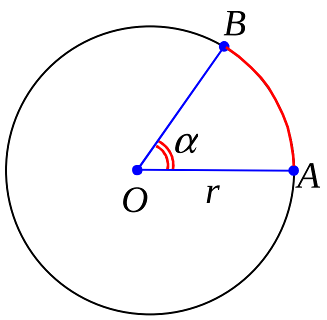
درس اوّل : واحدهای اندازه گیری زاویه

در سالهای گذشته با مفهوم زاویه آشنا شده اید. به یاد می آورید که برای اندازه گیری زاویه از درجه استفاده می شود. در واقع درجه یکی واحدهای اندازه گیری زاویه است. استفاده از درجه در برخی موارد مشکلاتی را به همراه دارد، لذا از واحد های دیگر نیز استفاده می شود. در اینجا در پی آن هستیم که رادیان را به عنوان واحد دیگر اندازه گیری زاویه معرفی نماییم. استفاده از رادیان در برخی مسائل، ضروری است.

قسمت اوّل : آشنایی با رادیان

یک رادیان برابر اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی از یک دایره است که طول کمان روبرو به آن زاویه، برابر شعاع دایره باشد.



$$\overset{\frown}{AB} = r \leftrightarrow \alpha = ۱ \ rad$$

تمرین ۱ : در یک دایره به شعاع ۵ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۰ سانتی متر می باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

تمرین۲ : در یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۲ سانتی متر می باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

نتیجه۱ : اندازه‌ی یک زاویه بر حسب رادیان برابر خارج قسمت اندازه‌ی طول کمان روبرو به آن زاویه بر اندازه ی شعاع آن است.

$$\boxed{\theta = \frac{l}{r}}$$

تمرین ۳ : نشان دهید که محیط یک دایره به شعاع r برابر ۲π رادیان است.

حل :

$$\frac{l}{r} = \frac{۲\pi r}{r} = ۲\pi \ \ rad$$

تمرین۴ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۹۰ درجه (ربع دایره) تعیین کنید که چند رادیان است؟

حل :

$$\frac{۳۶۰}{۲\pi}=\frac{۹۰}{\alpha}\to\alpha=\frac{۲\pi\times۹۰}{۳۶۰}=\frac{\pi}{۲}\ rad$$

تمرین۵ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۱۸۰ درجه (نیم دایره) را برحسب رادیان تعیین کنید.

تمرین۶ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۳۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین۷ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۲۷۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

نتیجه۲ : یک دایره (دوران کامل) برابر ۳۶۰ درجه و ۲π رادیان است.

تمرین برای حل :

۸ : اندازه‌ی زاویه های ۱۲۰ درجه و ۴۵ درجه را برحسب رادیان به دست آورید.

۹ : اندازه‌ی زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان را برحسب درجه به دست آورید.

۱۰ : اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی در یک دایره ۱/۵رادیان و طول کمان روبرو به آن زاویه ۹ سانتی متر است. اندازه‌ی شعاع دایره را بدست آورید.

۱۱ : حساب کنید که چه مدت طول می کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{۵\pi}{۲}$ رادیان دوران کند؟

***

قسمت دوّم : رابطه‌ی بین رادیان و درجه

نظر به اینکه یک دایره کمانی برابر۳۶۰ درجه و ۲π می باشد. با تشکیل تناسب می توان، رابطه‌ی زیر بین اندازه‌ی زاویه بر حسب درجه و اندازه‌ی زاویه بر حسب رادیان بیان کرد.

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{R}{۲\pi}$$

نتیجه : برای تبدیل واحد های اندازه‌ی زاویه از رابطه‌ی زیر استفاده می شود.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

تمرین ۱۰ : اندازه‌ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۱ : اندازه‌ی زاویه ای ۹۰- درجه است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۲ : اندازه‌ی زاویه ای $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

نتیجه : زاویه‌ای که اندازه‌ی آن یک درجه باشد، اندازه‌ی آن بر حسب رادیان برابر $\frac{\pi}{۱۸۰}$ است. بنابراین :

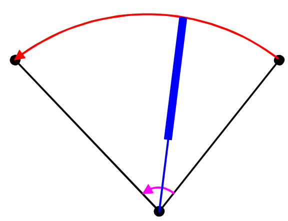
$\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان = یک درجه

تمرین ۱۳ : طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است. فرض کنید برف پاکن، کمانی به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه طی می کند.

الف : اندازه‌ی کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

ب : طول کمان طی شده توسط نوک برف پاکن چند سانتی متر است؟ ($\pi=۳/۱۴$)

حل :

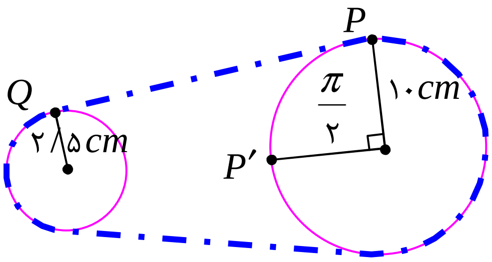


الف) $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow\frac{۱۲۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{۲\pi}{۳}$

ب) $\theta=\frac{L}{r}$

$$\frac{۲\pi}{۳}=\frac{L}{۲۴}\rightarrow L=\frac{۲\pi\times۲۴}{۳}=۱۶\pi\approx۵۰/۲۴\ cm$$

تمرین ۱۴ : در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع های ۱۰ و ۲/۵ سانتی متر را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره‌ی بزرگتر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان می چرخد، (یعنی نقطه‌ی P در موقعیت P' قرار می گیرد.) قرقره‌ی کوچکتر چند رادیان می چرخد؟ ($\pi\ rad = ۳/۱۴\ rad$)



حل : ابتدا مسافتی را که نقطه‌ی P بر روی محیط قرقره‌ی بزرگتر طی می کند، به دست می آوریم.

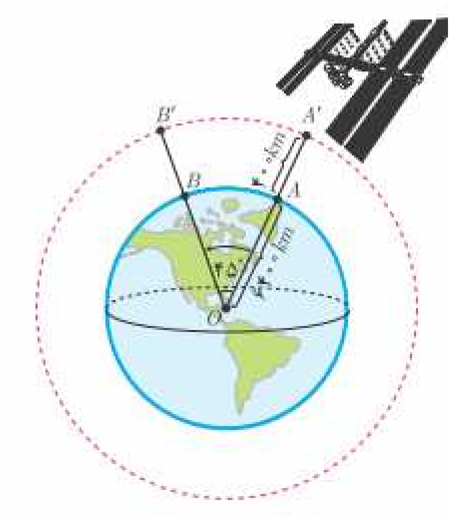
$$\theta = \frac{\overset{\frown}{PP'}}{R} \to \overset{\frown}{PP'} = R\theta = ۱۰ \times \frac{\pi}{۲} = ۵\pi = ۱۵/۷\ cm$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره‌ی کوچکتر نیز ۵π سانتی متر حرکت می کند. برای این قرقره داریم:

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{۵\pi}{۲/۵} = ۲\pi\ \ rad$$

بنابراین وقتی قرقره‌ی بزرگتر ربع دور می چرخد، قرقره‌ی کوچک تر یک دور کامل می چرخد و نقطه‌ی Q به مکان خود باز می گردد.

تمرین ۱۵ : ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله‌ی تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره‌ی زمین قرار دارد. این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B که با مرکز زمین زاویه‌ی ۴۵ درجه می سازد، رصد می شود. تعیین کنید که این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' تا B' پوشش می دهد؟ شعاع تقریبی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.



حل :

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to \frac{۴۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to R = \frac{\pi}{۴} \to \angle\alpha = \frac{\pi}{۴}\ \ rad$$

$$\alpha=\frac{L}{r}\to\frac{\pi}{۴}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۶۴۰۰+۴۰۰}\to\frac{\pi}{۴}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۶۸۰۰}\to\overset{\frown}{A'B'}=\frac{۶۸۰۰\pi}{۴}\approx ۵۳۳۸\quad km$$

تمرین برای حل :

۱۶ : اندازه‌ی زاویه ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۳ بعد از ظهر حرکت می کند را برحسب درجه و رادیان بیان کنید.

۱۷ : اندازه‌ی زاویه ای $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه را برحسب درجه به دست آورید.

۱۸ : یک دایره‌ی مثلثاتی رسم کنید و روی آن زاویه های منطبق بر محور های مختصات را برحسب رادیان مشخص کنید.

۱۹ : جدول زیر را کامل کنید.

زاویه برحسب درجه	۱۳۵			۱۵
زاویه بر حسب رادیان		$-\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	

۲۰ : درستی یا نادرستی جملات زیر را بنویسید.

الف) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر، طول کمان روبرو به زاویه‌ی π رادیان، تقریباً برابر ۳/۱۴ سانتی متر است.

ب) انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان ، در ربع دوّم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

ج) اگر زاویه‌ی بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی برابر ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه‌ی قاعده‌ی این مثلث ، کوچکتر از اندازه‌ی هر یک از ساق های آن است.

د) زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۹}$ رادیان و $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان ، زاویه های یک مثلث را تشکیل می دهند.

***

جداول مقادیر نسبت های مثلثاتی تعدادی از زاویه ها

الف) زاویه های مهم

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نامعین
cot		نامعین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

تمرین ۲۱ : مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A = ۲\sin\frac{\pi}{۶} + \tan\frac{\pi}{۴} - \sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۶} + ۴\sin\frac{\pi}{۲}$$

ب) زاویه های مرزی

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	۱-	۰
cos		۱	۰	۱-	۰	۱
tan		۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

تمرین ۲۲ : مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$B = \sin\frac{\pi}{۲}\cos\pi - ۲\tan\frac{\pi}{۴} - \sqrt{۳}\tan ۲\pi + ۴\sin\frac{۳\pi}{۲}$$

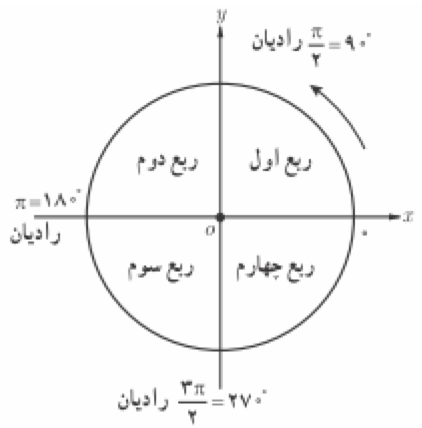
***

تهیه کننده : جابر عامری

درس دوّم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

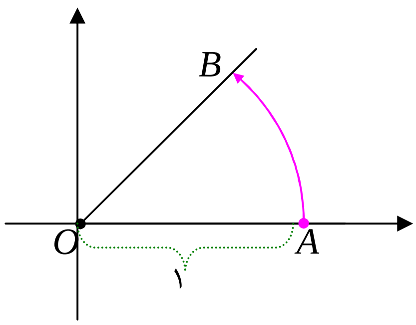
در این درس علاوه بر یادآوری تعدادی از روابط مثلثاتی سال قبل، روابط جدیدی نیز بین نسبت های مثلثاتی معرفی می نماییم.

قسمت اوّل : یادآوری تعدادی از روابط مثلثاتی



می دانید، دایره‌ای است که مرکز آن مبدأ مختصات و اندازه‌ی شعاع آن یک واحد طول باشد، را دایره‌ی مثلثاتی یا دایره‌ی استاندارد می نامند.

در هر دایره‌ی مثلثاتی برای تشکیل زاویه، نقطه‌ی A را مبدأ حرکت در نظر می گیرند. حال اگر نقطه‌ی A را حول مرکز دایره دوران دهیم تا نقطه‌ی B بدست آید، در این صورت زاویه ی AOB حاصل می شود.

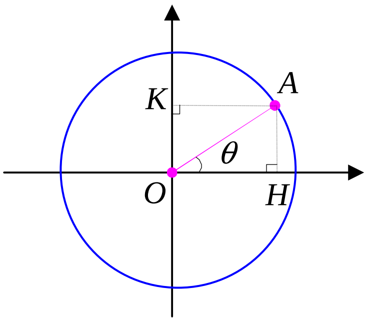


تذکر :

۱ : اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را مثبت و اگر درجهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را منفی در نظر می گیرند.

۲ : اگر نقط ی A دوران داده نشود، زاویه صفر می باشد. اگر نقطه‌ی A را به اندازه ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اوّلیه‌ی خود بر می گردد. یک دوران کامل زاویه ای برابر ۳۶۰ درجه یا 2π را تشکیل می دهد.

تمرین ۱ : زاویه‌ی $\frac{3\pi}{4}$ رادیان ، در کدام ربع از دایره‌ی مثلثاتی قرار می گیرد؟ این زاویه را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید.



بر این اساس می توان نسبت های مثلثاتی را روی دایـره‌ی مثلثاتی نیـز تعریف کرد.

اگر نقطه‌ی $A(x_\circ , y_\circ)$ روی دایره‌ی استاندارد قرار گیرد. در این حالت می توان نوشت:

$$OA = r = ۱$$

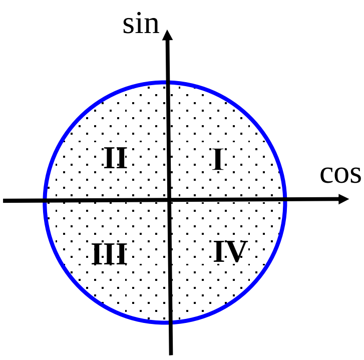
$$\sin\theta = \frac{y_\circ}{r} = \frac{y_\circ}{۱} = y_\circ \qquad \text{و} \qquad \cos\theta = \frac{x_\circ}{r} = \frac{x_\circ}{۱} = x_\circ$$

$$\tan\theta = \frac{y_\circ}{x_\circ} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{و} \qquad \cot\theta = \frac{x_\circ}{y_\circ} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه‌ی OAH می توان نوشت:

$$x_\circ^{۲} + y_\circ^{۲} = r^{۲} \rightarrow \cos^{۲}\theta + \sin^{۲}\theta = ۱$$

به همین جهت است که محور طول ها را محور کسینوس ها و محور عرض ها را محور سینوس ها می نامند.



گاهی لازم می شود، که علامت نـسبت هـای مثلثـاتی را در نـواحی متخلف را داشته باشیم. با توجه به تعریف قبل می توان جدول زیر را برای تشخیص علامت نسبت های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی تنظیم نمود.[1]

	ربع اوّل	ربع دوّم	ربع سوّم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

[1]. برخی برای حفظ کردن علامت های جدول ، به ترتیب نواحی و فقط برای خانه های مثبت نسبت های سینوس ، کسینوس و تانژانت ، از حروف کلمه ی **هستک** استفاده می کنند.

با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی ، می توان اتحاد های زیر را بیان نمود.

۱. $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$	۳. $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	۵. $۱+\cot^{۲}\alpha=\dfrac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$
۲. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	۴. $۱+\tan^{۲}\alpha=\dfrac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$	۶. $\tan\alpha.\cot\alpha=۱$

نتیجه : اگر α یک زاویه‌ی دلخواه باشد. در این صورت:

الف) $\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha$

ب) $\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha$

ج) $\tan\alpha=\dfrac{۱}{\cot\alpha}$

د) $\cot\alpha=\dfrac{۱}{\tan\alpha}$

همچنین با توجه به تعاریف فوق واضح است که سینوس و کسینوس هر زاویه ، عددی است که در فاصله‌ی $[-۱,۱]$ قرار می گیرد.

$$-۱\le\cos\theta\le۱ \quad و \quad -۱\le\sin\theta\le۱$$

تمرین ۲ : اگر یک ضلع زاویه‌ی θ در ربع سوّم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin\theta=-\dfrac{۱}{۳}$ باشد. سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

تمرین ۳ : اگر $\cot\alpha=-۲$ و $\cos\alpha>۰$ ، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α را تعیین کنید.

تمرین برای حل :

۴ : اگر $\cos x=-\dfrac{۴}{۵}$ و $\sin x>۰$ نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه‌ی x را بیابید.

۵ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot\dfrac{\pi}{۶}-\tan\dfrac{\pi}{۳}\times\sin\dfrac{\pi}{۴}=$

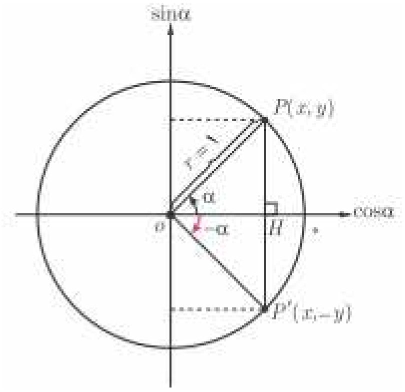
ب) $\dfrac{\tan^{۲}(\frac{\pi}{۶})+\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴})}{\cot^{۲}(\frac{\pi}{۴})-\cos^{۲}(\frac{\pi}{۳})}+\cos^{۲}(۷۵)+\sin^{۲}(۷۵)=$

***

قسمت دوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

اگر α یک زاویه روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، $-\alpha$ قرینه‌ی آن است. با توجه به شکل مقابل بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و قرینه‌ی آن یعنی $-\alpha$ رابطه‌ی زیر وجود دارد.

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$$



تمرین۶ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۳۰- درجه را به دست آورید.

تمرین۷ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\cos(-\frac{\pi}{۳})\times\cos(-\frac{\pi}{۶})+\tan(-\frac{\pi}{۴})=$

ب) $\dfrac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)}=$

ج) $\cot(-\frac{\pi}{۶})+\tan(-\frac{\pi}{۳})=$

د) $\cos(-۴۵^\circ)\times\cos(-۶۰^\circ)+\sin(-۴۵^\circ)\times\sin(-۶۰^\circ)=$

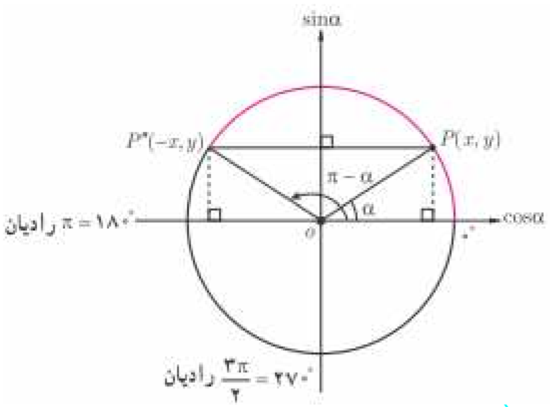
***

قسمت سوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

دو زاویه را مکمل گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها۱۸۰ درجه یا π رادیان[2] باشد. اگر β و αدو زاویه‌ی مکمل باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha+\beta=\pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=\pi-\alpha$$

بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و مکمل آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، می تـوان رابطـه‌ی زیـر را نوشت :



$$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot(\alpha)$$

تمرین۸ : مکمل هر یک از زاویه های زیر را مشخص کنید.

الف) ۷۵° ب) ۲۵° ج) $\frac{\pi}{۱۲}$ د) $\frac{-\pi}{۴}$

تمرین ۹: حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\tan\frac{۲\pi}{۳}=$

ب) $\cos\frac{۳\pi}{۴}=$

پ) $\sin ۱۲۰^\circ=$

ت) $\cot(-۱۲۰^\circ)=$

ث) $\cos(۱۳۵^\circ)=$

تمرین۱۰ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را به دست آورید.

---

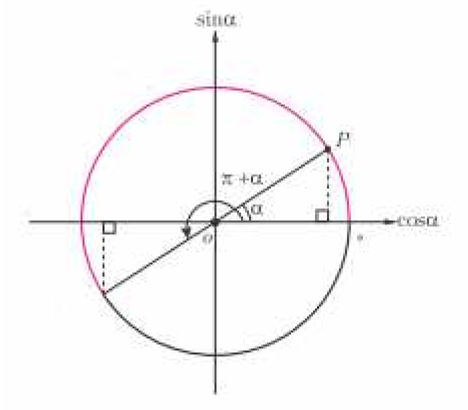
2. و به طور کلی مجموع آنها $۲k\pi+\pi$ رادیان باشند.

قسمت چهارم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف π رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۱۸۰ درجه یا π رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta - \alpha = \pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \pi + \alpha$$

لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot(\alpha)$$

تمرین ۱۱ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۲۲۵ درجه را به دست آورید.

تمرین ۱۲ : حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\cot\frac{5\pi}{4} =$

ب) $\cos(-\frac{4\pi}{3}) =$

پ) $\sin 225^\circ =$

ت) $\tan(225^\circ) =$

ث) $\sin(-\frac{7\pi}{6}) =$

تمرین ۱۳ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را به دست آورید.

قسمت پنجم : نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم

دو زاویه را متمم گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها ۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان[۳] باشد. اگر β و α دو زاویه‌ی متمم باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=\frac{\pi}{۲}-\alpha$$

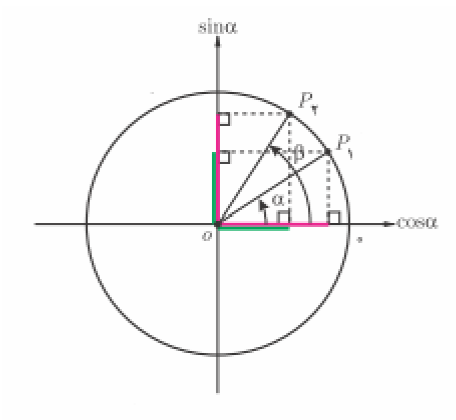
بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و متمم آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan(\alpha)$$



تمرین ۱۴ : متمم زاویه های زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{\pi}{۷}$ ب) -۲۵°

تمرین ۱۵: اگر $\sin ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$، حاصل تساوی زیر را تعیین کنید.

$\cos(۷۵^\circ)=$

تمرین ۱۶ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sin ۷۲^\circ=\cos(\quad)$ ب) $\tan\frac{۵\pi}{۱۴}=\cot(\quad)$

---

[3] و به طور کلی مجموع آنها $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ رادیان باشند.

قسمت ششم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. در ایـن صـورت مـی تـوان نوشت، $\beta-\alpha=\frac{\pi}{۲}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=\frac{\pi}{۲}+\alpha$$

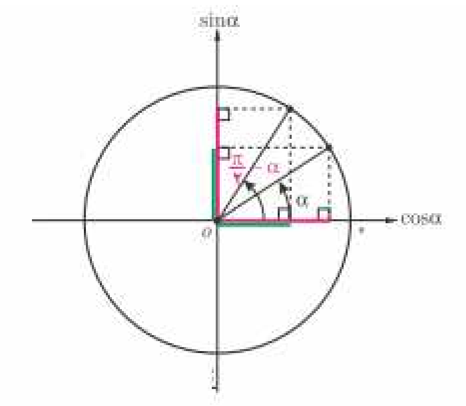
لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan(\alpha)$$



تمرین۱۷ : حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

$$\sin(\frac{۲\pi}{۳})=$$

تمرین۱۸ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۳۵ درجه را به دست آورید.

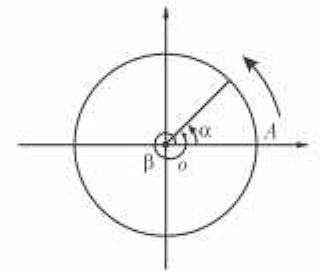
***

قسمت هفتم : نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل 2π رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۳۶۰ درجه یا 2π رادیان شود. در این صورت مـی تـوان نوشت، $\beta-\alpha=2\pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=2\pi+\alpha$$

لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin(\alpha)$$
$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos(\alpha)$$
$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan(\alpha)$$
$$\cot(2\pi+\alpha)=\cot(\alpha)$$

تمرین۱۹ : حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\sin(405^\circ)=$

ب) $\cos(\frac{5\pi}{3})=$

***

روش سریع محاسبه‌ی نسبت های مثلثاتی

بر اساس آنچه که تاکنون داشتیم می توان روابط دیگری را بررسی کرد که به طور مختصر این روابط را بـه شکل زیر عنوان می کنیم.

الف) اگر زاویه‌ی مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

ب) در نسبت های مثلثاتی سینوس وکسینوس می توان مضربهای زوج π را حذف کرد ولی اگر مـضربهای فرد π را حذف کنیم،باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(3\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin(3\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$

ج) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضربهای صحیح π را می توان حذف کرد.

مثلاً:

$$\tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(۳\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

د) در تمام نسبت های مثلثاتی می توان $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ را حذف کرد ولی پس از حذف باید:

۱. سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تغییر داد و برعکس

۲. با فرض حاده بودن زاویه‌ی α، ربعی که زاویه‌ی مثلثاتی در آن واقع است را روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده و جلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=+\cos\alpha$$ ربع دوّم

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$ ربع سوّم

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=+\cot\alpha$$ ربع اوّل

توجه ۱ : اگر $n\in N$ آنگاه همواره داریم:

$$\tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \sin(n\pi+\alpha)=(-۱)^n\sin\alpha$$

$$\cot(n\pi+\alpha)=\cot\alpha \qquad \cos(n\pi+\alpha)=(-۱)^n\cos\alpha$$

توجه۲ : با توجه به قواعد بالا همواره داریم.

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha \qquad \sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$

***

تمرین ۲۰: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\tan 120^\circ =$

۲) $\cos(135^\circ) =$

۳) $\cot(210^\circ) =$

۴) $\cos(-150^\circ) =$

۵) $\sin(\frac{13\pi}{2} - \alpha) =$

۶) $\sin(\alpha - 3\pi) =$

تمرین ۲۱ : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt{2}\sin(135^\circ) - 2\cot(30^\circ).\cos(210^\circ) - \tan(-135^\circ) = 3$$

تمرین ۲۲ : در تساوی زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

$$\sin(x) = \cos(10^\circ + x)$$

حل : دو زاویه باید متمم همدیگر باشند. پس :

$$x + 10 + x = 90 \to 2x = 80 \to x = 40$$

***

تمرین برای حل:

۲۳ : مقدار دقیق عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(\frac{3\pi}{4}) =$

ب) $\tan(\frac{11}{6}\pi) =$

ج) $\cos(\frac{25\pi}{3})$

۲۴ : نشان دهید که $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos(\pi - \theta) = 0$

۲۵ : مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\tan(-30^\circ)\cot(150^\circ) - \tan(135^\circ) =$

ب) $\dfrac{\sin(240^\circ)\times\cos(120^\circ) + \cos(-270^\circ)\times\sin(30^\circ)}{\cos(225^\circ)\times\cos(-135^\circ) + \tan(45^\circ)} =$

۲۶ : حاصل $\tan(20^\circ) + \tan(40^\circ) + \tan(60^\circ) + \ldots + \tan(180^\circ)$ را به دست آورید.

۲۷ : حاصل $\dfrac{\sin(300^\circ)}{1-\cos(240^\circ)}$ را به دست آورید.

۲۸ : مقدار عددی عبارت مقابل را تعیین کنید.

$$A=\frac{\cos(240^\circ)+\sin(-150^\circ)}{\tan(-45^\circ)}$$

۲۹ : درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف)

$$\sin(\frac{\pi}{2}+x)\times\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(x-2\pi)\times\sin(x-\pi)+\tan(-x)\times\tan(\frac{\pi}{2}+x)=1$$

ب) $3\sin(70^\circ)+\sin(55^\circ)+\cos(215^\circ)+2\cos(160^\circ)=\cos(20^\circ)$

۳۰ : رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\sin(230^\circ)-2\sin(140^\circ)+\sin(410^\circ)+\cos(-50^\circ)+\sin(40^\circ)=0$$

۳۱ : آیا دو زاویه می توان یافت که سینوس یکسان داشته باشند؟ چرا؟ برای کسینوس چطور؟

۳۲ : درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin(840^\circ)=\sin(60^\circ)$

ب) $\cos(-324^\circ)=\cos(36^\circ)$

ج) $\tan(-1000^\circ)=\tan(80^\circ)$

د) $\sin(875^\circ)=\sin(155^\circ)$

۳۳ : در تساوی های زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

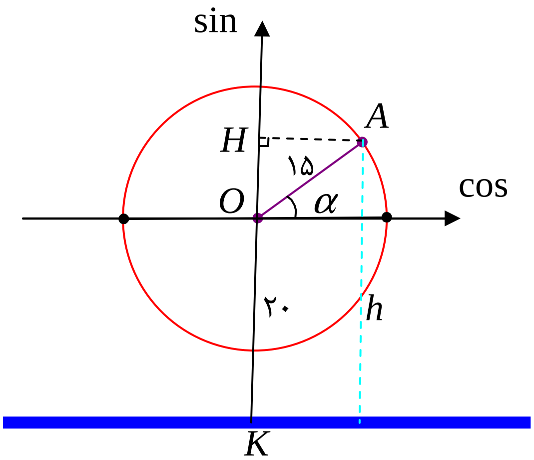
الف) $\sin(x)=\cos(20^\circ+x)$

ب) $\tan(x+\frac{\pi}{18})=\cot(\frac{2\pi}{9}+x)$

***

درس سوّم : توابع مثلثاتی

قبل از ورود به بحث، توابع مثلثاتی، مثال زیر را حل می کنیم.



یک شهر بازی چرخ و فلکی دارد که شعاع دایره‌ی آن ۱۵ متر است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ و فلک تا سطح زمین ۲۰ متر است. واضح است که ارتفاع هر کابین مانند کابین A با تغییر زاویه‌ی α تغییر می کند و برای ارتفاع کابین می توان نوشت:

$$\sin\alpha=\frac{OH}{OA}\to OH=OA.\sin\alpha=۱۵\sin\alpha$$

$$h=KH=OK+OH=۲۰+۱۵\sin\alpha$$

$$\to h=۲۰+۱۵\sin\alpha$$

هر تابع مشابه تابع فوق را یک **تابع مثلثاتی** می نامند. با توجه به این تابع به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف: ارتفاع کابین را وقتی که $\alpha=۱۲۰^\circ$ را به دست آورید.

ب : مقدار حداقلی و مقدار حداکثری ارتفاع کابین را تعیین کنید.

ج : تعیین کنید، که زاویه‌ی α چقدر باشد تا ارتفاع کابین ۲۰ متر شود.

***

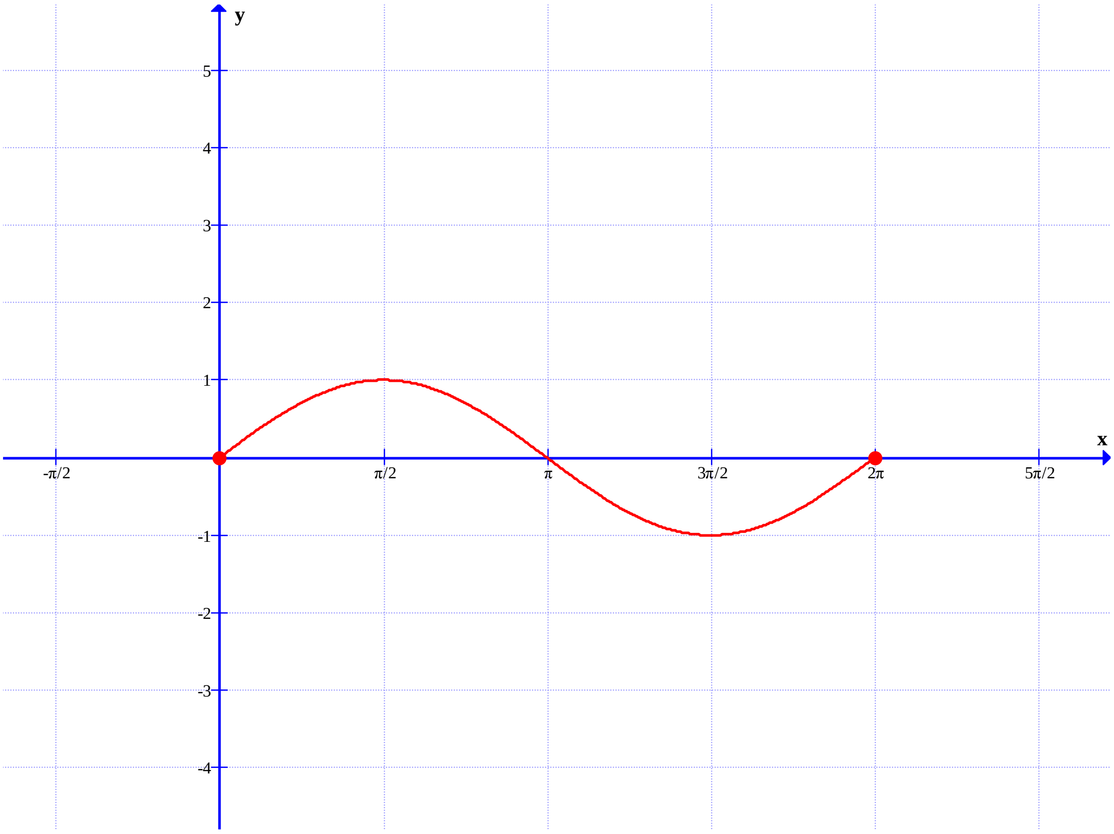
قسمت اوّل : توابع مثلثاتی

هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گویند. تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ ساده ترین تابع های مثلثاتی هستند. برای رسم نمودار چنین توابعی ساده ترین روش، انتخاب چند نقطه به کمک معادله و پیدا کردن آنها روی دستگاه مختصات (روش نقطه یابی) می باشد.

مثال ۱ : نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

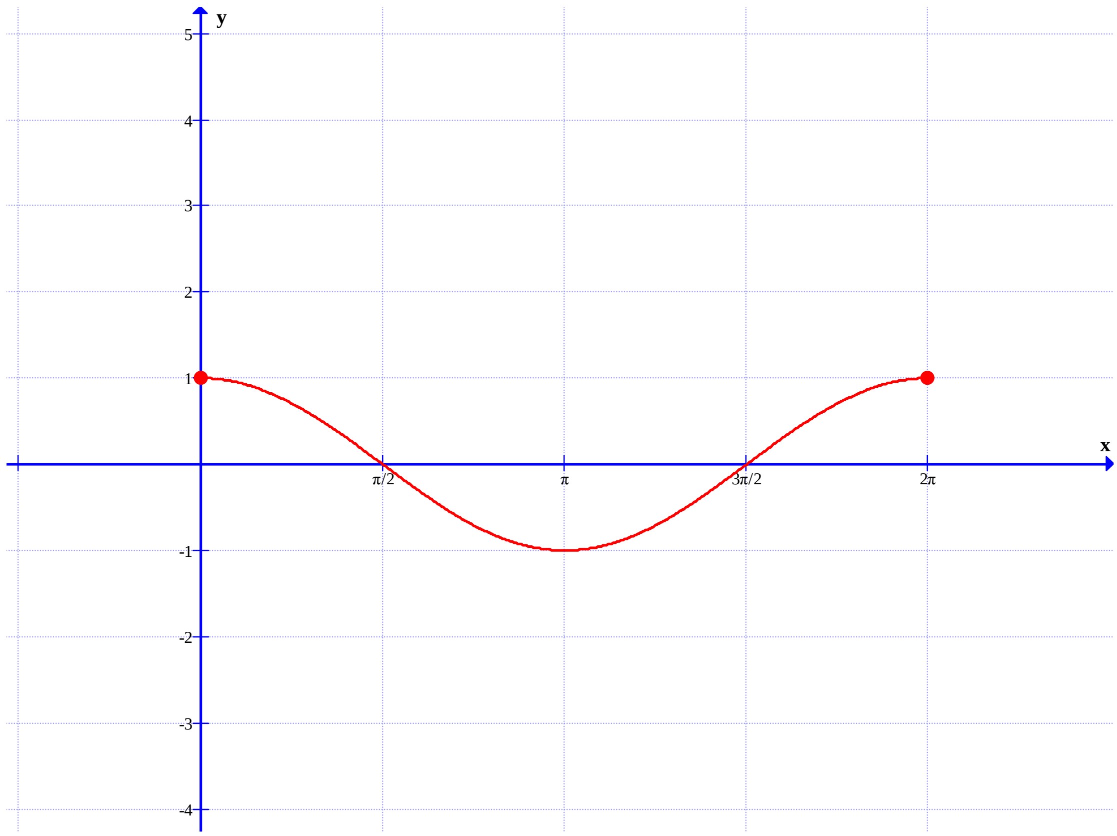
x	$\cdot$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	$\cdot$	۱	$\cdot$	-۱	$\cdot$



مثال۲ : نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[\cdot,۲\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

x	$\cdot$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	$\cdot$	-۱	$\cdot$	۱



تمرین ۱ : نمودار تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید.

***

قسمت دوّم : توابع مثلثاتی

در ادامه به بررسی خواص این توابع می پردازیم.

خاصیت ۱ : مقدار حداکثری (max) تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ برابر ۱ و مقدار حداقلی (min) آنها برابر ۱− می باشد.

خاصیت ۲ : دامنه‌ی تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آنها بازه‌ی $[-۱,۱]$ می باشد.

خاصیت ۳ : تابع $f(x)=\sin x$ از مبدأ مختصات می گذرد، ولی تابع $f(x)=\cos x$ از نقطه‌ی $(۰,۱)$ می گذرد.

خاصیت ۴ : این دو تابع متناوب هستند. یعنی در فواصل معینی نمودار آنها تکرار می شود. طول هر یـک از این فاصله ها را دوره‌ی تناوب می نامند. دوره ی تناوب این دو تابع $T=۲\pi$ می باشد.

تمرین۲ : مقدار تابع $f(x)=۲\sin ۳x$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ بدست آورید.

تمرین۳ : مقدار تابع $f(x)=-۲\sin(\pi-x)$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ بدست آورید.

تمرین۴ : مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ را به دست آورید.

$$f(x)=-۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})$$

تمرین۵ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=۳+۲\sin x$$

تمرین برای حل :

۶ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=۳-۵\cos x$$

۷ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=۷+۲\sin x$$

۸ : گزاره های زیر برای تابع $f(x)=\sin x$ نوشته شده اند. ($k\in Z$)

الف : حداکثر مقدار تابع سینوس در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ است.

ب : حداکثر مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ است.

ج : حداقل مقدار تابع سینوس در نقطه‌ی $x=\frac{۳\pi}{۲}$ است.

د : حداقل مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ است.

گزاره های دیگری مانند گزاره های فوق برای تابع $f(x)=\cos x$ بنویسید.

الف : حداکثر مقدار تابع کسینوس در نقطه‌ی .... است.

ب : حداکثر مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول های .... است.

ج : حداقل مقدار تابع کسینوس در نقطه‌ی .... است.

د : حداقل مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول های .... است.

۹ : در هر مورد جای خالی را چنان کامل کنید که گزاره‌ی حاصل درست باشد. $(k \in Z)$

الف) دامنه‌ی تابع سینوس مجموعه‌ی .... و برد آن مجموعه‌ی .... است.

ب) دامنه‌ی تابع کسینوس مجموعه‌ی .... و برد آن مجموعه‌ی .... است.

پ) مقدار تابع سینوس در طول های $x = k\pi$، برابر .... است.

ت) مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول های .... برابر با صفر است.

ث) حداکثر مقدار تابع سینوس .... است که در نقاطی به طول های $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ است.

ج) حداقل مقدار تابع سینوس .... است که در نقاطی به طول های .... به دست می آید.

ح) حداکثر مقدار تابع کسینوس .... است که در نقاطی به طول های $x = ۲k\pi$ است.

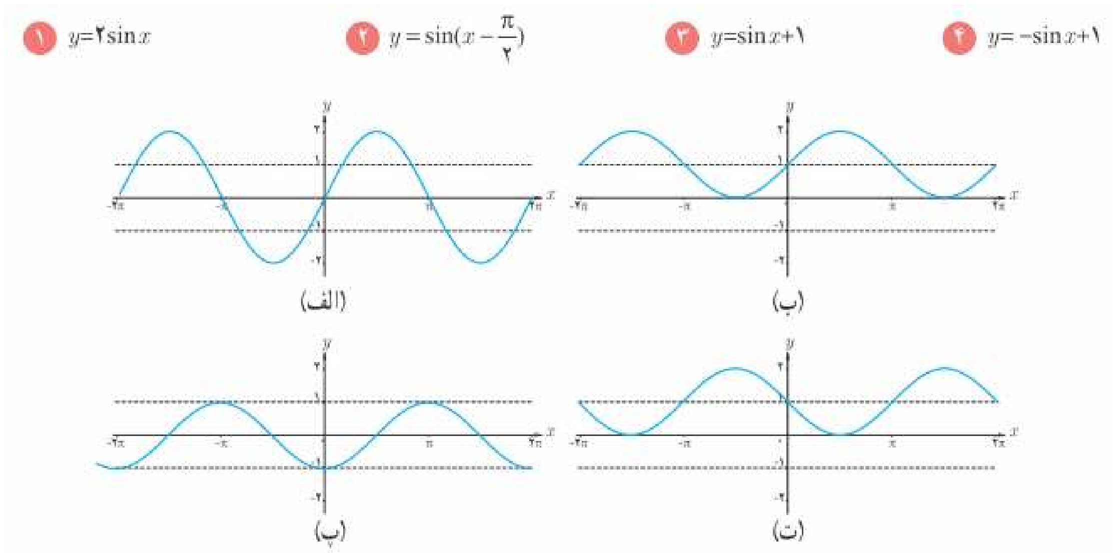
خ) حداقل مقدار تابع کسینوس .... است که در نقاطی به طول های .... به دست می آید.

۱۰ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۳\cos x$ ب) $y = ۱ + \sin x$

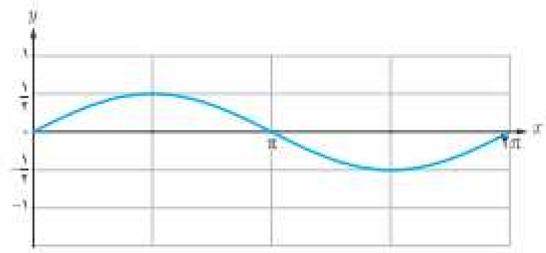
ج) $y = ۲\sin x - ۱$ د) $y = \cos(x + \frac{\pi}{۲})$

۱۱ : هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام تابع است.

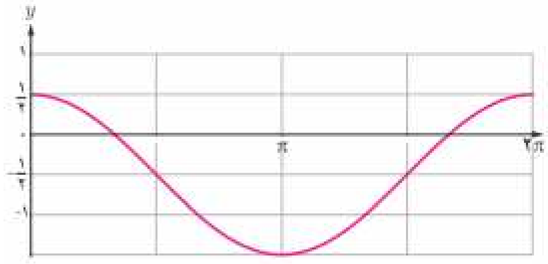


۱۲ : با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست اند؟

الف : شکل زیر نمودار تابع $y=\frac{1}{2}\sin x$ را نشان می دهد.



ب : شکل زیر نمودار تابع $y=\cos x-\frac{1}{2}$ را نشان می دهد.



پ : برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=1+\sin x$ کافی است، نمودار تابع سینوس را به اندازه‌ی یک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.

ت : برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=-\cos x$ کافی است، نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان