) = 3 \times (n+3) \Rightarrow 4n - 2 = 3n + 9 \Rightarrow n = 11 \Rightarrow \text{جمله یازدهم جواب است .}$$

مثال : دنباله ای با جمله ی عمومی $x_n = 2n - 12$ دارای چند جمله ی منفی است ؟

$$\text{پاسخ : } 2n - 12 < 0 \Rightarrow 2n < 12 \xrightarrow{\div 2} n < 6 \Rightarrow n = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \Rightarrow \text{جمله ی منفی دارد} \Rightarrow 5$$

مثال : دنباله ی $y_n = n + \frac{6}{n}$ دارای چند جمله از اعداد صحیح است ؟

پاسخ : وقتی جمله صحیح است که $\frac{6}{n}$ صحیح باشد ، یعنی آن n هایی که عدد ۶ بر آنها بخش پذیر است باید در نظر گرفته شوند .

بنابراین n یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۶ می باشد . یعنی جملات اول ، دوم ، سوم و ششم صحیح هستند ، پس چهار جمله آن صحیح است .

مثال : دنباله ی $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ را با نوشتن چند جمله ی نخست مشخص کرده سپس کوچکترین و بزرگترین جمله ی آن را بنویسید .

پاسخ : برای حل این مسئله کفایت چند جمله ی نخست دنباله را بنویسیم .

$$3 - \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{5}, \dots \Rightarrow \text{کوچکترین جمله} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad \text{بزرگترین جمله} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$



مثال مهم :

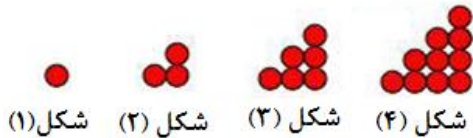
الف) جمله ی عمومی دنباله ی $۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \dots$ را تعیین کنید .

پاسخ : اگر جملات دنباله را به صورت $۱ \times ۲, ۲ \times ۳, ۳ \times ۴, ۴ \times ۵, \dots$ در نظر بگیریم ، هر جمله از ضرب شماره جمله ی در عدد بعدی آن ساخته می شود به طور مثال جمله ی دهم $t_{10} = ۱۰ \times ۱۱ = ۱۱۰$ خواهد بود پس جمله ی عمومی این دنباله به صورت $t_n = n(n+1)$ نوشته می شود .

ب) دنباله ی $۱, ۳, ۶, ۱۰, \dots$ معروف به دنباله ی مثلثی می باشد ، ضمن تعیین جمله ی عمومی آن ، الگوی هندسی آن را رسم کنید .

پاسخ : با کمی دقت متوجه می شویم اگر جملات دنباله ی قسمت الف را بر ۲ تقسیم کنیم ، دنباله ی مثلثی پدید می آید بنابراین جمله ی

عمومی دنباله ی مثلثی $a_n = \frac{n(n+1)}{۲}$ خواهد بود .



الگوی هندسی آن را به صورت رو به رو رسم می کنیم :

پ) حاصل مجموع $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n$ را به دست آورید .

پاسخ : در صورتی که جملات دنباله ی مثلثی را به صورت زیر بنویسیم :

$$۱, ۱+۲, ۱+۲+۳, ۱+۲+۳+۴, \dots, ۱+۲+۳+\dots+n$$

متوجه می شویم که مجموع گفته شده ، همان جمله ی عمومی دنباله ی مثلثی است . بنابراین $۱+۲+۳+\dots+n = \frac{n(n+1)}{۲}$ است .

مثال : برای دنباله ی $۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, \dots$ یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله ی عمومی دنباله را بنویسید .

پاسخ : با قدری دقت می توان الگوی زیر را برای آن طراحی کرد :

مثال : مجموع اعداد طبیعی مضرب ۳ کمتر از ۱۰۰ را بدست آورید .

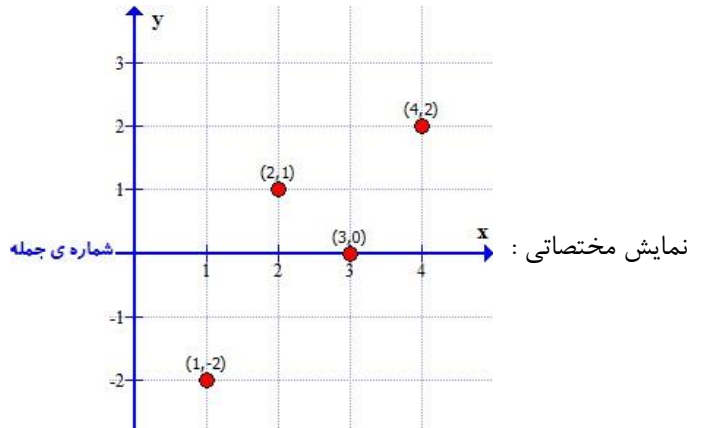
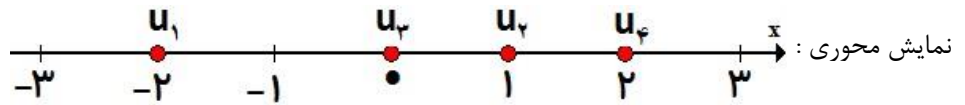
پاسخ : برای تعیین مجموع $۳ + ۶ + ۹ + \dots + ۹۹$ ، تساوی $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$ را در نظر گرفته و به روش زیر عمل می کنیم :

$$\begin{aligned} & ۳ + ۶ + ۹ + \dots + ۹۹ \\ &= ۳ \times (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۳۳) \\ &= ۳ \times \frac{۳۳ \times ۳۴}{۲} = ۱۶۸۳ \end{aligned}$$

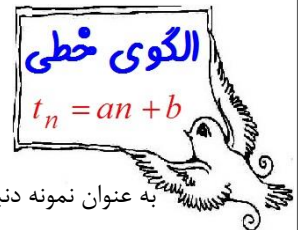


نمایش های گوناگون دنباله :

دنباله ی $2, 1, 0, -2, \dots$ را در نظر بگیرید . طبق توضیحات داده شده در کلاس ، می توان آن را به دو شکل زیر نمایش داد :



الگو هایی که در آنها اختلاف هر دو جمله ی متوالی عددی ثابت باشد ، الگو های خطی می نامیم .



جمله ی عمومی این نوع الگو به صورت $t_n = an + b$ است ، که در آن a و b اعداد حقیقی و ثابتند .

به عنوان نمونه دنباله ی $5, 8, 11, 14, \dots$ را در نظر بگیرید ، $8 - 5 = 3$ و $11 - 8 = 3$ و ... مشاهده می شود اختلاف هر

دو جمله ی متوالی آن ۳ واحد است بنابراین دنباله خطی بوده و ضریب n در جمله ی عمومی آن $a = 3$ است یعنی $t_n = 3n + b$.

از طرفی جمله ی اول $t_1 = 5$ می باشد ، بنابراین جمله ی عمومی آن به صورت زیر محاسبه می شود :

$$n = 1 \xrightarrow{t_n = 3n + b} t_1 = 3 + b \xrightarrow{t_1 = 5} 5 = 3 + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \boxed{t_n = 3n + 2}$$

مثال : جمله ی عمومی الگوی خطی $4, -1, -6, \dots$ را تعیین کنید .

پاسخ : اختلاف هر دو جمله $-1 - 4 = -5$ است بنابراین $t_n = -5n + b$ و $t_1 = 4$ می باشد در نتیجه :

$$n = 1 \xrightarrow{t_n = -5n + b} -5 + b = 4 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow \boxed{t_n = -5n + 9}$$

مثال : در یک الگوی خطی ، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲ و ۱۸ می باشند . جمله ی عمومی الگو را بیابید .

پاسخ : گیریم جمله ی عمومی $t_n = an + b$ باشد ، در نتیجه :

$$\left. \begin{aligned} n = 3 \Rightarrow t_3 = 3a + b \xrightarrow{t_3 = 2} 3a + b = 2 \\ n = 7 \Rightarrow t_7 = 7a + b \xrightarrow{t_7 = 18} 7a + b = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 4, b = -10 \Rightarrow \boxed{t_n = 4n - 10}$$



جزوه ریاضی ۱ پایه دهم * مجتمع استعداد های ناب صالحین آبادان * آقای ملاسعیدی

مثال : جمله ی عمومی دنباله ی اعداد با شرایط $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ را تعیین کنید .

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 5$$

⋮

پاسخ :

از جمع هر جمله با عدد فرد مناسب ، جمله ی بعدی ساخته می شود ، پس دنباله $1, 4, 9, 16, \dots$ و جمله ی عمومی $a_n = n^2$ است .

مثال : در دنباله ی بازگشتی $a_n = (n+1)a_{n-1}$ ، نسبت جمله ی چهارم به جمله ی اول را بیابید .

پاسخ : طبق رابطه ی بازگشتی داریم $\frac{a_n}{a_{n-1}} = n+1$. پس $\frac{a_2}{a_1} = 3$ و $\frac{a_3}{a_2} = 4$ و $\frac{a_4}{a_3} = 5$ است که با ضرب این سه کسر داریم :

$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1} \times \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \times \frac{a_4}{\cancel{a_3}} = 3 \times 4 \times 5 \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = 60$$



۱- اگر $x_n = n^2 - 4n$ فرض شود ، حاصل $x_7 + x_5 - 3x_2$ را به دست آورید .

۲- به ازای چه مقدار از k ، حاصل جمع سه جمله ی نخست دنباله ی $u_n = k \cdot n + 3$ برابر ۳- است ؟

۳- جمله ی عمومی دنباله های زیر را بنویسید .

الف) $-1, 4, -9, 16, \dots$

ب) $\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{4}}{9}, \frac{\sqrt{5}}{12}, \dots$

پ) $\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

ت) $\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \dots$

ث) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$

ج) $\frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+2x}, \frac{x^2}{1+3x}, \dots \quad (x \neq 0)$

۴- کدام جمله از دنباله ی $x_n = 9n + 1$ با جمله ی نهم دنباله ی $y_n = (-1)^n (n^2 - 100)$ برابر است ؟

۵- کدام جمله از رشته اعداد $a_n = \frac{5n+2}{3n-5}$ برابر 2 است ؟

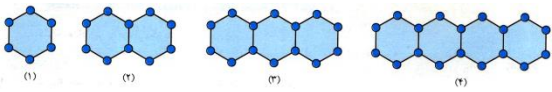
۶- چند جمله از دنباله $b_n = 14 - 2n$ نامنفی است ؟

۷- دنباله ی $t_n = \frac{n}{2} - \frac{18}{n}$ دارای چند جمله ی صحیح است ؟

۸- نخستین جمله ی دنباله ی $a_n = \frac{n-7}{10}$ که بیشتر از 5 باشد را بیابید .



۹- چند جمله ی نخست دنباله ی $a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n}}$ را نوشته و بزرگترین جمله ی آن را حدس بزنید .



۱۰- الف) در شکل چهل و پنجم الگوی روبرو، چه تعداد دایره وجود دارد ؟

ب) شکل چهل و پنجم الگوی داده شده ، از چند پاره خط تشکیل شده است ؟

۱۱- اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله ی هر دسته ، مجذور کامل باشد :

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$$

اختلاف جملات اول و آخر در دسته ی دهم چقدر است ؟

۱۲- مجموع نودونهم جمله ی نخست دنباله ی $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ را محاسبه نمایید .

۱۳- دنباله ی $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ را با نوشتن چند جمله ی نخست مشخص کرده سپس کوچکترین و بزرگترین جمله ی آن را تعیین کنید .

۱۴- کدامیک از دنباله های زیر ، دنباله ی خطی است ؟

$$\text{الف) } a_n = a_{n-1} + 7 \text{ و } a_1 = 2 \quad \text{ب) } b_n = n(4n + 5) - (2n + 1)^2 \quad \text{پ) } c_n = \frac{2^{2n+3} - n \cdot 4^n}{3 \times 4^{n-1}}$$

۱۵- با توجه به روابط بازگشتی تعریف شده ، دنباله ی مورد نظر آنها را با نوشتن شش جمله ی نخست تعیین کنید .

$$\text{الف) } a_n = a_{n-1} - 3, \quad a_1 = 10$$

$$\text{ب) } b_n = 2b_{n-1} + 1, \quad b_1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{پ) } c_n = c_{n-1}^2 - 10, \quad c_1 = 3$$

$$\text{ت) } d_n = d_{n-1} \times d_{n-2}, \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 2$$

۱۶- دنباله ای با فرض $a_1 = 3$ و $a_n = 4a_{n-1}$ را با نوشتن چند جمله ی نخست مشخص کرده سپس جمله ی عمومی آن را حدس بزنید .

۱۷- جمله ی عمومی دنباله ای تحت شرایط $y_1 = 1$ و $y_n = \frac{y_{n-1}}{1 + y_{n-1}}$ را بنویسید .

۱۸- چند جمله از جملات دنباله ی $u_n = \frac{(-1)^n (2n-7)}{3}$ بین ۱۱ و ۲۰ قرار دارند ؟

۱۹- چندمین جمله از دنباله ی $u_n = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{(n+1)^2})$ برابر $\frac{6}{11}$ است ؟

۲۰- دنباله از اعداد طبیعی بنویسید که باقیمانده ی تقسیم هر جمله ی آن بر عدد ۵ برابر ۲ شود . آیا این دنباله خطی است ؟ جمله ی عمومی آن را تعیین کنید .



***** جواب نهایی ترین ها *****

۲-۱

$$k = -2 - 2$$

$$c_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} \text{ (پ)}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1}}{3n} \text{ (ب)}$$

$$a_n = (-1)^n n^2 \text{ (الف)}$$

$$f_n = \frac{x^{n-1}}{1+nx} \text{ (ج)}$$

$$e_n = \frac{2n-1}{2^n} \text{ (ث)}$$

$$d_n = \frac{1}{n(n+1)} \text{ (ت)}$$

۴- جمله ی دوم

۵- جمله ی دوازدهم

۶- هفت جمله

۷- سه جمله ی صحیح دارد . (جملات دوم ، ششم ، و هجدهم)

۸- جمله ی پنجاه و هشتم

$$\frac{9}{8} - 9$$

$$1 + (45 \times 5) = 226 \text{ (ب)} \quad 2 + (45 \times 4) = 182 \text{ (الف)}$$

$$100 - 82 = 18 \text{ - ۱۱}$$

$$9 - 12$$

۱۳- کوچکترین جمله ی آن $2 - \frac{1}{2} = 1$ و بزرگترین جمله ی آن $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ است .

۱۴- هر سه دنباله خطی هستند .

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 4, 9, 19, 39, \dots \text{ (ب)}$$

$$10, 7, 4, 1, -2, -5, \dots \text{ (الف)}$$

$$-1, 2, -2, -4, 8, -32, \dots \text{ (ت)}$$

$$3, -1, -9, 71, 5031, 25310951, \dots \text{ (پ)}$$

$$3, 3 \times 4, 3 \times 4^2, 3 \times 4^3, \dots \Rightarrow a_n = 3 \times 4^{n-1} \text{ - ۱۶}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \Rightarrow y_n = \frac{1}{n} \text{ - ۱۷}$$

۱۸- شش جمله

۱۹- جمله ی دهم

۲۰- دنباله ... و ۱۷ و ۱۲ و ۷ می باشد که دنباله خطی با جمله ی عمومی $t_n = 5n + 2$ است .

