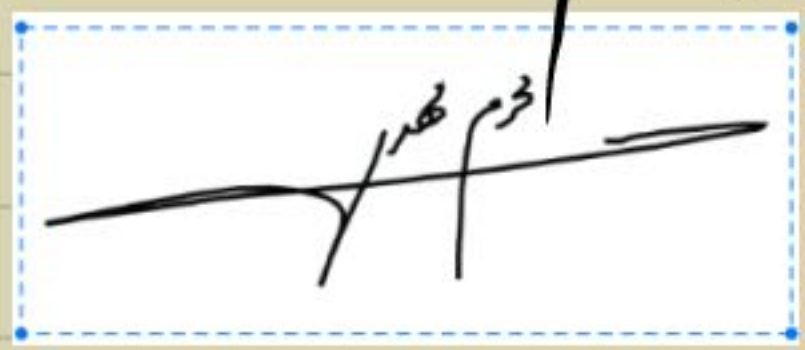
به نام خدا

حل فعالیت ها و کار در کلاس و تمارین ۹۹/۷/۲۰

درس چهارم از فصل اول حسابان ۱



09213102271 - 09213102271- @moharrammahdi

صفحه ۲۳

کار در کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-5-(-3)|=$ ب) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=$ پ) $|1/5-1\frac{1}{2}|=$

الف) $|-5-(-3)| = |-5+3| = |-2| = 2$

ب) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}| = -(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = -\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$= \sqrt{5}-\sqrt{3}$

$\sqrt{3} < \sqrt{5}$

پ) $|1/5-1\frac{1}{2}| = 0$

$1/5$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^۴+۲a^۲+۱}=\sqrt{(\ldots.+\ldots.)^۲}=\ldots.$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(\sqrt{۳}-\ldots.)^۲}=$

صفحه ۲۳

الف) $\sqrt{a^۴+۲a^۲+۱}=\sqrt{(a^۲+۱)^۲}=|a^۲+۱|=$

(مربع کامل)

$a^۲$ همیشه مثبت است، پس عبارت داخل قدر مطلق همیشه مثبت می‌شود

$=a^۲+۱$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=|۲-\sqrt{۳}|=$

(مربع کامل)

$(+)$

$=۲-\sqrt{۳}$

توجه در عبارت‌های مربع کامل مانند $(۷-۴\sqrt{۳})$ یکی از جمله‌ها عدد را کمالی و جمله دوم نصف ضریب را کمال است.

صفحه ۲۵

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند.

۱ از رابطه $\sqrt{a^2}=|a|$ استفاده کنید و نشان دهید که : $|ab|=|a|\,|b|$

۲ با فرض $b\neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که : $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

* با توجه به

① $|ab|=\sqrt{(ab)^2}=\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^2}$

$=|a|\times|b| \rightsquigarrow |ab|=|a||b|$

---

② $\left|\frac{a}{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=$

$=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\frac{|a|}{|b|}$

راه دوم

طبق فعالیت (۱) ↓

$|a|=\left|\frac{a}{b}\times b\right|=\left|\frac{a}{b}\right|\times|b| \rightarrow$

$|a|=\left|\frac{a}{b}\right|\times|b| \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

صفحه ۲۵

فعالیت

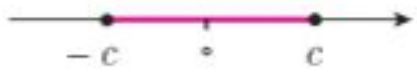
۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله‌های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

(الف) $|x|<c, (c\neq 0)$ (۱)

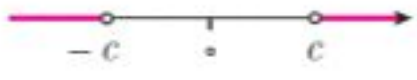
(ب) $|x|>c$ (۳)

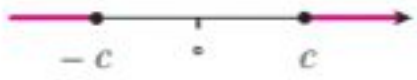
(پ) $|x|\leq c$ (۱)

(ت) $|x|\geq c$ (۴)

(۱) 

(۲)

(۳) 

(۴) 

۲ برای هر عدد حقیقی a نشان دهید که : $-|a| \leq a \leq |a|$

۳ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید که : $-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$

۴ با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید : $|a+b| \leq |a|+|b|$

---

(۲) می دانیم هر عدد کوچکتر یا مساوی خودش است

فرض $|a| = K$

$|a| \leq |a| \longrightarrow |a| \leq K \Longrightarrow$

$\Longrightarrow -K \leq a \leq K \xrightarrow{K=|a|} -|a| \leq a \leq |a|$

---

(۳) با توجه به فعالیت قبل میتوان نوشت

$$\left.\begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array}\right\} + \longrightarrow -|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$$

(۴)

اگر $|a|+|b|=k$ را در نظر بگیریم (*)

طبق فعالیت قبل می‌توان نوشت

$$-k \leqslant a+b \leqslant k$$

بنابراین:

$$-k \leqslant a+b \leqslant k \Rightarrow |a+b| \leqslant k \xrightarrow{\text{با توجه به } *}$$

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

صفحه ۲۸

تمرین

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|$

ب) $g(x)=|x^2-1|$

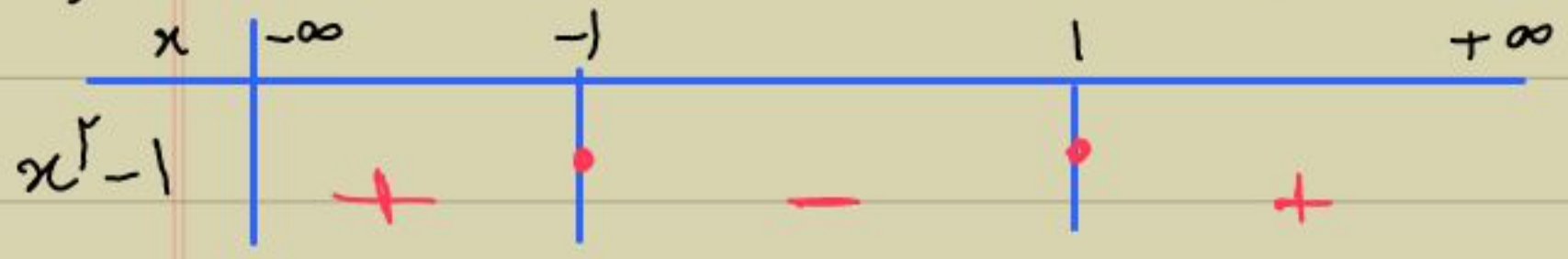
پ) $h(x)=|x-1|+|x+1|$

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x(x) & x \geqslant 0 \\ x(-x) & x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$

$x=0$ ریشه

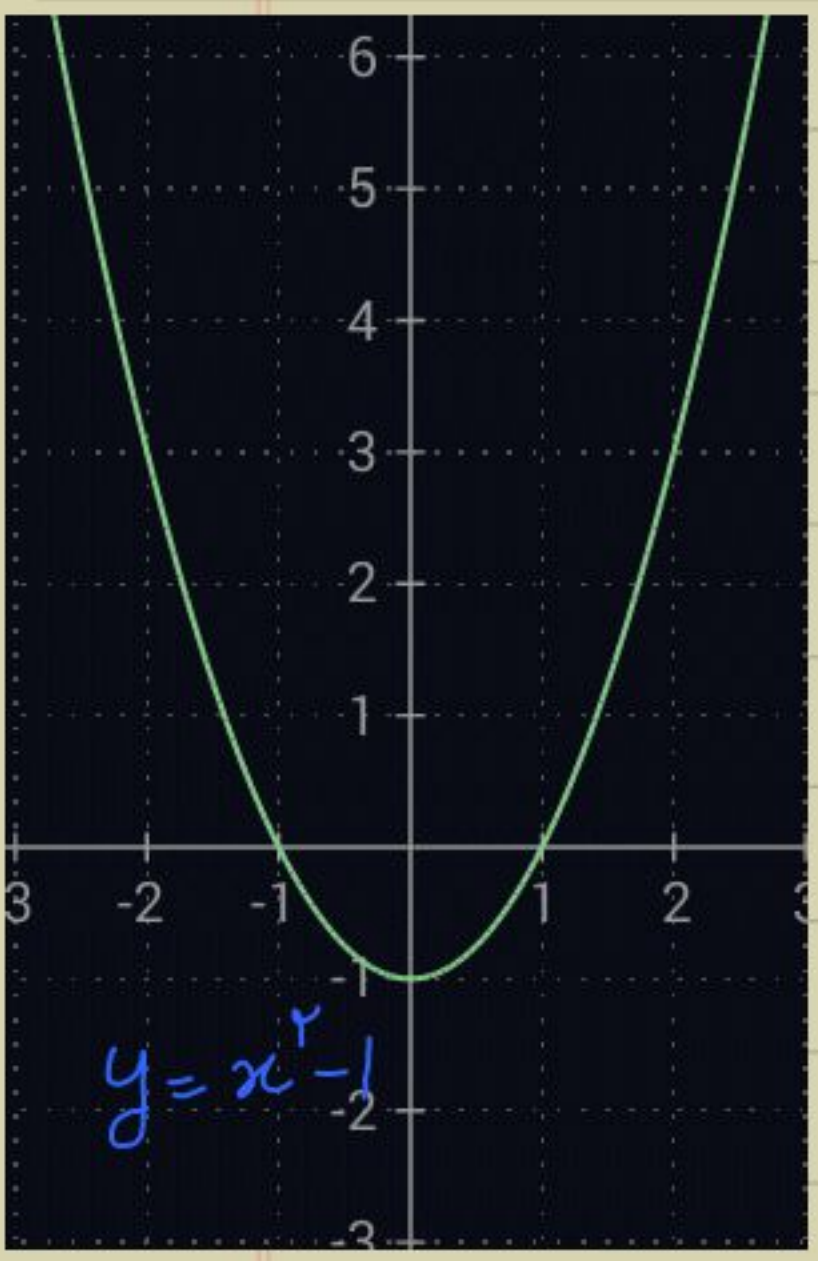
x		0	
x	$-$	0	$+$

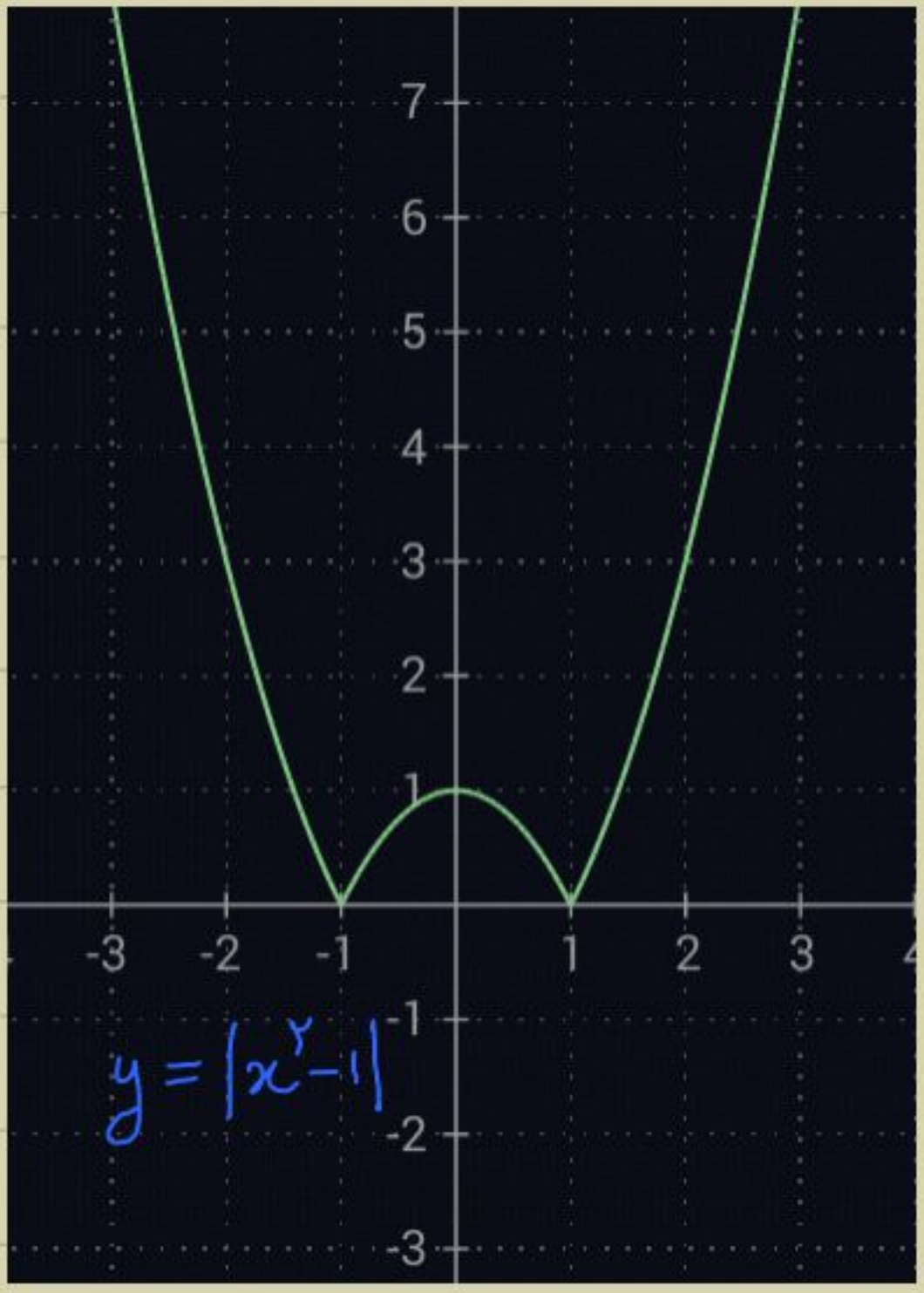
$g(x)=|x^2-1|$ $\quad x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$



$$g(x)=\begin{cases} x^2-1 \ ; & x\leq -1 \ \text{یا} \ x\geq 1 \\ -(x^2-1) \ ; & -1<x<1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x^2-1 \ ; & x\leq -1 \ \text{یا} \ x\geq 1 \\ -x^2+1 \ ; & -1<x<1 \end{cases}$$



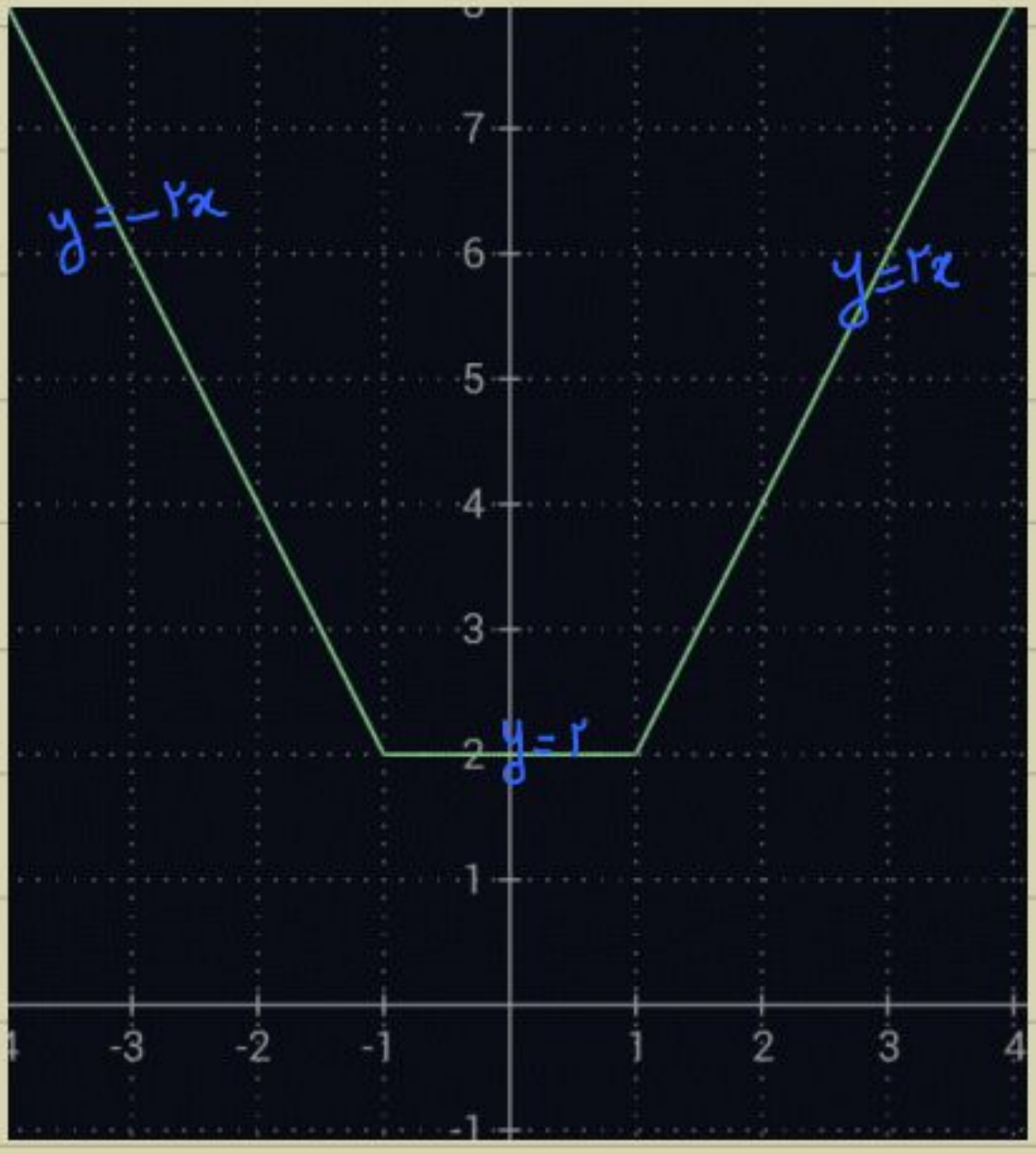


$$h(x) = |x-1| + |x+1|$$

$x-1=0 \rightarrow x=1$ $\quad$ $x+1=0 \rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-$	$-x+1$	$-$	$-x+1$	$+$	$x-1$	
$\lvert x+1\rvert$	$-$	$-x-1$	$+$	$x+1$	$+$	$x+1$	
		$-2x$		2		$2x$	

$$h(x)=\begin{cases} -2x & x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad h(x)=\begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$



۲ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ روی محور xها برابر ۶ باشد؟

نکته: فاصله دو نقطه روی محور طول قدر مطلق تفاضل اعداد متناظر با آن‌هاست

فاصله a, b = $|a-b| = |b-a|$

در این سؤال:

فاصله ۱- و ۳ = $|-1-۳| = ۴$ یا $|۳-(-۱)| = ۴$ ✓

فرض کنید طول نقطه مورد نظر x باشد باید $|x+1| + |x-۳| = ۶$

چون فاصله ۱- و ۳ برابر ۴ است پس x یا باید بزرگ‌تر از ۳ باشد یا کوچک‌تر از ۱-

اگر $x > ۳$ →
- $|x+1|$ ⊕
- $|x-۳|$ ⊕

$\Rightarrow x+1+x-۳=۶ \Rightarrow ۲x=۸ \Rightarrow x=۴$

قابل قبول

اگر $x < -۱$ →
- $|x+1|$ ⊖
- $|x-۳|$ ⊖

$\Rightarrow -x-۱-x+۳=۶ \Rightarrow -۲x=۴$

$x=-۲$

قابل قبول

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به‌صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

ب) دو برابر فاصله بین x و۶ برابر ۴ است.

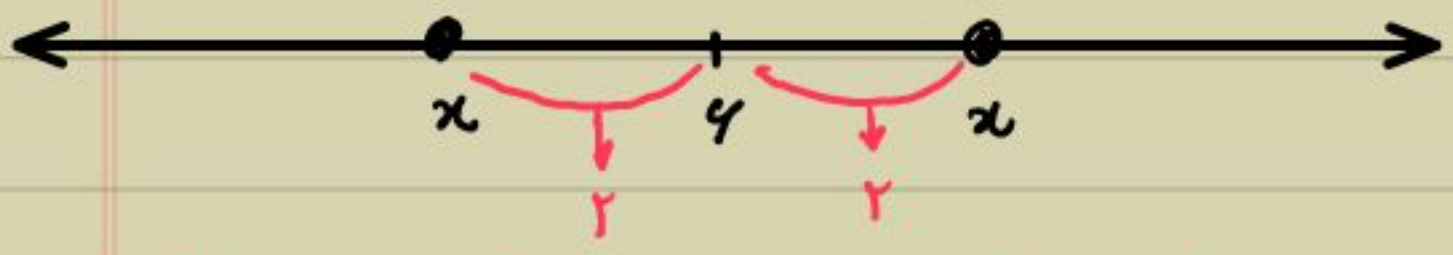
پ) فاصله بین x و ۳- بزرگ‌تر از ۲ است.

الف) $|x-3|=7 \rightarrow$

$x-3=7 \rightarrow x=10$

$x-3=-7 \rightarrow x=-4$

ب) $2|x-4|=4 \Rightarrow |x-4|=2$



$x-4=2 \Rightarrow x=6$ یا $x-4=-2 \Rightarrow x=2$

ب) $|x-(-3)|>2 \Rightarrow |x+3|>2$

$x+3>2 \Rightarrow x>2-3 \Rightarrow x>-1$

$x+3<-2 \Rightarrow x<-2-3 \Rightarrow x<-5$

۴ دو معادلهٔ زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۲-x}{|x-۳|}=۱$

ب) $\sqrt{x^۲-۲x+۱}=۲x+۱$

آگر $x\neq ۳$

الف) $\frac{۲-x}{|x-۳|}=\frac{۱}{۱} \longrightarrow |x-۳|=۲-x$

راه اول $\longrightarrow x-۳=۲-x \Rightarrow ۲x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$ غیرقابل قبول

$x-۳\geq ۰ \rightarrow x\geq ۳$ چون

$x-۳=-(۲-x) \Rightarrow x-۳=-۲+x \Rightarrow -۳=-۲$ غیرممکن

بنابراین معادله جواب ندارد

راه دوم $(|x-۳|)^۲=(۲-x)^۲$

$x^۲-۶x+۹=۴-۴x+x^۲$

$-۲x=-۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$

امتحان جواب

$|\frac{۵}{۲}-۳| \neq ۲-\frac{۵}{۲}$

$\frac{۱}{۲} \neq -\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$ بنابراین معادله جواب ندارد

ب) $\sqrt{x^2-2x+1} = 2x+1$

$\sqrt{(x-1)^2} = 2x+1 \Rightarrow |x-1| = \overbrace{2x+1}^{\text{نامنفی}}$

راه اول

$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x-1 = 2x+1 \Rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2$ ق قبول

$x-1 < 0 \rightarrow x < 1 \Rightarrow -x+1 = 2x+1 \Rightarrow 3x = 0 \rightarrow x = 0$ قابل قبول

راه دوم $(|x-1|)^2 = (2x+1)^2$

$x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

$3x^2 - 2x = 0$

$x(3x-2) = 0$ → $x = 0$

→ $3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

امتحان جواب ⇒

$x = 0 \rightarrow \sqrt{0^2 + 2(0) + 1} = 2(0) + 1 \Rightarrow 1 = 1$ ص

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{4}{3} + 1} = 2(\frac{2}{3}) + 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{7}{3}$

$\frac{4}{9} - \frac{12}{9} + \frac{9}{9} = \frac{1}{9}$ ع

$\frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به‌دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=x-\frac{x}{|x|}$

ب) $y=|x^2-6x|$

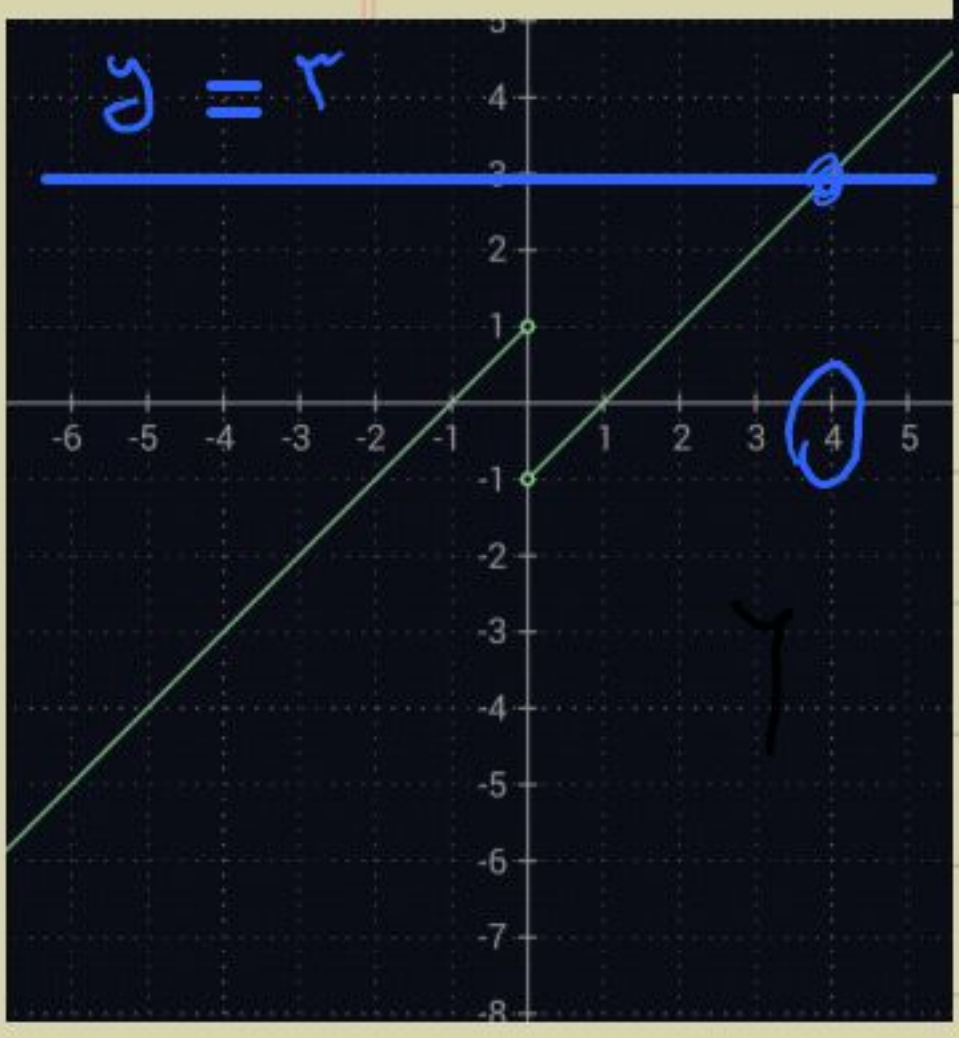
الف) $y=x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases} x-\frac{x}{x}=x-1 & x>0 \\ x-\frac{x}{-x}=x+1 & x<0 \end{cases}$

روش جبری:

$x-\frac{x}{|x|}=3$

$x>0 \rightarrow x-1=3 \rightarrow x=4$ ✓ قابل قبول

$x<0 \rightarrow x+1=3 \rightarrow x=2$ ✗ غیر قابل قبول



روش هندسی

نمودار $y=3$ را رسم می‌کنیم

$x=4$

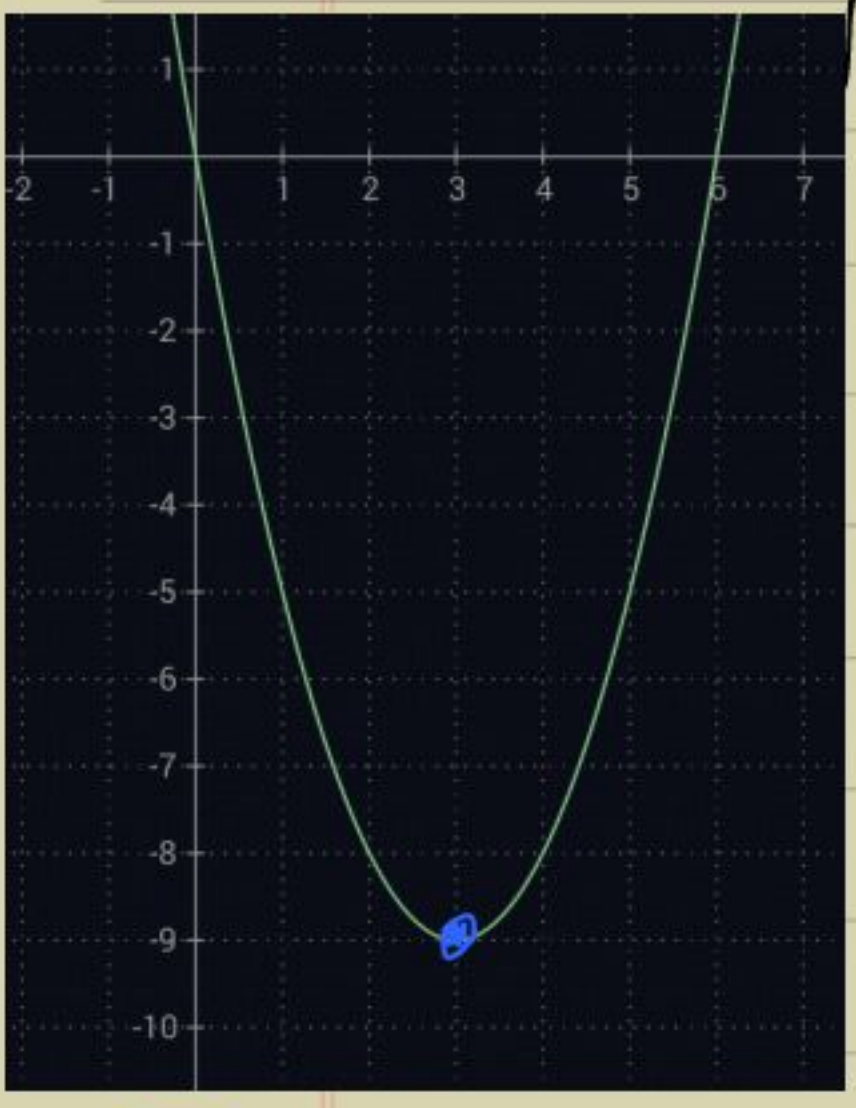
محل برخورد نمودار تابع اول و $y=3$

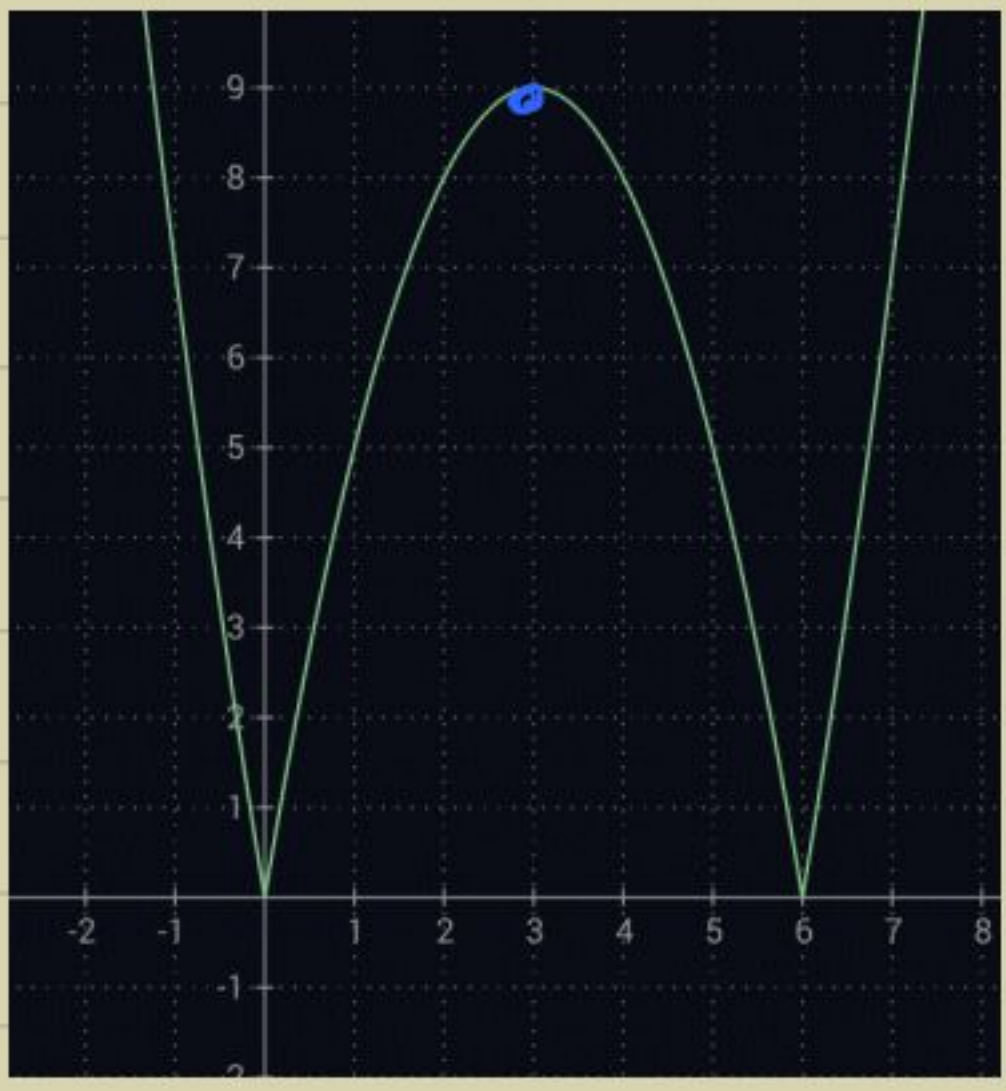
ب) $y=|x^2-6x|$

x		0		6	
x^2-6x	$+$	0	$-$	0	$+$

$$y_1 = x^2-6x+9-9 = (x-3)^2-9$$

نمودار تابع y_1 را با کمک انتقال رسم می‌کنیم و قسمت‌های زیر محور طول را آینه‌وار نسبت به محور طول برمی‌گردانیم





اگر

$x \le 0$ یا $x \ge 6$ $\rightarrow x^2-6x=3$

$x^2-6x-3=0$

$\Delta = 36+12=48 \Longrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{48}}{2}=\dfrac{2(3\pm2\sqrt{3})}{2}$

$\sqrt{12\times4}=4\sqrt{3}$

$x_1 = 3+2\sqrt{3} \simeq 6.46$

$x_2 = 3-2\sqrt{3} \simeq -0.46$

روش حدی

اگر $0<x<7 \Rightarrow -x^2+7x=3$

$$-x^2+7x-3=0 \rightarrow \Delta=49-12=37$$

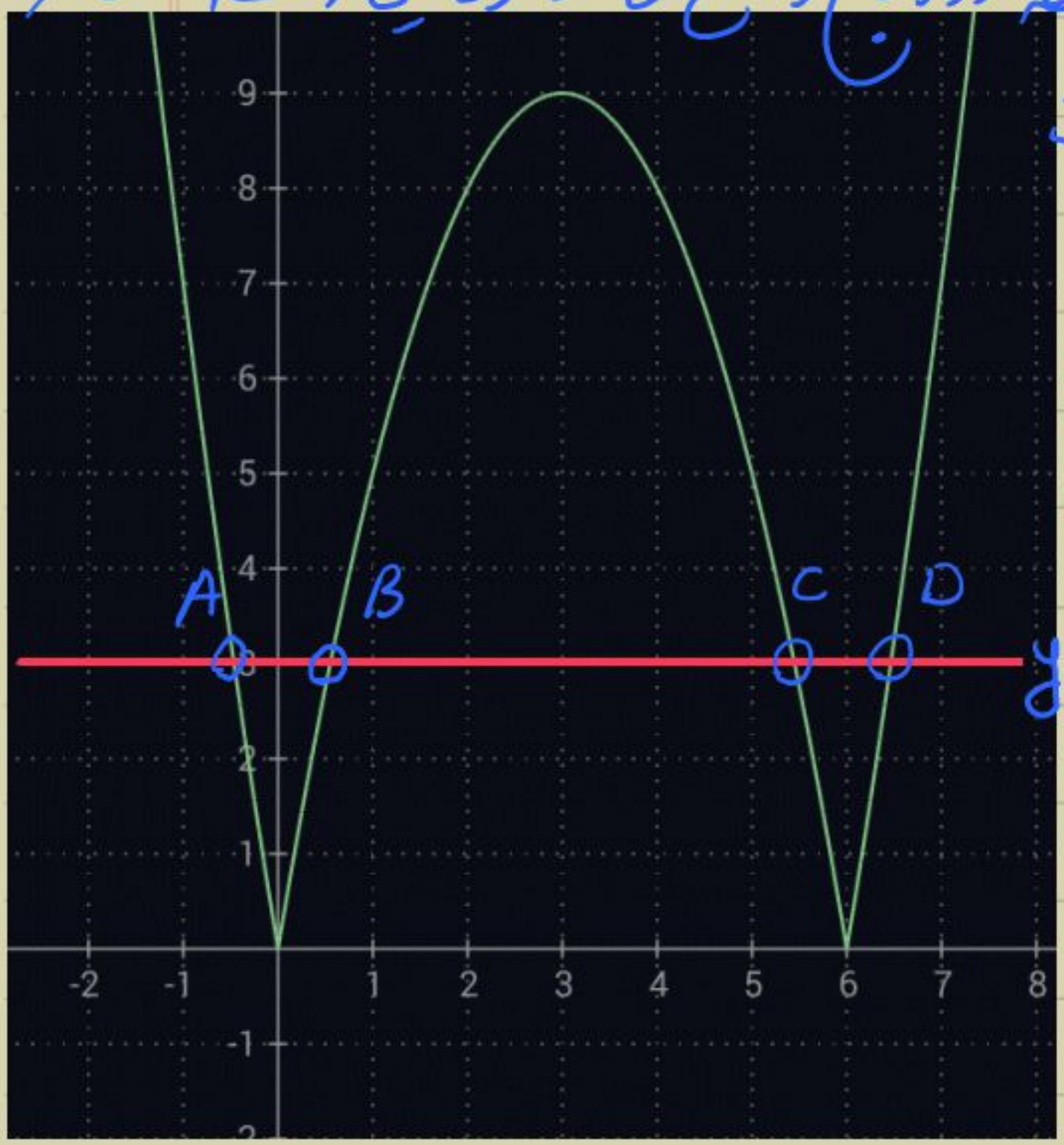
$$x=\frac{-7\pm\sqrt{37}}{-2}=\frac{-7\pm\sqrt{37}}{-2}=\frac{-2(3\mp\sqrt{6})}{-2}$$

$$x_3=3+\sqrt{6}\simeq 5/45$$

$$x_4=3-\sqrt{6}\simeq 0/55$$

روش هندسی

خط $y=3$ در ۴ نقطه نمودار y را قطع می‌کند طول این ۴ نقطه همان x ها جواب معادله است.



طول

$A \Rightarrow x_3$

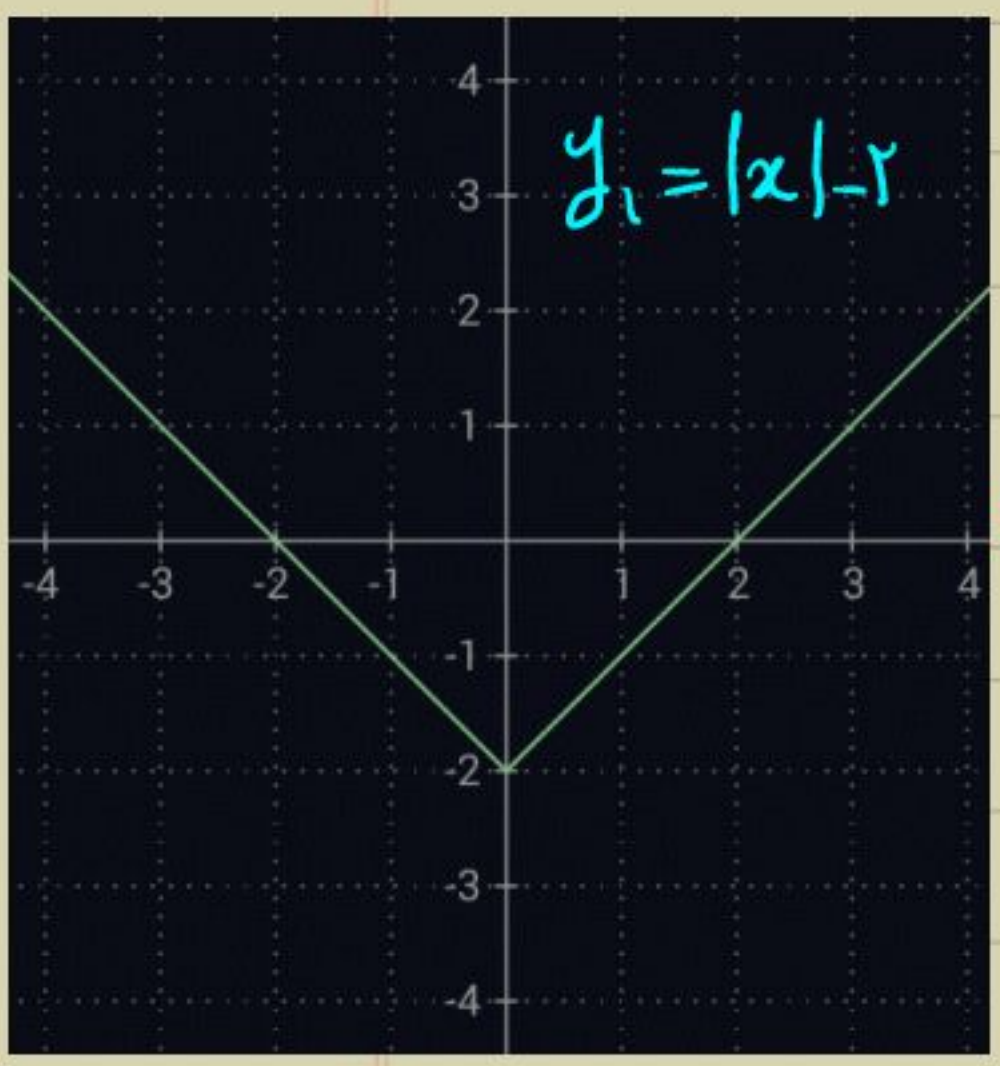
$B \Rightarrow x_4$

$C \Rightarrow x_2$

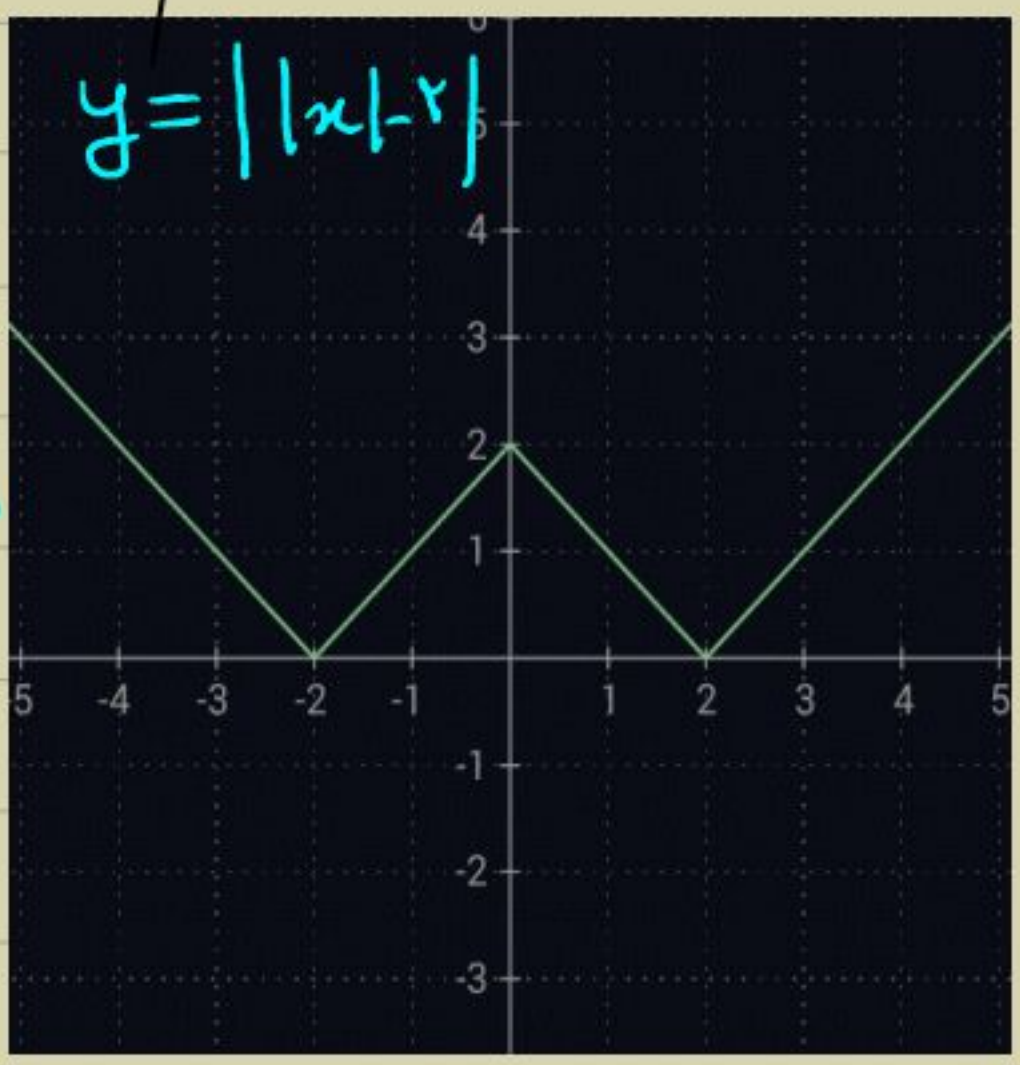
$D \Rightarrow x_1$

۶ نمودار تابع $f(x)=||x|-۲|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x)=۱$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

نمودار تابع $y_1=|x|-۲$ را رسم می‌کنیم، قسمت‌های پائین محور طول‌ها را آینه‌وار بر می‌گردانیم



⇒



روش جبری

$$||x|-۲|=۱$$

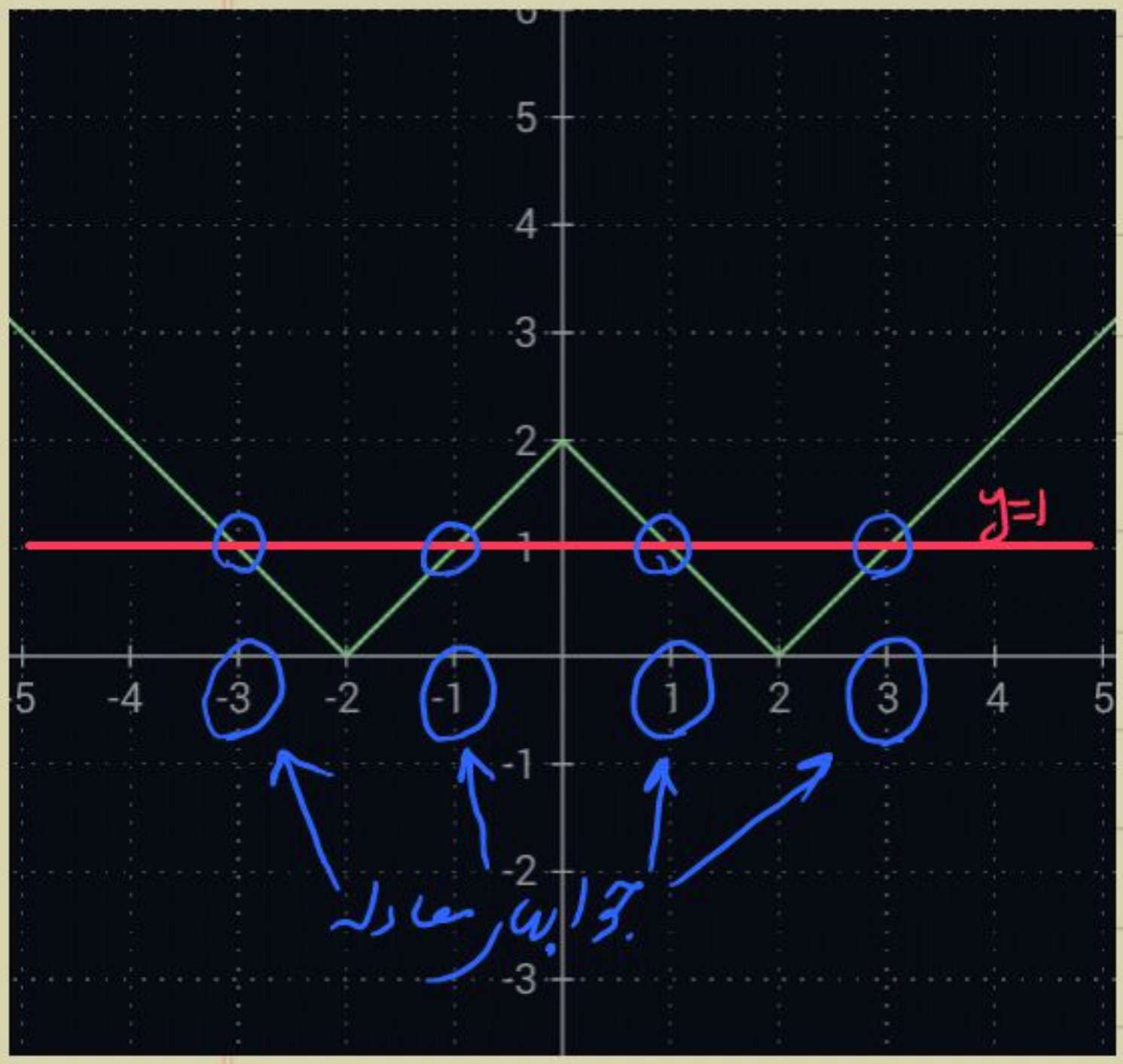
$$|x|-۲=۱ \Rightarrow |x|=۳ \Rightarrow x=\pm ۳$$

یا

$$|x|-۲=-۱ \Rightarrow |x|=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

۴ جواب دارد

روش هندسی



خط $y=1$ را رسم می‌کنیم نمودار را در چهار نقطه قطع می‌کند طول این نقاط برخورد جواب‌های معادله است

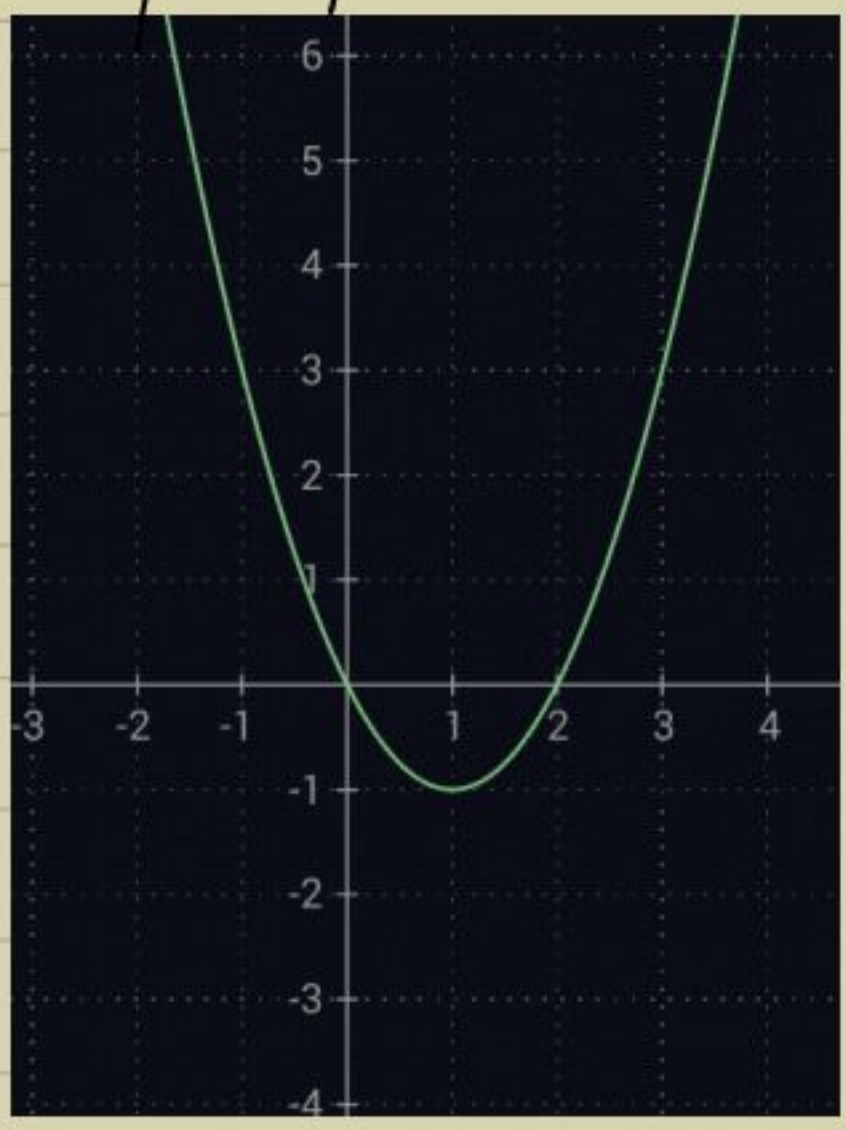
$$||x|-2|=1$$

$$x=-3$$
$$x=-1$$
$$x=1$$
$$x=3$$

۷ نمودار تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2-2x|=2$ را حل نمایید.

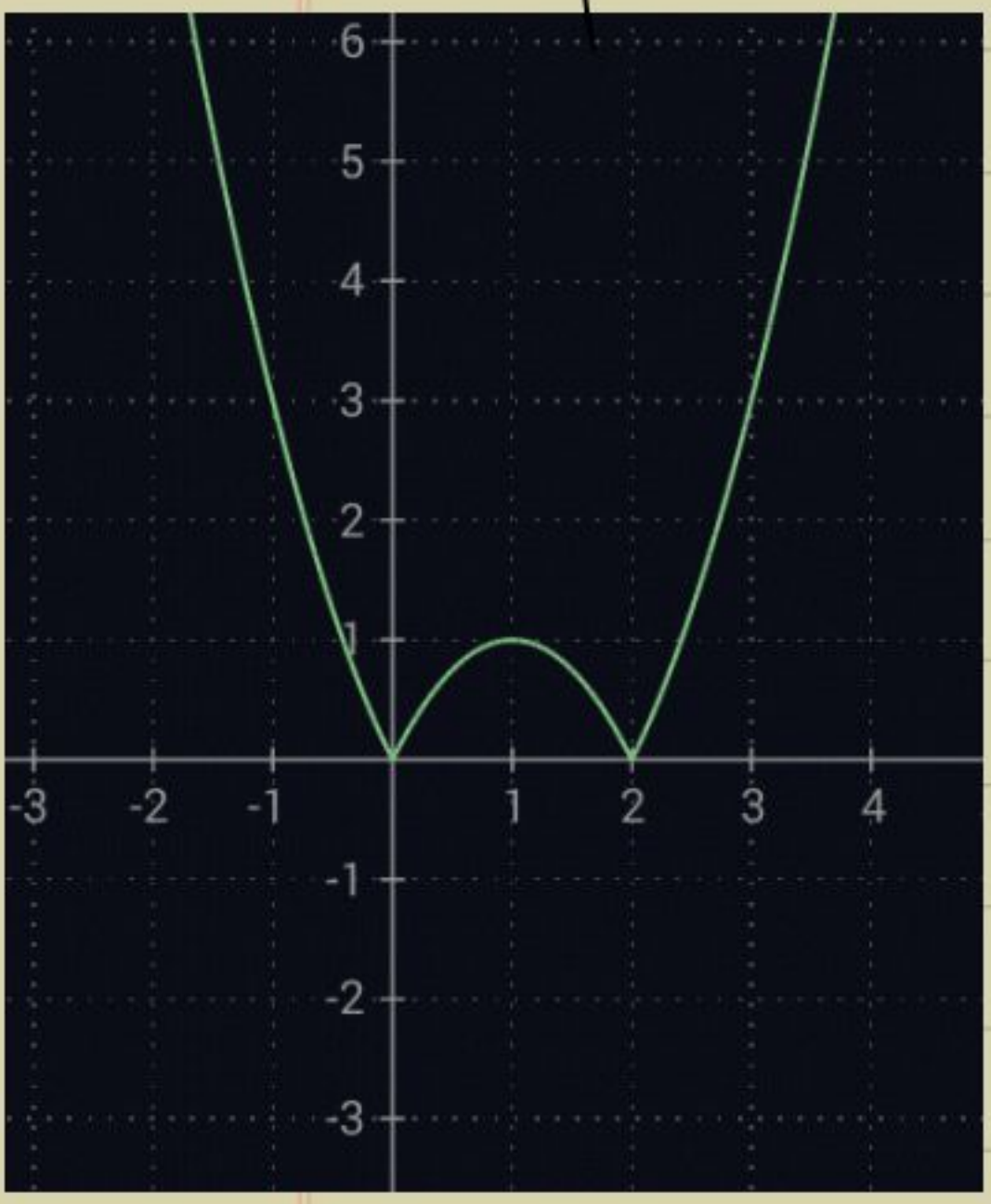
نمودار تابع را با کمک انتقال رسم می‌کنیم

$$f(x)=x^2-2x$$
$$=x^2-2x+1-1$$
$$=(x-1)^2-1$$



← قسمت های پائین محور طول را

↓ بری گردانیم



روش جبری

$$|x^2-2x|=2$$

① $x^2-2x=2 \Rightarrow x^2-2x-2=0$

$$\Delta = 4+8=12$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{2}$$

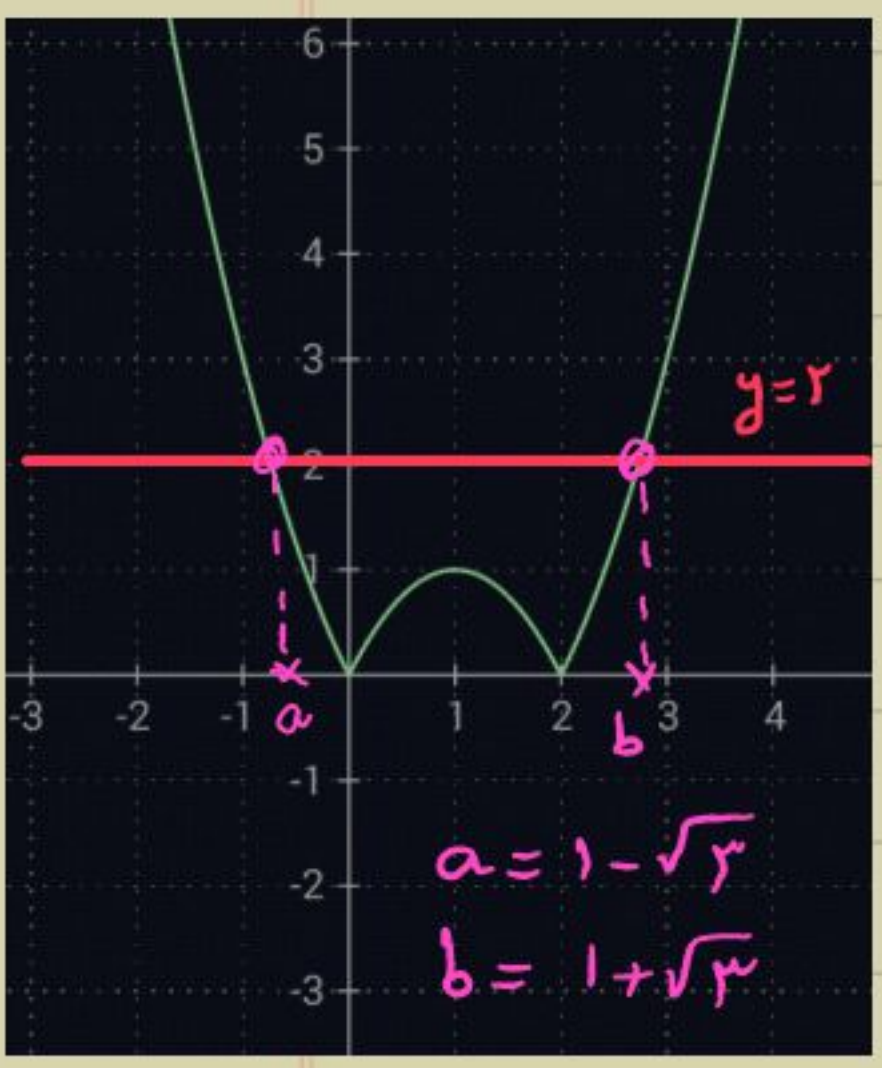
$$x_1=1+\sqrt{3} \qquad x_2=1-\sqrt{3}$$

$$x_1=2/73 \qquad x_2=-0/73$$

② $x^2-2x=-2 \Rightarrow x^2-2x+2=0$

$\Delta = 4-8=-4$ جواب ندارد

روش هندسی



خط $y=2$ را رسم می‌کنیم، نمودار، با آن در ۲ نقطه تقاطع می‌کند، طول این نقاط جواب‌های معادله است.

موفق باشید

محرم محمدی

۹۹/۷/۲۰

09213102271 - 09125102271--@moharrammahd