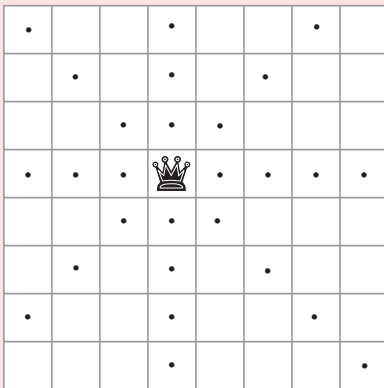


درس ۲ مدل سازی با گراف

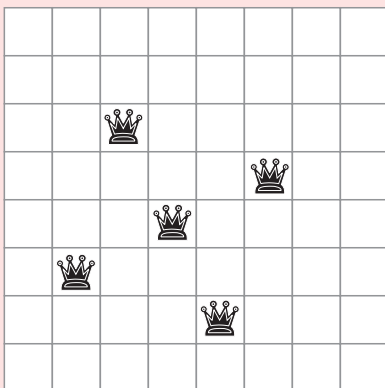
برخی از مسائل روزمره زندگی را می توان به کمک مدل سازی نخست به یک مسئله ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئله اصلی را نیز حل کرد. به طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «احاطه گری» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

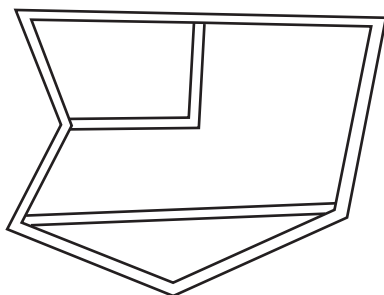
تاریخچه

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهره وزیر که می تواند با چینش مناسب تمام صفحه شطرنج را بپوشاند» (یعنی هر خانه صفحه شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.

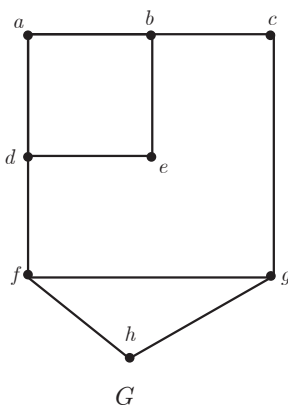


تفکر درباره پرسش هایی از این دست باعث به وجود آمدن مفهومی در شاخه گراف در ریاضیات با نام احاطه گری شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئله بعد دقت کنید.





شکل ۱



شکل ۲

شکل مقابل نقشه منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.

حال فرض کنید منطقه مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم. الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

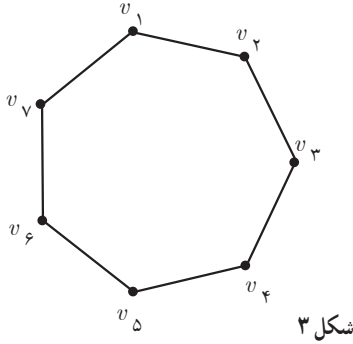
ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعه شامل همه رئوس گراف G ، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

تعریف: زیر مجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعه احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد مجموعه احاطه‌گر مینیمم آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئله بالا صدق خواهد کرد.

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G ، یک γ -مجموعه می‌گوییم.



مثال: برای گراف شکل ۳ که دور C_7 است، مجموعه $\{v_1, v_2, v_5, v_7\}$ یک مجموعه احاطه گر و مجموعه های $\{v_1, v_2, v_5\}$ و $\{v_1, v_2, v_7\}$ دو مجموعه احاطه گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γ -مجموعه اند؛ و داریم $\gamma(G) = 3$.

شکل ۳

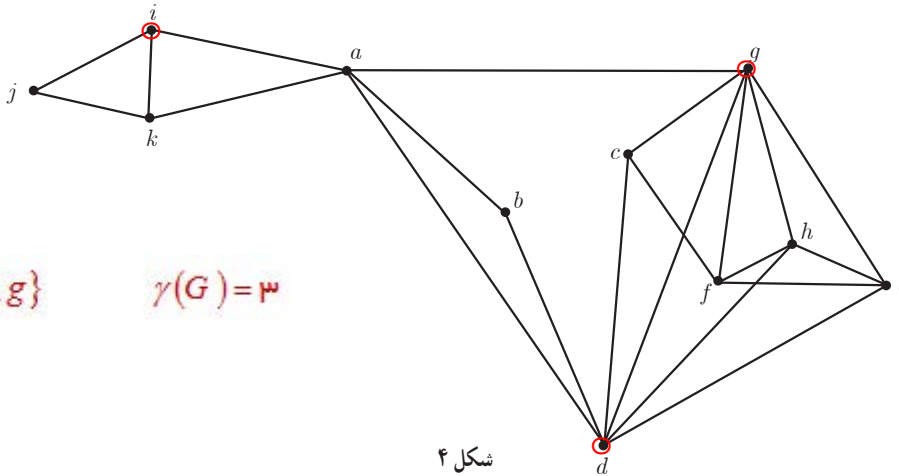
مثال: فرض کنید $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ شهرهای یک استان باشند و فاصله های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
a	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
b	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
c	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
d	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
e	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵	۶۰	۵۵	۵۵
f	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
g	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵	۷۰	۶۵	۶۰
h	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵	۴۵	۵	۰	۶۵	۶۰	۵۵
i	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵	۱۰
j	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵	۰	۵
k	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵	۰

می خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به طوری که همه شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه ها می خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا 50 کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل: برای مدل سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصله مستقیم آن دو شهر از 50 کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می کند. (چرا؟)

با توجه به آنچه گفته شد گراف زیر، گراف حاصل از مدل سازی برای این مسئله است.



$$D = \{i, d, g\}$$

$$\gamma(G) = 3$$

شکل ۴

حال کافی است یک مجموعه احاطه گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه گر مینیمال مستقر کنیم. یافتن یک مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه گر

هست و کدام نیست؟

الف) $A = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه احاطه گر است

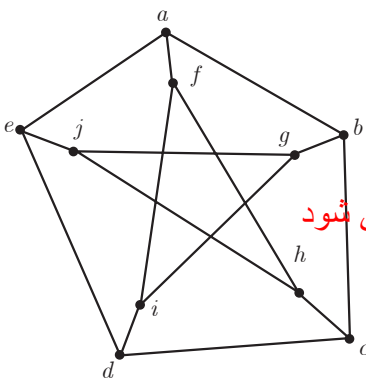
ب) $B = \{f, g, h, i, j\}$ مجموعه احاطه گر است

پ) $C = \{a, b, j, h, g\}$ مجموعه احاطه گر نیست زیرا راس d احاطه نمی شود

ت) $D = \{a, i, h\}$ مجموعه احاطه گر است

ث) $E = \{f, g, h, e, d\}$ مجموعه احاطه گر است

ج) $F = \{f, g, h, e\}$ مجموعه احاطه گر است



شکل ۵

۲ از مجموعه های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس هایی وجود دارد که با حذف

آنها مجموعه باقی مانده هنوز احاطه گر باشد؟ از مجموعه $E = \{f, g, h, e, d\}$ اگر راس f را حذف کنیم مجموعه $\{g, h, e, d\}$ یک مجموعه

احاطه گر است

تعریف: یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد احاطه گر مینیمال می نامیم.

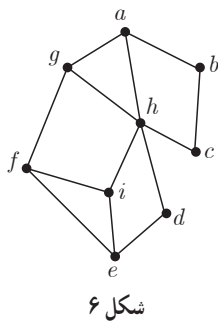
۳ مجموعه ای احاطه گر با کمترین تعداد رأس که می توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی های خود مقایسه کنید.

$$D = \{b, h, d\}$$

۴ یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

$$D = \{a, b, c, d, e\}$$

۵ آیا می توان هر مجموعهٔ احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال تبدیل کرد؟ (استدلال کنید)

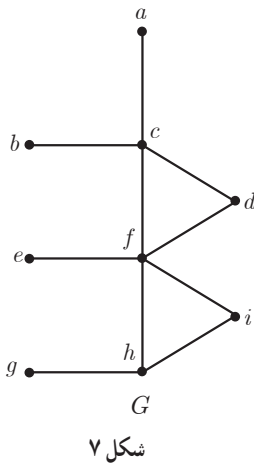


شکل ۶

مثال: در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.
 حل: مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه گر خواهد بود، لذا احاطه گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس a, c, e از آن، مجموعهٔ $\{b, d, f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه گر است اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه گر نخواهد بود لذا احاطه گر مینیمال است.

کار در کلاس

در گراف شکل ۷:



شکل ۷

- ۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر باشد. $\{c, f, h, d\}, \{e, f, h\}$
- ۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر مینیمال باشد. $\{b, e, g, d, i, a\}$
- ۳ یک مجموعهٔ احاطه گر ۳ عضوی مشخص نمایید. $\{c, f, h\}$
- ۴ آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس e, b, g را احاطه کند؟ **خیر**
- ۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتا است؟ $\gamma(G)$ چند است؟ **۳ تا**

معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح^۱ یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر x یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود x است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

۱- گاهی اوقات به جزء صحیح یک عدد، کف آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کف a می‌گویند.

حل کار در کلاس صفحه ۴۶ سوال ۵ (ابتدای صفحه ۴۷)

بله اگر $D = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ یک مجموعه احاطه گر غیر می نیمال باشد چنانچه v_1 را حذف کنیم و از احاطه گری خارج شود آنرا برگردانده و سراغ حذف v_p می رویم این کار را تا آخرین رأس انجام می دهیم طبق فرض مسئله حداقل یک رأس وجود دارد که ب حذف آن همچنان احاطه گری حفظ می شود پس از حذف رأس های غیر ضروری در آخر کار یک مجموعه احاطه گر می نیمال بدست می آید

(ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ **۴ تاکسی**

(پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ **۴ تاکسی**

(ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟ **تعداد کارمندان را بر ۴ تقسیم میکنیم اگر بخش پذیر شد همان عدد تعداد تاکسی**

هست و اگر نشد کوچکترین عدد صحیح بعدی تعداد تاکسی خواهد شد

(ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به کار

برد.

در صورتی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقف x می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

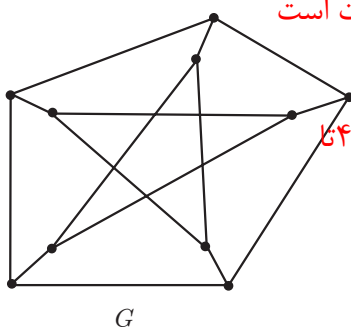
$$\lceil 3/5 \rceil = 3$$

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

$$\lceil 3/5 \rceil = 4$$

■ سؤال: برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟ **اعداد صحیح**

فعالیت



شکل ۸

۱ در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند. **درست است**

۲ در گراف مقابل Δ چند است؟ **۳**

۳ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟ **۴ تا**

۴ آیا ۲ رأس می‌توانند همه رئوس گراف G را احاطه کنند؟ **خیر**

۵ حداقل $\lceil \frac{1}{4} \rceil$ رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. چرا؟

۶ $\gamma(G)$ چند است؟

۷ در یک گراف دلخواه با ماکزیم درجه Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

۸ تعداد کمتر از $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأس یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

۳-۴ تا - یکی بیشتر از Δ می باشد

۵-۳ $\left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = \lceil 2.5 \rceil = 3$ حداقل سه راس لازم است تا همه راس ها احاطه شود چون اگر ۲ راس

باشد حداکثر ۸ راس را احاطه می کند با توجه به $(\Delta + 1 = 4)$

$$\gamma(G) = 3 - 6$$

۷-۱ $\Delta + 1$ راس (البته با خودش)

۸- زیرا اگر $\gamma(G) < \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ باشد آنگاه $\gamma(G) \times (\Delta + 1)$ همواره از n (تعداد راس ها) کمتر خواهد

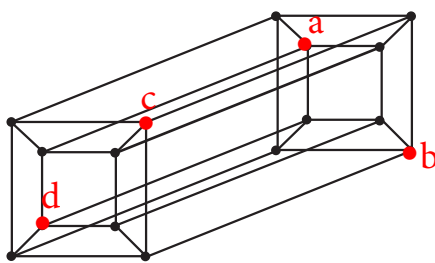
بود و این بدان معنی است که تمام رئوس احاطه نخواهد شد

بنابراین :

اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد و D یک مجموعه احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعه احاطه‌گر است همواره داریم $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$ ؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل ۹ به چند کامپیوتر دیگر



شکل ۹

متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعه انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟ **یک مجموعه احاطه‌گر هست**

۲ با توجه به رابطه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید

$$\left\lceil \frac{16}{4+1} \right\rceil = 4$$

مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟ $D = \{a, b, c, d\}$

۳ گراف‌های C_4 و C_6 ، P_4 و P_6 را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

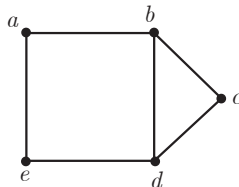
۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد. در گراف P_9 عدد احاطه‌گری برابر ۳ است. $\left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$



۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.

$$\{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_{12}\} = \text{مجموعه احاطه‌گری مینیمم} \Rightarrow \gamma(G) = 6 \neq \left\lceil \frac{12}{3+1} \right\rceil = 3$$

مثال: عدد احاطه‌گری کراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



G

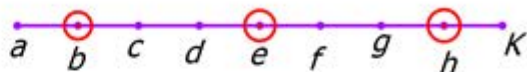
شکل ۱۰

حل: به سادگی می‌توان دید که مجموعه دو عضوی $\{a, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq 2$.

اما اگر $\gamma(G) = 1$ ، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجه ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G) > 1$. بنابراین $1 < \gamma(G) \leq 2$ لذا $\gamma(G) = 2$.

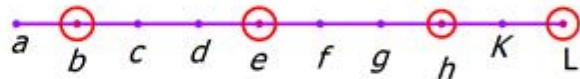
-۳

خطی مرتبه ۹ p_1

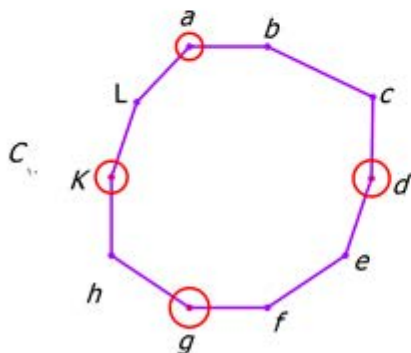


$$D = \{b, e, h\} \quad \gamma(G) =$$

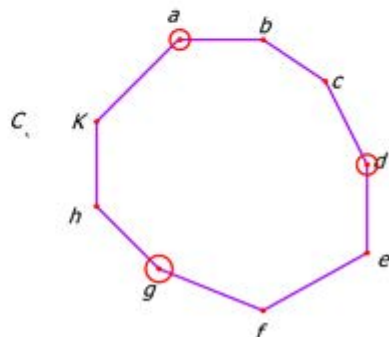
خطی مرتبه ۱۰ p_1



$$D = \{b, e, h, l\} \quad \gamma(G) = ۴$$



$$D = \{a, d, g, k\} \quad \gamma(G) = ۴$$



$$D = \{a, d, g\} \quad \gamma(G) = ۳$$



$$\text{مجموعه احاطه گری مینیمم} = \{v_3, v_4, v_6, v_9, v_{10}, v_{12}\} \Rightarrow \gamma(G) = \rho \neq \left\lceil \frac{1 \rho}{\rho + 1} \right\rceil = \rho$$

روش دیگر برای حل: نوع دیگری از استدلال به این صورت است که با توجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G)=3$ داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

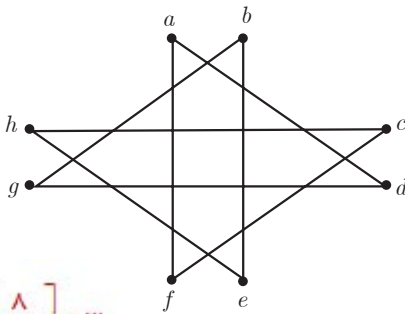
بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ و با توجه به مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G)=2$ و لذا $\gamma(G)=2$.

کار در کلاس

۱- تمام γ -مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

$$\{e,d\}, \{c,e\}, \{a,b\}, \{b,e\}, \{b,d\}, \{a,c\}$$

۲- عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.

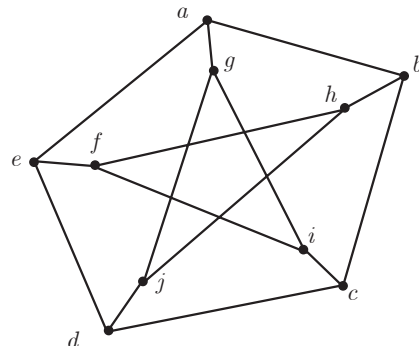


$$\gamma(H) \geq \left\lceil \frac{8}{2+1} \right\rceil = 3$$

H

از طرفی $\{a,b,c\}$ یک مجموعه

(ب)



G

(الف)

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3$$

از طرفی $\{a,c,h\}$ یک مجموعه

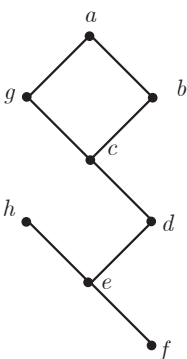
احاطه‌گری است بنابراین: $\gamma(G)=3$

شکل ۱۱

احاطه‌گری است بنابراین: $\gamma(G)=3$

فعالیت

۱ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.



G

شکل ۱۲

(الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = 2$ حداقل $\gamma(G)$ برای $\Delta=3$ رأس برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

(ب) برای احاطه کردن رئوس a, b, c, d, e, f, g, h دو تا از آنها باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند. (چرا؟)

در این زیر گراف داریم $\Delta = \deg(c) = 3$ اما این رأس نمی‌تواند تمامی رأس‌های این

گراف را احاطه کند

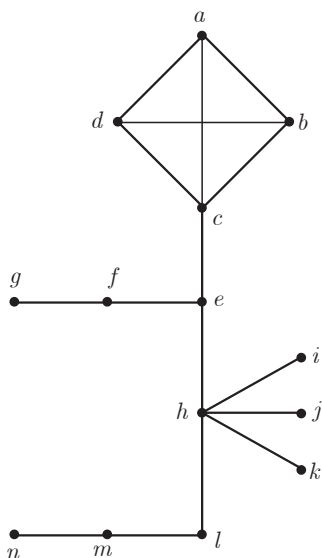
$$\left\lceil \frac{3}{3+1} \right\rceil = 1$$

(پ) برای احاطه کردن رئوس e, f, h یکی از آنها باید انتخاب شوند. (چرا؟)

(ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعهٔ احاطه‌گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$.

(ث) از طرفی چون $\{a, c, e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، $\gamma(G) \leq 3$. پس $\gamma(G)=3$.

۲ می خواهیم عدد احاطه گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.



شکل ۱۳

الف) ابتدا کران پایین $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ را بررسی می کنیم که عدد $\left\lfloor \frac{14}{6} \right\rfloor = 3$ را

$$\left\lfloor \frac{14}{6+1} \right\rfloor = 1$$

می دهد. پس $\gamma(G) \geq 3$.

ب) اما حداقل یکی از رئوس a, b, c, d باید انتخاب شود. چرا؟

$$\left\lfloor \frac{3}{3+1} \right\rfloor = 1$$

پ) حداقل یکی از رئوس e, f, g باید انتخاب شود. چرا؟

$$\left\lfloor \frac{3}{3+1} \right\rfloor = 1$$

ت) حداقل یکی از رئوس h, i, j, k باید انتخاب شود. چرا؟

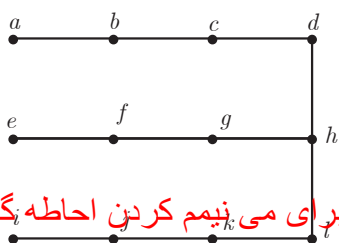
$$\left\lfloor \frac{4}{5+1} \right\rfloor = 1$$

ث) حداقل یکی از رئوس l, m, n باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq 4$ و

با توجه به اینکه $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه گر است لذا $\gamma(G) \leq 4$ بنابراین

$$\gamma(G) = 4$$



شکل ۱۴

مثال: عدد احاطه گری گراف شکل ۱۴ را به دست آورید و یک مجموعه احاطه گر

مینیم برای آن ارائه کنید.

حل: برای احاطه کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b در مجموعه

احاطه گر باشند و بهتر آن است که رأس b انتخاب شود. (چرا؟) به همین صورت

رئوس f و j را نیز می توان در مجموعه احاطه گر در نظر گرفت. حال مجموعه

$\{b, f, j\}$ تمام رئوس گراف به جز سه رأس l, h, d را احاطه می کند و برای احاطه این

سه رأس نیز کافی است رأس h اضافه شود یعنی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه احاطه گر

است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نیز نمی توان رئوس این گراف را احاطه کرد. زیرا مثلاً اگر ۳ رأس تمام رئوس را احاطه

کنند، چون هیچ رأسی بیش از ۴ رأس را احاطه نمی کند (چرا؟) باید هر کدام از این ۳ رأس دقیقاً ۴ رأس را احاطه کنند تا تمام

۱۲ رأس گراف احاطه شده باشند این یعنی باید حداقل ۳ رأس از درجه ۳ داشته باشیم و چنین رأس هایی در این گراف وجود

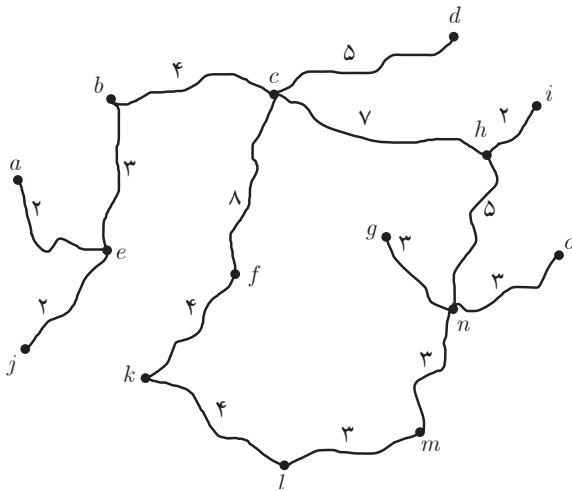
ندارند. پس حداقل تعداد رئوس لازم برای احاطه تمام رئوس این گراف همان ۴ تا است.

تمرین

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس) حداقل سه ایستگاه باید نصب کرد

(الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید. $\{d, c, f\}$ یا $\{g, b, i\}$ یا $\{f, d, z\}$...

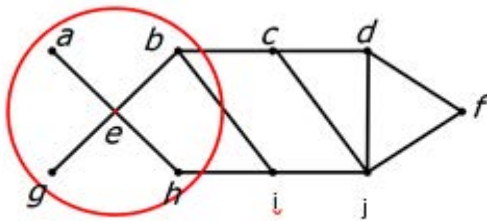
(ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟ حداقل دو ایستگاه دیگر باید احداث شود. این ایستگاه‌ها می‌توانند $\{i, g\}$ یا $\{f, k\}$ باشد



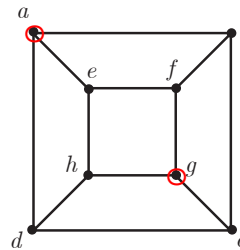
شکل ۱۵

۲ نقشه مقابل نقشه یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



(ب)



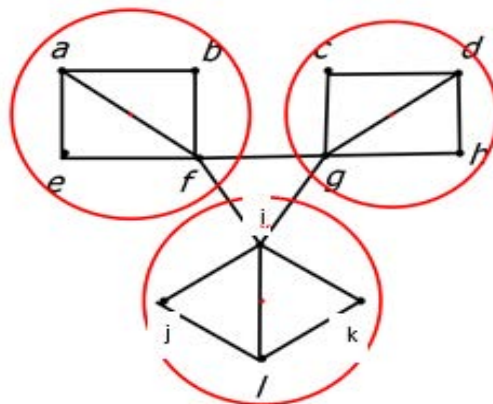
(الف)

الف:

ب: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil = 2$

از طرفی $\{e, j\}$ یک مجموعه

احاطه‌گری است بنابراین: $\gamma(G) = 2$



(ب)

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$

از طرفی $\{a, g\}$ یک مجموعه

احاطه‌گری است بنابراین: $\gamma(G) = 2$

پ: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{11}{5+1} \right\rceil = 2$

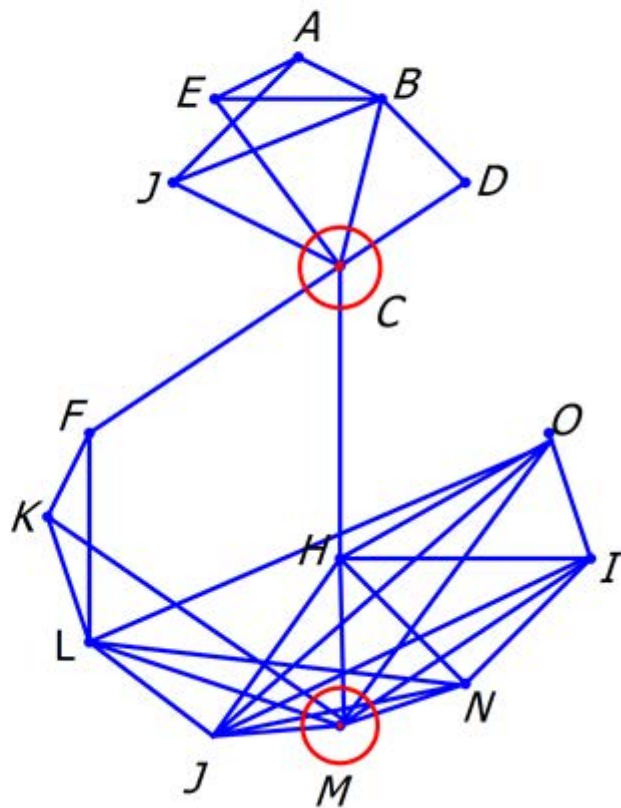
از طرفی $\{f, d, i\}$ یک مجموعه

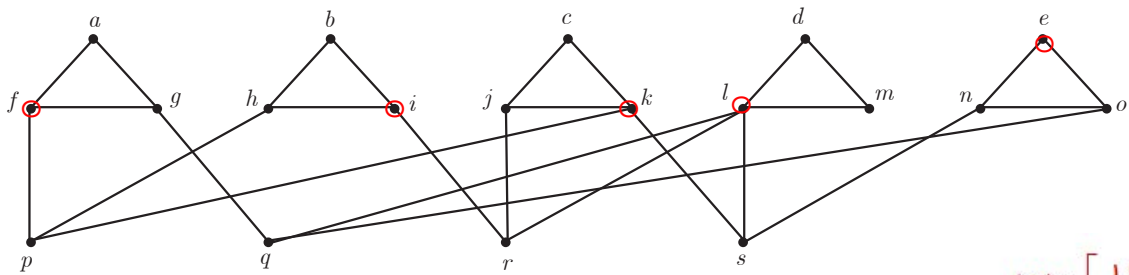
احاطه‌گری است بنابراین: $\gamma(G) = 3$

حل تمرین ۲:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{15}{\Delta + 1} \right\rceil = 2$$

یک مجموعه احاطه گری میتواند $\{C, M\}$ باشد
 پس کافیه دو بیمارستان در روستاهای C, M
 احداث کرد





(ت)

ت:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{19}{5+1} \right\rceil = 4$$

ث:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{20}{5+1} \right\rceil = 4$$

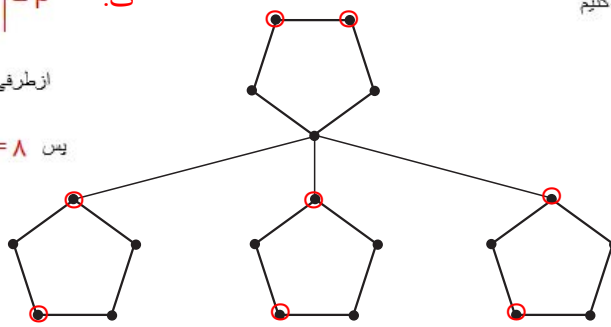
از طرفی از هر رأس پنج ضلعی باید پدو رأس را انتخاب کنیم

از طرفی از هر رأس مثلث باید یکی را انتخاب کنیم

مجموعه ی $\{f, i, k, l, e\}$ یک مجموعه

پس $4 \times 2 = 8$ بنابراین $\gamma(G) = 8$

احاطه گیری است بنابراین $\gamma(G) = 5$



(ث)

۴ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی‌برد؟ $\Delta(G)$ و

حدافل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

۵ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مشخص کنید **باتوجه به اینکه در هر دو درجه‌ماکزیمم راسها ۲ می‌باشد**

۶ اگر G یک گراف k -منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$

۷ یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گیری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که γ -مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ -مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گیری آن k باشد، ارائه دهید.

۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گیری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

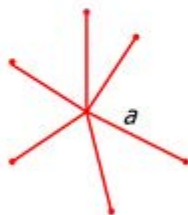
ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گیری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

حل تمرین ۴:

هرگاه $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف G از مرتبه n ، حتما راسی از درجه $n-1$ داشته که با انتخاب این راس همه $n-1$ راس های دیگر که با آنها مجاور است را پوشش میدهد از جمله خودش را هم احاطه می کند پس همین یک راس کل گراف G را احاطه خواهد کرد اما لزومی ندارد که گراف حتما کامل باشد.

$$\Delta(G) = \deg a = 6$$

$$D = \{a\} \quad \gamma(G) = 1$$



$\Delta(G) = n-1$ حداقل تعداد یالها برابر با صفر و حداکثر یالها $\frac{n(n-1)}{2}$ است

$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{p+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$$

حل تمرین ۶:

چون گراف G گراف K منتظم است لذا $\Delta(G) = k$ حالا در نامساوی $\left\lceil \frac{n}{\Delta(G)+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ به جای

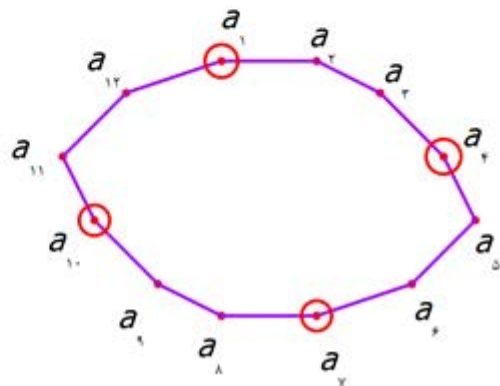
$$\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \text{ قرار میدهیم } k, \Delta(G)$$

حل تمرین ۷:

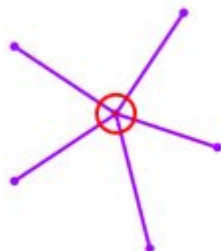
گراف G_{12}

$$S = \{a_1, a_4, a_7, a_{10}\} \quad \gamma(G) = 4$$

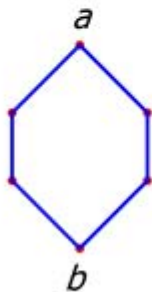
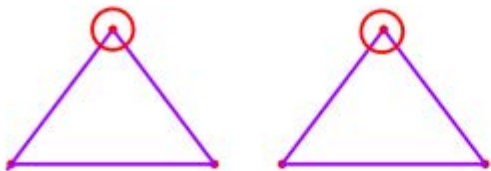
$$n = 12, \Delta(G) = 2 \quad \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{2+1} \right\rceil = 4$$



حل تمرین ۸: الف)

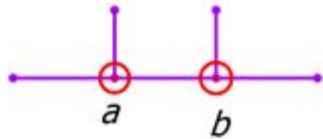


ب)

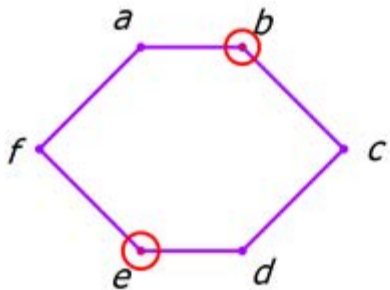


پ) کافی است گراف به صورت k بخشی و در هر بخش راسی که همه راسها را احاطه کند رسم کنیم

حل تمرين ٩: الف)



ب)



۱۰ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

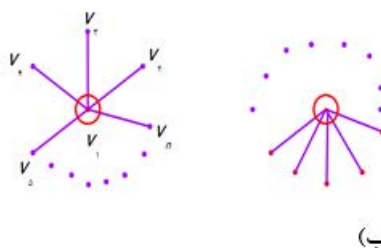
۱۱ گراف P_{12} را رسم کنید.

الف) یک γ - مجموعه از آن را مشخص نمایید.

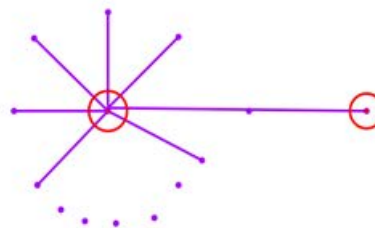
ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

حل تمرین ۱۰:

می‌توانیم n رأس را به دو مجموعه افراز کنیم و با هر مجموعه یک گراف ستاره ای رسم کنیم



ب)



حل تمرین ۱۱:



الف) مجموعه $\{b, e, h, n\}$ یک ۴-مجموعه است

ب) مجموعه $\{b, c, f, g, m, n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی است