حل تمرینات ریاضیات گسسته فصل ۳ درس ۲

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \le n \le 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

$|S| = 90$

مجموعه اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند $A \rightarrow |A| = \left[\frac{90}{2}\right] = 45$

مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند $B \rightarrow |B| = \left[\frac{90}{3}\right] = 30$

اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر باشند $A \cap B \rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{90}{[2,3]}\right] = \left[\frac{90}{6}\right] = 15$

تعداد اعدادی که بر ۲ یا ۳ بخش پذیرند $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$45 + 30 - 15 = 60$

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \le n \le 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

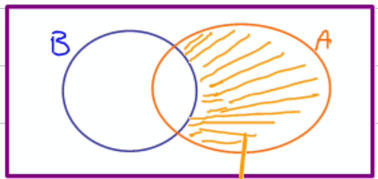
$|S| = 200$

اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند $A \rightarrow |A| = \left[\frac{200}{4}\right] = 50$

اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند $B \rightarrow |B| = \left[\frac{200}{7}\right] = 28$

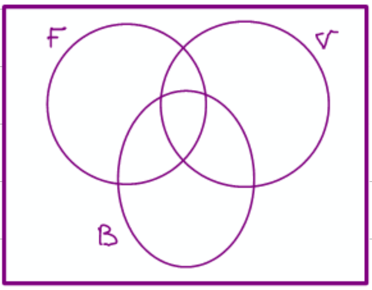
اعدادی که هم بر ۷ و هم بر ۴ بخش پذیرند یعنی بر ۲۸ $A \cap B \rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{200}{[4,7]}\right] = \left[\frac{200}{28}\right] = 7$

اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند $\rightarrow |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$



$|A| - |A \cap B|$

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند مشخص کنید :

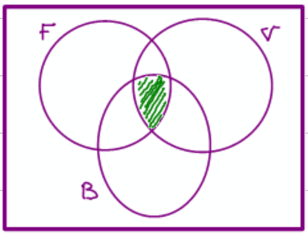


فوتبال را با F، والیبال را با V و بسکتبال را با B نشان می‌دهیم و کل کلاس را با S.

$|S| = 34 \qquad |F| = 15 , \qquad |V| = 11 \qquad |B| = 9$

$|F' \cap V' \cap B'| = 10 \qquad |F \cap V| = 5 \qquad |V \cap B| = 6 \qquad |F \cap B| = 3$

الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟



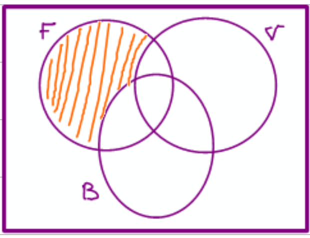
$|F \cup B \cup V| = |S| - |F' \cap B' \cap V'| = 34 - 10 = 24$

$F \cup B \cup V = |F| + |B| + |V| - |F \cap B| - |F \cap V| - |B \cap V| + |F \cap B \cap V|$

$24 = 15 + 9 + 11 - 3 - 5 - 6 + |F \cap B \cap V|$

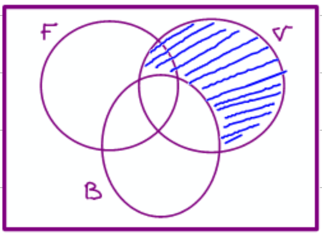
$24 = 21 + |F \cap B \cap V| \rightarrow |F \cap B \cap V| = 3$

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟



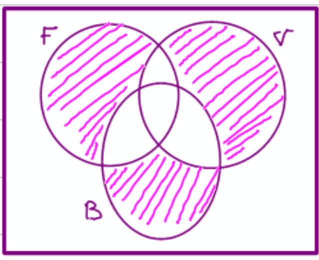
$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10$

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟



$n(V) - n(V \cap B) = 11 - 6 = 5$

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟



$|F \cup V \cup B| = |S| - |F' \cap V' \cap B'| = 34 - 10 = 24$

$|F \cup V \cup B| - |F \cap V| - |F \cap B| - |B \cap V| + 2|F \cap B \cap V|$

$= 24 - 5 - 3 - 6 + 2(3) = 16$

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

تمام اعداد ۵ رقمی بدون صفر $|S| = ۹^۵ = ۵۹۰۴۹$

رقم ۷ را نداشته باشد $A \to |A| = ۸^۵$ ‏ ۷ و ۲ را نداشته باشد $|A\cap B| = ۷^۵$ ‏ ۷ و ۲ و ۳ را نداشته باشد $|A\cap B\cap C| = ۶^۵$

رقم ۲ را نداشته باشد $B \to |B| = ۸^۵$ ‏ ۷ و ۳ را نداشته باشد $|A\cap C| = ۷^۵$

رقم ۳ را نداشته باشد $C \to |C| = ۸^۵$ ‏ ۲ و ۳ را نداشته باشد $|B\cap C| = ۷^۵$

تعداد اعضای مجموعه مورد نظر که حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ داشته باشد مجموعه $|A'\cap B'\cap C'|$ یا $|\overline{A\cup B\cup C}|$ است.

$$|\overline{A\cup B\cup C}| = |S| - |A\cup B\cup C| = ۵۹۰۴۹ - ۵۵۶۵۹ = \boxed{۳۳۹۰}$$

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| = ۳\times۸^۵ - ۳\times۷^۵ + ۶^۵ = ۵۵۶۵۹$$

امتحان کردن هر رقم ۶ ثانیه طول می‌کشد ← زمان مورد نیاز $= ۶ \times ۳۳۹۰ = ۲۰۳۴۰$ ثانیه

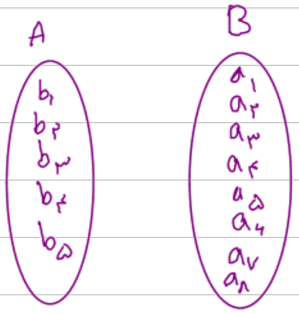
معادل ۵ ساعت و ۳۹ دقیقه

۵ چه تعداد تابع چون $f: A\to B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

تعداد کل توابع $\to |B|^{|A|} = ۴^۵ = ۱۰۲۴$

تابع یک به یک نمی‌توان ساخت زیرا تعداد اعضای دامنه بزرگ‌تر از هم‌دامنه است $|A|>|B|$

۶ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟



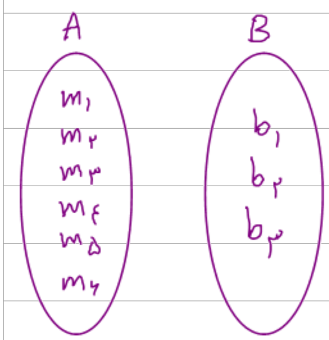
تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۵ عضوی به ۸ عضوی را پیدا می‌کنیم:

$$\underset{\text{انتخاب‌ها برای } b_1}{۸} \times \underset{\text{برای } b_2}{۷} \times \underset{\text{برای } b_3}{۶} \times \underset{\text{برای } b_4}{۵} \times \underset{\text{برای } b_5}{۴} = ۶۷۲۰$$

یا راه دوم:

$$P(|B|,|A|) = P(۸,۵) = \frac{۸!}{(۸-۵)!} = \frac{۸!}{۳!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۶۷۲۰$$

۷ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟



تعداد توابع پوشا را از مجموعه A که ۶ عضوی است به مجموعه B که ۳ عضوی است پیدا می‌کنیم.

کل توابع $|S| = ۳^۶ = ۷۲۹$

تعداد توابعی که b_1 را نمی‌پوشانند $|A| = ۲^۶$ ‏ تعداد توابعی که b_1 و b_2 را نمی‌پوشانند $|A\cap B| = ۱^۶ = ۱$

تعداد توابعی که b_2 را نمی‌پوشانند $|B| = ۲^۶$ ‏ تعداد توابعی که b_1 و b_3 را نمی‌پوشانند $|A\cap C| = ۱^۶ = ۱$

تعداد توابعی که b_3 را نمی‌پوشانند $|C| = ۲^۶$ ‏ تعداد توابعی که b_2 و b_3 را نمی‌پوشانند $|B\cap C| = ۱^۶ = ۱$

تعداد توابعی که b_1 و b_2 و b_3 را نمی‌پوشانند $|A\cap B\cap C| = ۰$

توابعی که b_1 و b_2 و b_3 را بپوشانند متمم $A\cup B\cup C$ است.

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$|A\cup B\cup C| = ۲^۶+۲^۶+۲^۶-۱-۱-۱+۰ = ۳\times۲^۶-۳ = ۱۹۲-۳ = ۱۸۹$$

$$|A'\cap B'\cap C'| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |S|-|A\cup B\cup C| = ۷۲۹-۱۸۹ = \boxed{۵۴۰}$$

اگر ۳۶۵ روز سال را (یا ۳۶۶ روز را) لانه درنظر بگیریم و هر نفر را یک کبوتر می خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ یا ۳۶۶ لانه قرار دهیم

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

بنابر طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که حداقل دو کبوتر در آن قرار بگیرند

به عبارت دیگر حداقل یک روز وجود دارد که دو نفر در آن متولد شده اند.

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

منظورمان از یکسان بودن روز هفته و ماه تولد این است که مثلاً یک نفر (فروردین، شنبه) به دنیا آمده است یا (مرداد، دوشنبه)

تعداد کل حالت های این زوج مرتب ها می شود $7 \times 12 = 84$ هرکدام از این حالت ها را اگر یک لانه درنظر بگیریم ۸۴ لانه داریم و هر دانش آموز را یک کبوتر آنگاه ۵۰۵ کبوتر داریم.

$$505 = k \times 84 + 1 \rightarrow k = 6 \rightarrow k+1 = 7$$

حداقل ۷ نفر آنها ماه تولد و روز هفته یکسانی دارند.

$505 \div 84 = 6$، باقیمانده 1

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

$n = 365$

$k+1 = 20 \rightarrow k = 19$

اگر سال را غیر کبیسه درنظر بگیریم روزهای سال لانه ها n ، افراد را کبوتر درنظر می گیریم x

$x = k.n + 1 \rightarrow x = 19 \times 365 + 1 = 6936$

حداقل باید ۶۹۳۶ نفر در سالن حضور داشته باشند تا طبق تعمیم اصل لانه کبوتری حداقل ۲۰ نفر روز تولد یکسانی داشته باشند.

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۲ می شود ۰ یا ۱

اگر سه عدد طبیعی را کبوترها درنظر بگیریم و باقی مانده بر ۲ را که ۲ حالت دارد لانه درنظر بگیریم (۳ کبوتر و ۲ لانه) پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ عدد در یک لانه قرار دارند یعنی باقیمانده یکسانی بر ۲ دارند یعنی حداقل دو عدد طبیعی هر دو فرد اند یا هر دو زوج هستند.

اگر هر دو فرد باشند مجموعشان عددی زوج است ✓

اگر هر دو زوج باشند مجموعشان عددی زوج است ✓

۱۲ مجموعهٔ اعداد $A=\{1, 2, \ldots, 84\}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۴۲ جفت عدد مجموع هرکدام ۸۵

۱ و ۸۴
۲ و ۸۳
۳ و ۸۲
۴ و ۸۱
⋮
۴۲ و ۴۳

جفت اعدادی که از مجموعه A با هم بیایند مجموعشان بشود ۸۵ به صورت روبه رو هستند

هرکدام از این ۴۲ جفت را یک لانه درنظر می گیریم و ۴۳ عضوی که برای این مجموعه انتخاب می کنیم کبوترها

۴۳ کبوتر داریم و ۴۲ لانه و طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می گیرند به عبارتی حداقل دو عضو

در یکی از جفت های موردنظر هستند و مجموعشان می شود ۸۵

۱۳ مجموعهٔ اعداد $A=\{1, 5, 9, 13, \ldots, 77, 81, 85\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

فرمول تصاعد عددی $\rightarrow 4n-3 \quad , 1 \leq n \leq 22$

اعدادی که مجموعشان ۹۰ است

۸۵ + ۵
۸۱ + ۹
۷۷ + ۱۳
۷۳ + ۱۷
۶۹ + ۲۱
۶۵ + ۲۵
۶۱ + ۲۹
۵۷ + ۳۳
۵۳ + ۳۷
۴۹ + ۴۱
~~۴۵ + ۴۵~~

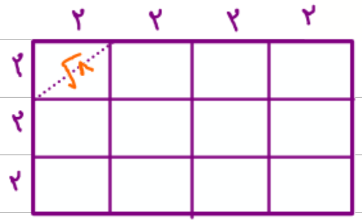
۱۰ حالت داریم.

هر یک از این ۱۰ حالت را یک لانه درنظر می گیریم. ۱۳ عضو انتخابی را هم کبوتر درنظر می گیریم.

چون تعداد کبوترها از لانه ها بیشتر است طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه هستند.

روی آن باشند. یعنی حداقل ۲ عضو از یکی از این ۱۰ حالت اند و مجموعشان می شود ۹۰.

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.



در یک مربع ۲×۲ بیشترین فاصله بین نقاط فاصله بین دو رأس مقابل یعنی همان قطر است و قطر مربع ۲×۲ طبق رابطه فیثاغورس می‌شود $\sqrt{۸}$.

برای پیدا کردن مربع مورد نظر با قطر $\sqrt{۸}$ که معادله زیر را حل می‌کنیم.

$$x^۲+x^۲=\sqrt{۸}^{\,۲} \rightarrow ۲x^۲=۸ \rightarrow x^۲=۴ \rightarrow \boxed{x=۲}$$

پس ما مربع های ۲×۲ لازم داریم و مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم. این ۱۲ مربع را اگر لانه در نظر بگیریم و ۱۳ نقطه را کبوترها آنگاه چون تعداد کبوترها از تعداد لانه ها بیشتر است طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار دارند. به عبارت دیگر حداقل دو نقطه داخل یکی از مربع ها قرار می‌گیرند پس حتما فاصله آنها از قطر مربع یعنی $\sqrt{۸}$ کمتر است.

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

۵ نقطه با مختصات صحیح را کبوتر در نظر می‌گیریم و برای هر نقطه صحیح یکی از چهار حالت $\begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}$ را داریم.

هر کدام از این ۴ حالت را یک لانه در نظر می‌گیریم. چون تعداد کبوترها از لانه‌ها بیشتر است طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه هستند یا به عبارتی دیگر حداقل دو نقطه وجود دارد که زوج یا فرد بودن طول‌ها و عرض‌هاشان مثل هم‌اند. مثلا $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۷ \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{نقطه وسط}}$ $\begin{bmatrix} \frac{۲+۶}{۲} \\ \frac{۳+۷}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$

برای اینکه نقطه وسط هم صحیح بشود کافی است جمع طول‌ها و جمع عرض‌ها زوج بشود که وقتی تقسیم بر ۲ می‌شود عددی صحیح بدهد.

پس حداقل دو نقطه از بین این ۵ نقطه وجود دارد که مختصات نقطه وسط آن دو صحیح باشد.

با احترام

علی سعیدی