



اداره کل آموزش و پرورش

استان هرمزگان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های

آموزشی متوسطه



درسنامه ریاضی

پایه نهم

مدرس: نادر خادمی

سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰



« دست توانای معلم است که چشم انداز آینده ی ما را ترسیم می کند. »

« مقام معظم رهبری »

مقدمه:

در سال تحصیلی گذشته ، در پی شیوع کرونا ، آموزش های مجازی جایگزین آموزش های حضوری مدارس شد. در این بین نیز برخی معلمان ، با ابتکار و خلاقیت، سعی در تداوم امر آموزش و برقراری ارتباط هر چه بیشتر مجازی با دانش آموزان داشتند.

گفتنی است تعدادی از دانش آموزان به دلیل عدم دسترسی به تلفن همراه هوشمند یا اینترنت از آموزش های مجازی محروم شدند که برای تحقق عدالت آموزشی به شیوه های دیگر، از آموزش بهره مند شدند. یکی از این شیوه ها ، تولید و تالیف درسنامه برای این دسته از دانش آموزان بود.

در این روزهای کرونایی مصمم شدیم تا با تولید درسنامه دروس دوره اول و دوم متوسطه برای سال تحصیلی جدید ، گوشه ای از دلواپسی خانواده ها را برای آموزش فرزندانشان کاهش دهیم و امیدواریم که در ادامه نیز در کنار آموزش های حضوری در مدارس ، این نوع درسنامه ها برای یادگیری بهتر مطالب به دانش آموزان کمک کند .

امید است با یاری خداوند متعال ، همگی عزممان را برای زمین گیر کردن ویروس کرونا جزم کرده و در عین حال از وظایف شغلی خود غافل نشویم.

به امید روزهای بهتر و سرشار از سلامتی

« تابستان ۱۳۹۹ »



فهرست

صفحه	عنوان
	فصل اول (مجموعه ها)
۵	معرفی مجموعه
۶	مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها
۷	اجتماع اشتراک و تفاضل مجموعه ها
۹	مجموعه ها و احتمال
	فصل دوم (عددهای حقیقی)
۱۲	عددهای گویا
۱۴	عددهای حقیقی
۱۷	قدر مطلق و محاسبه تقریبی
	فصل سوم (استدلال و اثبات)
۲۰	استدلال
۲۰	آشنایی با اثبات در هندسه
۲۲	هم نهشتی مثلث
۲۳	حل مسئله در هندسه
۲۵	شکل های متشابه
	فصل چهارم (توان و ریشه)
۲۸	توان صحیح
۳۰	نماد علمی
۳۱	ریشه گیری
۳۳	جمع و تفریق رادیکال ها

درس اول : معرفی مجموعه

تعریف مجموعه: در ریاضی برای بیان و نمایش دسته ای از اشیای مشخص و متمایز (غیر تکراری) از مجموعه استفاده می کنیم

نکته: مجموعه را به صورت آکولاد $\{ \}$ نشان می دهند و مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنند .

نکته : با تکرار اعضا در یک مجموعه مجموعه ی جدیدی ساخته نمی شود یعنی به جای $\{۲و۲و۵\}$ می نویسیم $\{۲و۵\}$
مثال: کدام یک از عبارات های زیر یک مجموعه را نشان می دهد.

الف) ۳ عدد زوج متوالی « \lll » خیر، زیرا اعضای آن مشخص نیست یک نفر برای ۳ عدد زوج متوالی اعداد $\{۲. ۴. ۶\}$ را در نظر می گیرد و دیگری $\{۶. ۸. ۱۰\}$ را در نظر می گیرد پس اعضا مشخص نمی باشد.

ب) اعداد اول کمتر از ۱۰ « \lll » بله، اعضای آن مشخص می باشد و همه برای آن $\{۲. ۳. ۵. ۷\}$ را در نظر می گیرند.

پ) چهار شاعر ایرانی « \lll » خیر، بیش از چهار شاعر ایرانی داریم و هر دانش آموز پاسخ های متفاوت می دهد.

ت) $B = \{۵. ۹. ۵. ۷. ۸\}$ « \lll » با توجه به متمایز بودن مجموعه باید آن را اصلاح کنیم و به صورت $\{۵. ۹. ۷. ۸\}$ بنویسیم.

نکته: به هریک از اعداد و معادلات و اشیا داخل مجموعه عضو می گویند و علامت عضو بودن را با \in و علامت عضو نبودن را با \notin نشان می دهند.

نکته: تعداد عضوهای های هر مجموعه مانند A را بصورت $n(A)$ نشان می دهند.

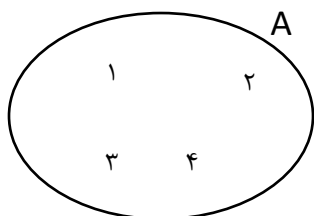
مثال : با توجه به مجموعه A درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید

$$A = \{۳. ۵. ۶. ۷\} \quad n(A) = ۴ \quad \sqrt{\quad} \quad ۲ \in A \quad \times \quad \{۵\} \in A \quad \times \quad ۶ \in A \quad \sqrt{\quad}$$

مجموعه تهی : اگر در مجموعه ای عضوی وجود نداشته باشد آن را مجموعه تهی می نامیم با $\{ \}$ یا \emptyset نشان می دهیم

نکته: مجموعه $\{۵\}$ یک مجموعه تهی را نشان نمی دهد زیرا این مجموعه نشان دهنده ی مجموعه ای است که یک عضوی درون آن می باشد. پس مجموعه دارای یک عضو می باشد.

نمودار ون مجموعه ها: مجموعه ها را می توان داخل یک منحنی بسته نشان داد که به آن نمودار ون می گویند.



مثال: نمایش مجموعه ی $A = \{۱و۲و۳و۴\}$ با استفاده از نمودار ون به صورت مقابل است:

ایستگاه سوال:

۱) کدام یک از مجموعه های زیر مجموعه تهی است ؟

✖ الف) اعداد طبیعی کمتر از ۳ : {۱ و ۲} ✖ ب) اعداد اول و زوج بزرگتر از صفر : {۲}

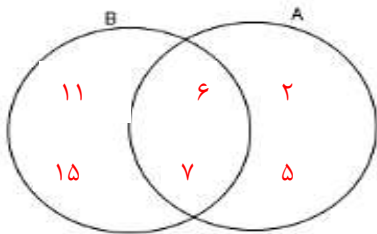
✓ پ) اعداد صحیح منفی بین ۴ و ۶ : { }

۲) جای خالی را طوری پر کنید تا حاصل عبارت درست باشد.

الف) مجموعه {۵ و ۰} دارای ۲ عضو می باشد. ب) مجموعه {۴ و ۱ و ۲} دارای ۷ عضو است.

۳) با توجه به مجموعه های A و B دو مجموعه را روی نمودار ون نمایش دهید.

$$B = \{۶, ۷, ۱۱, ۱۵\} \quad A = \{۲, ۵, ۶, ۷\}$$



درس دوم: مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

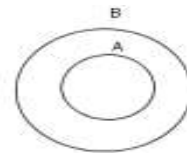
دو مجموعه برابر: دو مجموعه A, B را برابر می گویند که هر عضو از مجموعه A در مجموعه B و هر عضو مجموعه B در مجموعه A وجود داشته باشد. به عبارت دیگر هم تعداد عضو ها و هم نوع اعضا با هم برابر باشد.

مثال: دو مجموعه {۲ و ۵ و ۴} و {۴ و ۵ و ۲} با همدیگر برابرند.

نکته: جابجایی اعضا مجموعه جدیدی را به وجود نمی آورد و با مجموعه قبلی برابر است.

مثال: آیا دو مجموعه $A = \{۲, ۳, ۵, ۹\}$ و $B = \{۳, ۲, ۷, ۵\}$ با هم برابر هستند؟ خیر، در بررسی اعضا دو مجموعه ۲ و ۳ و ۵ در هر دو مجموعه وجود دارد ولی عضو ۹ در مجموعه A می باشد که در مجموعه B وجود ندارد.

زیر مجموعه: مجموعه A زیر مجموعه B است هر گاه تمام عضوهای مجموعه A درون مجموعه B باشد آن را به صورت $A \subset B$ نشان می دهند. اگر A زیر مجموعه B نباشد آن را به صورت $A \not\subset B$ نشان می دهند و به صورت نمودار ون داریم:



$$A \subset B \longrightarrow$$

مثال: مجموعه های $A = \{۲, ۱, ۷, ۵\}$ و $B = \{۱, ۵\}$ می باشند که می توانیم بنویسیم:

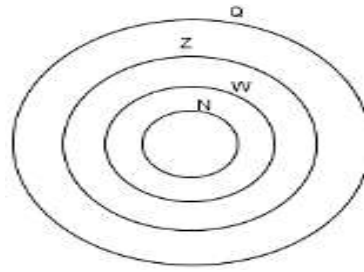
$B \subset A$ زیرا هر عضو از مجموعه B (یعنی ۱ و ۵) درون مجموعه A نیز جود دارد.

نکته: در مثال بالا $A \not\subset B$ چون عضوی مانند ۲ در A وجود دارد که در B نمی باشد.

نکته: مجموعه تهی زیر مجموعه همه مجموعه ها است یعنی $\emptyset \subset A$, $\emptyset \subset B$

نکته: هر مجموعه زیر مجموعه خودش می باشد یعنی: $B \subset B$, $A \subset A$

نکته: نمودار ون مجموعه اعداد ریاضی به صورت مقابل است: $N \subset W \subset Z \subset Q$



- $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ اعداد طبیعی
- $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ اعداد صحیح
- $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ اعداد حسابی

نکته: برای پیدا کردن تعداد زیر مجموعه ها از رابطه 2^n استفاده می کنیم.

مثال: مجموعه $A = \{2, 4, 6\}$ را در نظر بگیرید.

الف) چند زیر مجموعه دارد.

$$n(A) = 3 \qquad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

ب) تمام زیر مجموعه های مجموعه A را بنویسید؟

{ } و {2} و {4} و {6} یک عضوی

{2, 4} و {2, 6} و {4, 6} دو عضوی

{2, 4, 6} سه عضوی

نمایش مجموعه ها: گاهی اوقات مجموعه به صورت نماد ریاضی نمایش داده می شود و باید اعضای آن را بنویسیم ابتدا قسمت شرط را باید به خوبی بدانیم و خوب برای خودمان تحلیل کنیم تا بتوانیم حاصل را بدست آوریم.

مثال: اعضای مجموعه $\{x \in Z \mid 1 < x < 4\}$ را بنویسید.

X عضو عددهای صحیح و X بین 1 و 4 باشد.
 دو برابر X : اینگونه خوانده می شود
 به شرطی که

پس طبق شرط 2 و 3 داریم و به جای X جایگذاری میکنیم تا حاصل بدست آید.

$$2 \times 2 = 4 \quad \text{و} \quad 2 \times 3 = 6 \quad \rightarrow \quad \{4, 6\}$$

مثال: اعضای مجموعه های زیر را بنویسید

الف) $A = \{3x - 1 \mid x \in N - 4 < x \leq 2\} \rightarrow 3 \times 1 - 1 = 2. \quad 3 \times 2 - 1 = 5. \rightarrow A = \{2, 5\}$

ب) $B = \{x \mid x \in W. x \leq 4\} \rightarrow B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

شرط 0 و 1 و 2 و 3 و 4 می شود چونکه خود X را میخواند پس داخل آکلاد مینویسیم

ایستگاه سوال

1) جاهای خالی را طوری پر کنید تا دو مجموعه برابر باشند. $\{-0. / 5. \dots \sqrt{16}. \frac{9}{3}. 7\} = \{4. \sqrt{36}. \dots . 3. - \frac{1}{2}\}$

2) درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی یک عدد گویا است **درست**

ب) بعضی از اعداد گویا، عدد صحیح هستند **درست**

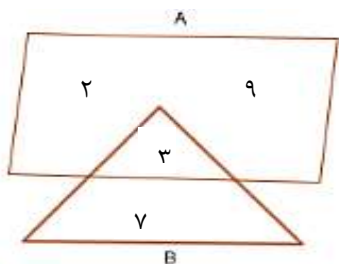
پ) هر عدد حسابی یک عدد طبیعی است. **نادرست**

ت) هر عدد صحیح یک عدد گویا است. **درست**

۳) با توجه به مجموعه ها درستی یا نادرستی عبارات های زیر را مشخص کنید.

الف) $3 \notin A$ **نادرست** ب) $\{2, 3\} \subset A$ **درست**

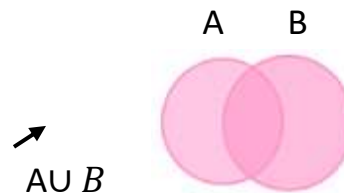
پ) $37 \in B$ **نادرست** ت) $B \not\subset A$ **درست**



درس سوم : اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه ها

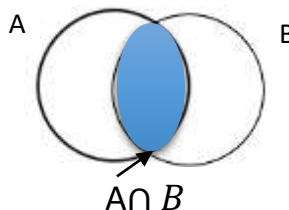
اجتماع دو مجموعه : اجتماع مجموعه A و B شامل همه عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشد و اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A \cup B$ نمایش می دهند که می توان به صورت نماد ریاضی و نمودار ون نمایش داد.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



اشتراک دو مجموعه : اشتراک دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی است که هم A باشد و هم عضو B و اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت $A \cap B$ نمایش می دهند که می توان به صورت نماد ریاضی و نمودار ون نمایش داد.

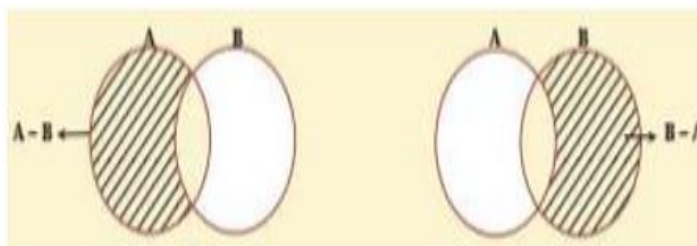
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$



تفاضل دو مجموعه : مجموعه $A - B$ (A منهای B) شامل همه عضوهایی است که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند. که می توان به صورت نماد ریاضی و نمودار ون نمایش داد:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ و } x \notin A\}$$



نکته :

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A - \emptyset = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

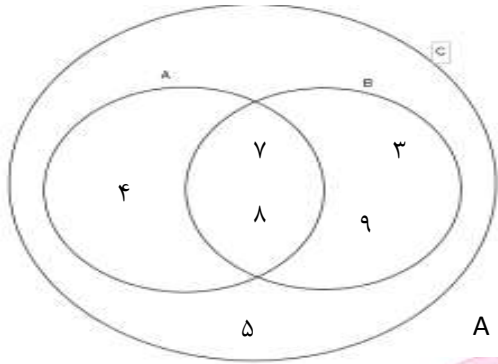
ایستگاه سوال:

۱) اگر $A = \{3, 5, 7\}$ و $B = \{7, 4, 8, 10\}$ و $C = \{8, 14, 12, 10\}$ باشد. اعضای مجموعه های زیر را بدست آورید.

الف) $A \cup B = \{3, 5, 7, 4, 8, 10\}$

ب) $(A \cap B) \cup C = \{7\} \cup \{8, 14, 12, 10\} = \{7, 8, 14, 12, 10\}$

پ) $(A-B) \cup (B-C) = \{3, 5\} \cup \{7, 4\} = \{3, 5, 7, 4\}$



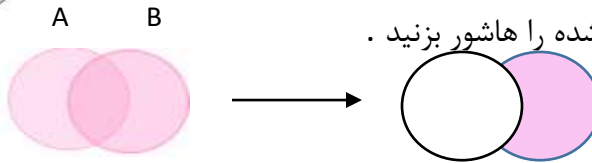
۲) با توجه به نمودار مقابل درستی یا نادرستی عبارات را مشخص کنید.

الف) $n(A \cap B) = 5$ نادرست ب) $A \subseteq (C-B)$ نادرست

ج) $3 \in (A - B)$ نادرست د) $n(A-B) = 1$ درست

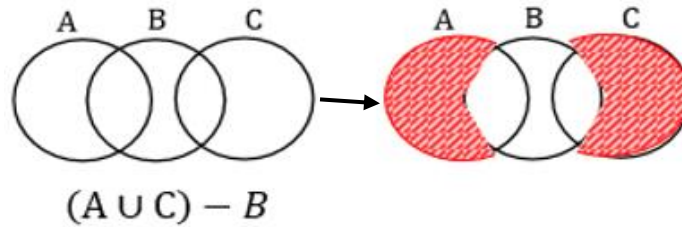
و) $\{4, 5\} \subseteq C$ درست ه) $9 \in (A \cup B)$ درست

۳) هریک از موارد خواسته شده را هاشور بزنید.



الف) $(A \cup B) - A$

ب) $(A \cup C) - B$



درس چهارم : مجموعه ها و احتمال

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد های حالت مطلوب}}{\text{تعداد همه ی حالت های ممکن}}$$

مجموعه همه حالت های ممکن را با S و حالت های مطلوب را با A نشان می دهیم . و احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نشان می دهیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال : در پرتاب یک تاس احتمال های زیر را بدست آورید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$n(A) = 3$ ←

$A = \{2, 4, 6\}$ الف) احتمال آمدن عدد زوج

$n(S) = 6$ ←

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ب) احتمال آمدن عدد بزرگتر از 4

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A = \{5.6\} \longrightarrow n(A) = 2$$

$$S = \{1.2.3.4.5.6\} \longrightarrow n(S) = 6$$

ایستگاه سوال :

۱) در پرتاب دو تاس احتمال های زیر را به دست آورید.

الف) احتمال آمدن اینکه تاس اول زوج و تاس دوم عدد کوچکتر از ۳ باشد چقدر است؟

کل حالت ها برابر است با : $6 \times 6 = 36$

$$A = \{(2.1). (2.2). (4.1). (4.2). (6.1). (6.2)\} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب) احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده در دو تاس ۸ شود چقدر است؟

$$B = \{(2.6). (6.2). (4.4). (3.5). (5.3)\} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

۲) اگر یک سکه و یک تاس داشته باشیم

الف) کل حالت ها را بنویسید.

$$S = \{(1.ر). (2.ر). (3.ر). (4.ر). (6.ر). (1.پ). (2.پ). (3.پ). (4.پ). (6.پ). (7.پ). (8.پ)\}$$

$$n(S) = 2 \times 6 = 12 \quad \text{کل حالت ها}$$

روش دوم
حالت های تاس
حالت های سکه

ب) احتمال اینکه سکه (رو) و تاس عدد فرد بیاید را حساب کنید. $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

۳) اگر خانواده ای دارای سه فرزند باشد احتمال اینکه این خانواده دارای دو دختر باشد چقدر است؟

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

کل حالت ها

$$\left[\begin{array}{l} (د. د. د). (د. د. پ). (د. پ. د). (پ. د. د). \\ (د. پ. پ). (پ. د. پ). (پ. پ. د). (پ. پ. پ) \end{array} \right.$$

ایستگاه سوالات پایان فصل:

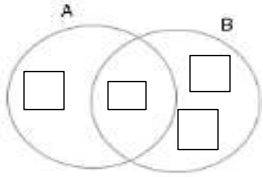
۱) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید

الف) عبارت "سه گل زیبا" نشان دهنده یک مجموعه می باشد

ب) $\{\emptyset\}$ یک مجموعه ی یک عضوی است.

ج) عددهای صحیح بین -۱ و ۱ یک مجموعه را مشخص می کند

د) هر مجموعه زیر مجموعه خودش است.

۲	<p>جاهای خالی را کامل کنید .</p> <p>الف) مجموعه ی زیر مجموعه ی همه ی مجموعه هاست</p> <p>ب) اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت نشان می دهیم</p> <p>پ) یک مجموعه ۳ عضوی زیر مجموعه دارد</p> <p>ت) اگر خانواده ای دو فرزند داشته باشد احتمال اینکه هر دو دختر باشند می باشند</p>
۳	<p>گزینه درست را انتخاب کنید .</p> <p>۱) دو تاس را همزمان پرتاب می کنیم تعداد همه حالت های ممکن چند تاست ؟</p> <p>الف) ۱۲ ب) ۳۶ ج) ۶ د) ۶۴</p> <p>۲) اعضای مجموعه ی $\{x \mid -2 < x < 4, x \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟ (مهر ۹۷)</p> <p>الف) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ب) $A = \{1, 2, 3\}$</p> <p>ج) $A = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4\}$ د) $A = \{-2, 0, 1\}$</p>
۴	<p>اگر دو مجموعه زیر با هم برابر باشند مقدار x را بدست آورید</p> $\{2x - 3.6\} = \{6 - 3.14\}$
۵	<p>با توجه به مجموعه های $A = \{4, 7, 6\}$ و $B = \{3, 2, 1\}$ و $C = \{4, 8, 6\}$ تساوی ها را کامل کنید.</p> <p>$(A \cup B) \cap C$ $n(A - C)$</p>
۶	<p>تاسی را دو بار می اندازیم</p> <p>الف) همه حالت های ممکن چقدر است؟ ب) احتمال اینکه اعداد رو شده مثل هم باشند چقدر است؟</p>
۷	<p>جای خالی را طوری کامل کنید که مجموعه ها برابر باشند</p> $\left\{ \frac{3}{5}, -4, \dots, 0, 25 \right\} = \left\{ \frac{3}{36}, \dots, \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{9}{25}} \right\}$
۸	<p>مجموعه D را با عضوهای مشخص کنید</p> $D = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } x \leq 2\}$
۹	<p>نمودار ون مناسب رسم کنید و مجموعه زیر را روی آن با هاشور نشان دهید.</p> $R - F$
۱۰	<p>- با توجه به معلومات زیر داخل مربع ها را با عدد های مناسب پر کنید</p> <p>$A - B = \{4\}$ $B - A = \{7, 5\}$ $A \cup B = \{2, 4, 5, 7\}$</p> 

فصل دوم - عددهای حقیقی

درس اول: عددهای گویا

اعداد گویا: هر عدد که بتوان به صورت کسرنوشت عدد گویاست (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \text{ نمایش داده می شود.}$$

نکته: مجموعه عدد گویا را نمی توان با اعضا مشخص کرد زیرا اولین عدد بزرگتر از هر عدد گویا معلوم نیست.

نکته: مجموعه اعداد گویا را نمی توان روی محور اعداد مشخص کرد زیرا همه اعداد روی محور گویا نیستند.

نکته: بین دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد

پیدا کردن چند کسربین دو عدد کسری: چندین روش وجود دارد که در اینجا به دو روش کاربردی می پردازیم.

الف) مخرج مشترک: ابتدا بین دو کسر مخرج مشترک میگیریم و کسرهایی بین آن دو کسر را می نویسیم حال اگر پیدا نشد صورت و مخرج کسر جدید را یکی بیشتر از تعداد کسرهایی خواسته شده ضرب میکنیم.

مثال: بین دو کسر $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسرنویسید.

$$\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \qquad \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

ابتدا مخرج مشترک میگیریم:

حال اگر کسر بود می نویسیم اگر هم نبود چون سه کسر خواسته در یک واحد بیشتر یعنی ۴ ضرب میکنیم.

$$\frac{8 \times 4}{12 \times 4} = \frac{32}{48} \qquad \frac{9 \times 4}{12 \times 4} = \frac{36}{48}$$

کسرهایی بین $\frac{32}{48}$ و $\frac{36}{48}$ را می نویسیم.

$$\frac{32}{48} < \frac{33}{48} < \frac{34}{48} < \frac{35}{48} < \frac{36}{48}$$

ب) روش میانگین: در این روش دو کسر را با هم جمع میکنیم و حاصل را بر ۲ تقسیم یا در $\frac{1}{2}$ ضرب میکنیم.

مثال: دقیقاً بین دو کسر $\frac{2}{7}$ و $\frac{3}{5}$ یک کسر پیدا کنید.

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} + \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{31}{35} \rightarrow \frac{31}{35} \times \frac{1}{2} = \frac{31}{70}$$

مقایسه کردن عددهای گویا: به دو روش زیر مقایسه میکنیم:

الف) به روش هم مخرج کردن: ابتدا مخرج همه کسرها را یکسان و سپس مقایسه میکنیم

مثال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{3} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{5}{2} \text{ و } \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{8}{12} \text{ و } \frac{9}{12} \text{ و } \frac{30}{12} \text{ و } \frac{2}{12} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{12} < \frac{3}{4} < \frac{5}{2}$$

(ب) تبدیل به اعشار: صورت را به مخرج تقسیم و خارج قسمت را می نویسیم

مثال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید

$$\frac{2}{5} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{7}{10} \rightarrow \frac{2}{5} = 0/40 \text{ و } \frac{3}{4} = 0/75 \text{ و } \frac{1}{2} = 0/50 \text{ و } \frac{7}{10} = 0/70$$

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

انواع اعداد گویا:

(الف) مختوم یا متناهی: اگر صورت را بر مخرج کسر تقسیم کنیم و باقی مانده صفر شود یا به عبارتی عددهای اعشاری متناهی بدست آید.

$$\frac{3}{4} = 0/75 \qquad \frac{6}{5} = 1/2$$

نکته: مخرج کسر را تجزیه کنیم و اعداد اول ۵ و ۲ و یا ۵ تنها بیاید.

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \times 2 \times 5} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3}{2 \times 2} \qquad \frac{2}{25} = \frac{2}{5 \times 5}$$

(ب) متناوب اگر در تقسیم صورت بر مخرج در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود به آن کسر متناوب می گویند. و خط تیره بالای عددها نشانه دوره تناوب و گردش عدد است مانند:

$$\frac{5}{11} = 0/454545000 = 0/4\bar{5}$$

$$\frac{2}{6} = 0/33333000 = 0/3\bar{3}$$

در متناوب ساده بعد از اعشار همه ی ارقام دوره گردش دارند.

$$\frac{7}{15} = 0/4666666 \dots = 0/4\bar{6}$$

$$\frac{11}{60} = 0/183333 \dots = 0/18\bar{3}$$

در متناوب مرکب بعد از اعشار یک یا چند رقم دوره گردش ندارند

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ نباشد کسر متناوب ساده است.

$$\frac{5}{21} = \frac{5}{3 \times 7} \qquad \frac{2}{9} = \frac{2}{3 \times 3}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر غیر از عامل ۲ و ۵ عامل دیگری باشد آن کسر متناوب مرکب است

$$\frac{7}{15} = \frac{7}{3 \times 5} \qquad \frac{5}{6} = \frac{5}{2 \times 3}$$

ایستگاه سوال:

(۱) حاصل عبارتها را بدست آورید.

الف)
$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

ب)
$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{3}{10}$$

$$\frac{17}{6} + \frac{7}{2} = -\frac{17}{6} + \frac{21}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

(۲) بین دو کسر $\frac{2}{3}$ و $\frac{2}{5}$ سه کسرنویسید

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{15}, \quad \frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15} \Rightarrow \frac{9}{15} \times \frac{4}{4} = \frac{36}{60}, \quad \frac{10}{15} \times \frac{4}{4} = \frac{40}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{36}{60} < \frac{37}{60} < \frac{38}{60} < \frac{39}{60} < \frac{40}{60}$$

(۳) کدام کسر نمایش اعشاری مختوم و کدام متناوب دارد؟

الف) $\frac{7}{6} = \frac{7}{2 \times 3}$ متناوب مرکب

ب) $\frac{5}{9} = \frac{5}{3 \times 3}$ متناوب ساده

ج) $\frac{5}{21} = \frac{5}{3 \times 7}$ متناوب ساده

د) $\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \times 2 \times 5}$ مختوم

درس دوم: عددهای حقیقی

اعداد گنگ یا اصم: اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آنها نامتناهی و دارای دوره تناوب نباشند

نکته: مجموعه اعداد گنگ را با حرف انگلیسی Q^c یا Q' نمایش می دهند.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد آنگاه \sqrt{n} عددی گنگ است (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند گنگ هستند)

نکته: عدد π چون دارای دوره تناوب نیست عدد گنگ است.

مثال: در جای خالی علامت \notin یا \in قرار دهید.

۲ مربع کامل نیست $1 - \sqrt{2} \in Q$ $3/14 \notin Q$ $\pi \in Q$ $\sqrt{47} \in Q$ 47 مربع کامل نیست $\sqrt{0/36} \notin Q$ $0/6$ $-\frac{2}{5} \in Q$

نکته: بین دو عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد

مثال: بین دو عدد طبیعی ۲ و ۳ چهار عدد گنگ بنویسید. (ابتدا دو عدد ۲ و ۳ را رادیکالی می‌کنیم برای اینکار در خودشان ضرب می‌کنیم و زیر رادیکال قرار می‌دهیم)

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$$

مثال: بین دو عدد ۴ و $\sqrt{13}$ سه عدد گنگ بنویسید. (کافی است عدد ۴ را رادیکالی کنیم)

$$\sqrt{13} < \sqrt{14} < \sqrt{15} < \sqrt{15/1} < \sqrt{16}$$

مثال: بین دو عدد $\sqrt{7}$ و $\sqrt{8}$ پنج عدد گنگ بنویسید.

$$\sqrt{7} < \sqrt{7/1} < \sqrt{7/2} < \sqrt{7/3} < \sqrt{7/4} < \sqrt{7/5} < \sqrt{8}$$

مثال: عدد $\sqrt{10} + 2$ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟

به طرفین ۲ واحد اضافه می‌کنیم

$$3 < \sqrt{10} < 4 \quad \longrightarrow \quad 2+3 < 2 + \sqrt{10} < 2+4$$

پس بین ۵ و ۶ قرار دارد

$$5 < 2 + \sqrt{10} < 6$$

نمایش اعداد گنگ روی محور:

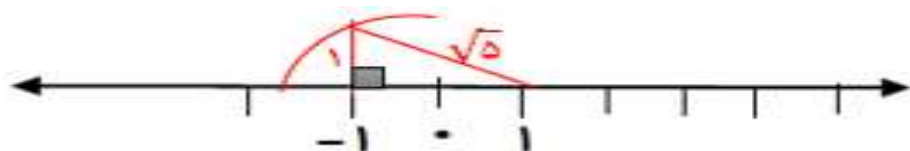
مثال: عدد $\sqrt{17}$ را روی محور نمایش دهید.

ابتدا مشخص می‌کنیم $\sqrt{17}$ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد ($4 < \sqrt{17} < 5$) چونکه پشت عددی قرار ندارد پس از مبدا شروع می‌کنیم و علامت $\sqrt{17}$ هم مثبت است پس ۴ واحد به سمت راست حرکت می‌کنیم و یک مثلث که رسم کردیم کمان مورد نظر را رسم می‌کنیم.



مثال: عدد گنگ $1 - \sqrt{5}$ را روی محور نشان دهید

ابتدا مشخص می‌کنیم $\sqrt{5}$ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد ($2 < \sqrt{5} < 3$) چونکه پشت عدد مثبت یک قرار دارد پس از مثبت یک شروع می‌کنیم و علامت $\sqrt{5}$ هم منفی است پس ۲ واحد به سمت چپ حرکت می‌کنیم و یک مثلث که رسم کردیم کمان مورد نظر را رسم می‌کنیم.



اعداد حقیقی: اجتماع اعداد گویا و گنگ مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهد.

نکته: مجموعه اعداد حقیقی را با حرف انگلیسی R نمایش می دهند $Q \cup Q^c = R$

نکته: اشتراک مجموعه اعداد گویا و گنگ تهی است. $Q \cap Q^c = \emptyset$

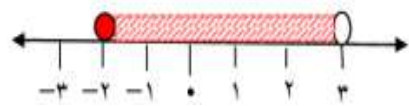
نکته: نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی (N) و اعداد حسابی (W) و اعداد صحیح (Z) و اعداد گویا (Q) و اعداد گنگ (Q^c) و اعداد حقیقی (R) به صورت زیر است:



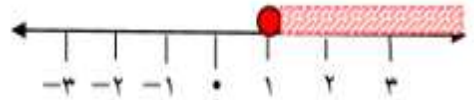
نمایش اعداد حقیقی روی محور: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند پس نمایش این اعداد به صورت یک خط ممتد است (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد دایره توپر و اگر بدون سرکش باشد دایره توخالی قرار می دهیم)

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

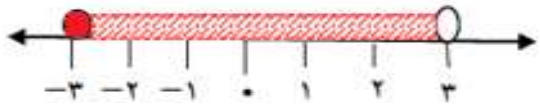
الف) $A = \{x \in R \mid -2 \leq x < 3\}$



ب) $B = \{x \in R \mid 1 \leq x\}$



مثال: مجموعه متناظر محور مقابل را بنویسید.



$C = \{x \in R \mid -3 \leq x < 3\}$

ایستگاه سوال:

۱) عدد $-2 + \sqrt{17}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

$$4 < \sqrt{17} < 5$$

$$-2 + 4 < -2 + \sqrt{17} < -2 + 5 \Rightarrow +2 < -2 + \sqrt{17} < +3$$

۲) بین جفت عدد $\sqrt{5}$ و ۳ زیر دو عدد گنگ بنویسید.

$$\sqrt{5} \text{ و } 3$$

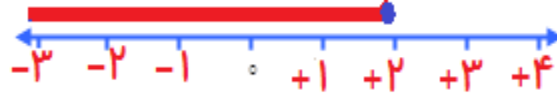
$$\sqrt{5} \text{ و } \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$$

۳) مجموعه های زیر را روی محور نمایش دهید.

$$A = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 3\}$$



$$B = \{x \in R \mid x \leq 2\}$$



درس سوم: قدرمطلق و محاسبه تقریبی

قدرمطلق: فاصله نقطه نمایش یک عدد مانند a را از مبدا مختصات قدرمطلق a می نامیم و آن را به صورت $|a|$ نشان می دهیم.

خواص قدرمطلق:

$$|a| = \begin{cases} a > 0 \rightarrow |a| = a & \rightarrow \left| +\frac{2}{3} \right| = +\frac{2}{3} \\ a = 0 \rightarrow |a| = 0 & \rightarrow |0| = 0 \\ a < 0 \rightarrow |a| = -a & \rightarrow |-4| = +4 \end{cases}$$

قرینه a

مثال: عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید

$$|7 - 12 \div 4 \times 3 + 1| = |7 - 12 \div 4 \times 3 + 1| = |7 - 3 \times 3 + 1| = |7 - 9 + 1| = |-1| = +1$$

$$|3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5} \quad \text{چونکه } \sqrt{9} \text{ از } \sqrt{5} \text{ بیشتر و علامت آن مثبت است پس درون قدر مطلق مثبت می شود که خود عدد را می نویسیم}$$

$$|-4 + \sqrt{10}| = +4 - \sqrt{10} \quad \text{چونکه } \sqrt{16} \text{ از } \sqrt{10} \text{ بیشتر و علامت آن منفی است پس درون قدر مطلق منفی است که باید قرینه کنیم}$$

نکته: اگر $a > 0$ و $b > 0$ باشد آنگاه: $ab > 0$ (یعنی اگر دو عدد مثبت باشند حاصل ضرب آنها نیز مثبت است)

نکته: اگر $a < 0$ و $b < 0$ باشد آنگاه: $ab > 0$ (یعنی اگر دو عدد منفی باشند حاصل ضرب آنها مثبت است)

نکته: $a > 0$ و $b > 0$ باشد آنگاه: $|a + b| = a + b$

نکته: $a < 0$ و $b < 0$ باشد آنگاه: $|a + b| = -(a + b)$

مقدار عددی: به جای حروف انگلیسی عددهای داده شده قرار می دهیم و در انتها حاصل قدر مطلق را محاسبه می کنیم

مثال: اگر $a = 3$ و $b = -2$ باشد، حاصل عبارت $|a + b| - 2|ab|$ بدست آورید.

$$|a + b| - 2|ab| = |3 + (-2)| - 2 \times |3 \times (-2)| = |1| - 2 \times |-6| = 1 - 12 = -11$$

نکته: با توجه به مفهوم قدر مطلق رابطه زیر همیشه درست است.

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

مثال: حاصل هر عبارت را بدست آورید.

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| = -1 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} = |3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$$

ایستگاه سوال:

۱) اگر $a = -2$ و $b = \sqrt{3}$ و $c = 3$ حاصل عبارت $|2a - b + c|$ را بدست آورید.

$$|2a - b + c| = |2 \times (-2) - \sqrt{3} + 3| = |-1 - \sqrt{3}| = +1 + \sqrt{3}$$

۲- عبارتهای زیر را با هم مقایسه کنید.

$$|-8 + 5| \quad \bigcirc \quad |-8| + |5|$$

$$|(-6)^2| \quad \bigcirc \quad |-6|^2$$

$$|-3| \quad \bigcirc \quad 8 + 5$$

$$|+36| \quad \bigcirc \quad (+6)^2$$

$$3 < 13$$

$$36 = 36$$

۳- عبارت زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید

$$\sqrt{(\sqrt{8} - 3)^2} = |\sqrt{8} - 3| = +3 - \sqrt{8}$$

ایستگاه سوالات پایان فصل:

۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید الف) حاصل $\sqrt{(-3)^2}$ برابر ۳- است. <input type="checkbox"/> ب) عددی وجود دارد هم حقیقی هم صحیح است. <input type="checkbox"/> پ) عدد π عضو اعداد گویاست. <input type="checkbox"/> ت) عدد ... 26116116116 / عددی گنگ است <input type="checkbox"/>
۲	جاهای خالی را کامل کنید. الف) عدد دقیقاً وسط دو عدد $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{6}$ است. ب) عدد حقیقی نامنفی به صورت نمایش داده میشود. ت) عدد $\sqrt{4+9}$ عددی است. (گویا، گنگ) ت) حاصل $\sqrt{(-6)^2}$ برابر است.
۳	گزینه مناسب را انتخاب کنید نمایش اعشاری $\frac{5}{16}$ برابر است با: الف) $0/312$ ب) $0/3\bar{1}$ ج) $0/31\bar{2}$ د) $0/312\bar{5}$ عدد $\sqrt{24} - 4 -$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ الف) ۶- و ۷- ب) ۷- و ۸- ج) ۹- و ۸- د) ۹- و ۱۰-
۴	بین دو کسر $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ سه کسر دیگر بنویسید.
۵	بین دو عدد ۵ و ۶ سه عدد گنگ بنویسید.
۶	مجموعه زیر را روی محور نمایش دهید. $\{x \in R \mid -3 < x \leq 4\}$
۷	حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $\sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} =$
۸	عدد گنگ $1 + \sqrt{7}$ را روی محور نمایش دهید.
۹	اگر $a = 2$ و $b = -3$ باشد، حاصل عبارت را بدست آورید. $5 a - b $
۱۰	حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} =$

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

درس اول: استدلال

استدلال: دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای بیان موضوعی که در ابتدا مشخص نبوده است

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوئیم.

مثال نقض: برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم.

مثال: کدام یک از استدلال های زیر منطقی و کدام یک غیرمنطقی است.

(الف) رضا می گوید من هر موقع پیراهن آبی را برای امتحان بپوشم نمره خوبی میگیرم. **غیر منطقی**

(ب) عامل اصلی شیوع بیماری کرونا در کشور رعایت نکردن پروتکل های بهداشتی به خصوص نزدن ماسک است. **منطقی**

مثال: آیا طول پاره خط های AB و CD در شکل های مقابل برابرند؟

هر دو پاره خط با هم برابرند اما خطای دید ما باعث شود پاسخ نادرست بدهیم.



مثال: برای مسئله زیر یک مثال نقض بیارید.

حاصل ضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است؟ $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

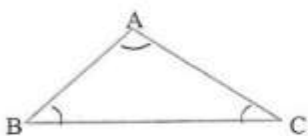
فرض مسئله: اطلاعاتی مسئله (داده های مسئله) و حقایقی که درستی آن ها از قبل برای ما معلوم شده است

حکم مسئله: خواسته های مسئله یا چیزی که سوال از ما می خواهد.

مثال: در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید.

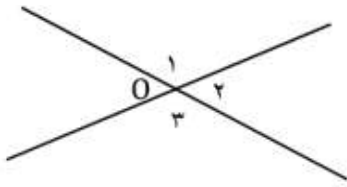
(الف) زاویه های روبه رو در لوزی برابرند **فرض: خواص لوزی** **حکم: برابر بودن زاویه های روبه رو**

(ب) اگر در یک مثلث دو زاویه نامساوی باشند ضلع مقابل به زاویه ی بزرگ تر از ضلع مقابل به زاویه ی کوچک تر بزرگ تر است. **برای حل مسئله های هندسی که شکل ندارند حتما شکل رسم کنیم**



فرض $\hat{A} > \hat{B}$ و مثلث ABC
حکم $BC > AC$

مثال : ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند



فرض : \hat{O}_1 و \hat{O}_2 دو زاویه متقابل به راس
حکم : $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \text{ (درجه)} \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \text{ (درجه)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

ایستگاه سوال:

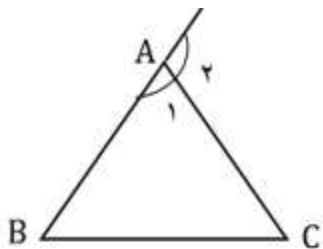
۱) نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقه وزنه برداری بودند هر دو عقیده داشتند که نمیتواند وزنه بردار وزنه ۱۰۰ کیلویی را بلند کند استدلال های دو نفر را ببیند و کدام استدلال قابل اعتماد تر است؟

نیما: هفته پیش تمرینات بهتری انجام داده بود ولی نتوانسته بود وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند. قابل اعتماد است

پژمان: امروز دوشنبه است من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام او هیچ وقت در روزهای زوج موفق نبوده است

۲) ثابت کنید زاویه خارجی دو مثلث برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن

ابتدا شکل آن را رسم میکنیم و بعد از نوشتن فرض و حکم به اثبات آن می پردازیم:



فرض : \hat{A}_2 زاویه ی خارجی مثلث
حکم : $\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \text{ (درجه)} \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ (درجه)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

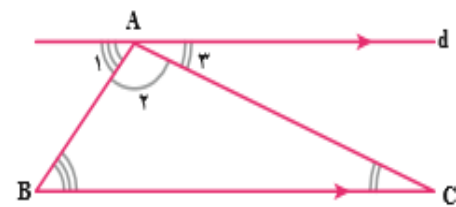
۳) نشان دهید مجموع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

فرض : $\triangle ABC$

حکم : $A + B + C = 180$

خط d را موازی با ضلع BC رسم میکنم که از زاویه A عبور کند

حال اثبات میکنیم:



$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

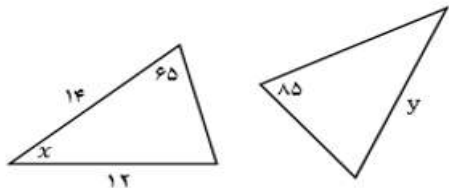
درس سوم: هم نهشتی مثلث ها

هم نهشتی مثلث ها: دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند:

(الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین (ض ض ض) (ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین (ض ض ز) (ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: ابتدا بررسی میکنیم که وترها با هم برابر باشند سپس یک ضلع و یا یک زاویه تند پیدا میکنیم: (الف) وتر و یک زاویه تند (و ز) (ب) وتر و یک ضلع (و ض)

مثال: دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید.

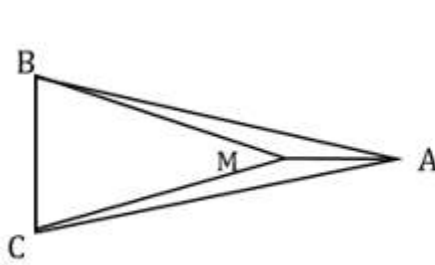


دو مثلث هم نهشت ضلع ها و زاویه های متناظر برابرند.

$$180 - (85 + 65) = 30 \quad x = 30$$

$$y = 14$$

مثال: در شکل زیر دو مثلث ABC و MBC متساوی الساقین هستند دلیل هم نهشتی دو مثلث AMC و AMB را بنویسید.

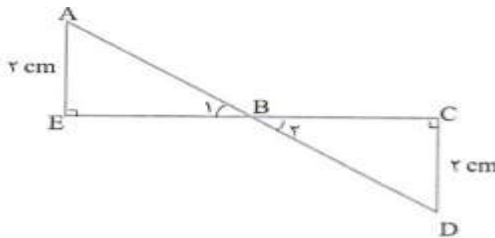


حکم: $\triangle AMB \cong \triangle AMC$

فرض: $AB = AC, MB = MC$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AB = AC \\ \text{فرض } MB = MC \\ \text{ضلع مشترک } AM = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC \quad (\text{ض ض ض})$$

مثال: در شکل مقابل پاره خط های AD و EC یکدیگر را نصف کرده اند دو مثلث ABC و BCD به چه حالتی هم نهشت است.



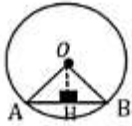
$$\text{فرض } \left\{ \begin{array}{l} AB = BD \\ EB = BC \\ \text{متقابل به راس } B_1 = B_2 \\ AE = CD = 2 \\ E = C = 90 \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle BCD \quad (\text{و ض})$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{C} = 90^\circ \\ \text{طبق فرض } AB = BD \\ \text{طبق فرض } BE = BC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle BCD \quad (\text{و ض})$$

به حالت های دیگر هم میتوان هم نهشتی را اثبات کرد.

ایستگاه سوال:

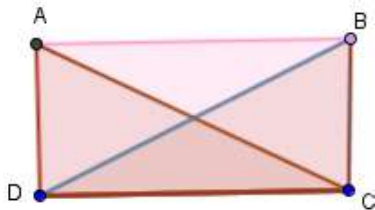
(۱) با توجه به شکل زیر نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود آن وتر را نصف می کند.



فرض $\left\{ \begin{array}{l} OH \text{ بر } AB \text{ است عمود } H_1 = H_2 \\ \text{وتر دایره } OA = OB \end{array} \right.$
 حکم $AH = HB$

$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{درجه } \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow AH = HB$
 (اجزای متناظر) (و ض)

۲) ثابت کنید در هر مستطیل قطرها با هم برابرند.

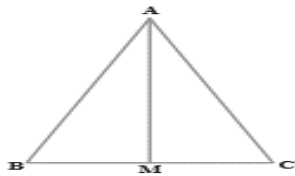


مستطیل است $ABCD$: فرض

حکم $AC = BD$

$\left. \begin{array}{l} BC = AD \\ DC = DC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC \rightarrow AC = BD$
 (ض ض ض)

۳) در مثلث متساوی الساقین ABC میانه AM را رسم کرده ایم مثلث های AMB و AMC به چه حالتی همبسته اند؟



فرض $\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ \text{میانه } BM = MC \end{array} \right.$
 حکم $ABC \cong AMC$

$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ BM = MC \\ AM = AM \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AMC$
 (ض ض ض)

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

قدم های حل مسئله در هندسه:

۱) درک و فهم ۲) رسم شکل ۳) نوشتن فرض و حکم مسئله ۴) راهبرد حل مسئله

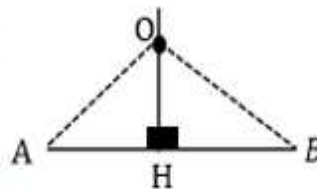
مثال: نشان دهید هر نقطه روی عمود منصف قرار داشته باشد از دوسر پاره خط به یک اندازه است.

گام اول: (درک و فهم مسئله) عمود منصف خطی بر خط رسم شده عمود باشد و آن خط را نصف کند.

فرض: OH عمود منصف
 حکم: $OA = OB$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

گام دوم: (رسم شکل)



$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AH = HB \\ \text{درجه } \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow OA = OB$
 (اجزای متناظر) (ض ض ض)

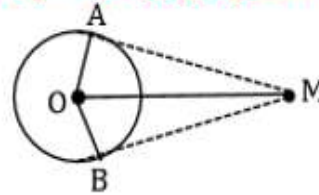
مثال: نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول: (درک و فهم مسئله) شعاع دایره بر خط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

فرض: $OA = OB, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

حکم: $MA = MB$



گام دوم: (رسم شکل)

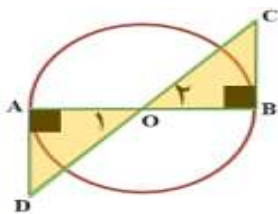
گام چهارم: (راهبرد حل مسئله)

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{درجه } \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \Rightarrow MA = MB$$

(اجزای متناظر) (و ض)

ایستگاه سوال:

(۱) در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماسند نشان دهید BC و AD برابرند.



فرض $\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ OB = OA \\ O_1 = O_2 \end{cases}$

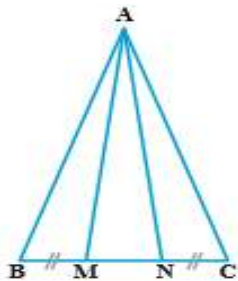
حکم $AD = BC$

شعاع دایره $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
 $OA = OB$
 متقابل به رأس $O_1 = O_2$

(رض ز) $\rightarrow \hat{DOA} = \hat{COB}$

اجزای متناظر $\rightarrow AD = BC$

(۲) در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM = NC$.



فرض $\begin{cases} AB = AC \\ BM = NC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases}$

حکم $AM = AN$

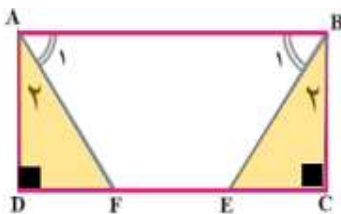
نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

فرض $AB = AC$
 فرض $\hat{B} = \hat{C}$
 فرض $BM = NC$

(رض ز) $\rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACN$

اجزای متناظر $\rightarrow AM = AN$

(۳) در مستطیل ABCD پاره خط های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ برابرند. ثابت کنید BE و AF مساوی اند.



فرض $\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \end{cases}$

حکم $AF = BE$

پس متمم های آن ها با هم برابرند $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$

فرض $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$
 فرض $AD = BC$
 فرض $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$

(رض ز) $\rightarrow \triangle ADF \cong \triangle BCE$

اجزای متناظر $\rightarrow AF = BE$

درس پنجم: شکل های متشابه

دو شکل متشابه: دو شکلی که اضلاع به یک نسبت تغییر کند (کوچک و بزرگ یا بدون تغییر) ولی زاویه ها تغییر نکرده باشد

نکته: دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه هستند.

نکته: دو مستطیل همواره متشابه نیستند (چون اضلاع ممکن است به یک اندازه تغییر نکند)

نکته: دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند (چون ممکن است زاویه ها دو به دو با هم برابر نباشند)

نکته: دو شکل هم نهشت همواره متشابه هستند و نسبت تشابه آن ها عدد یک است.

نکته: نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را **نسبت تشابه** می گویند.

مثال: اگر دو لوزی با هم متشابه باشند و اندازه ضلع بزرگتر لوزی ۱۸ و ضلع کوچکتر آن ۱۲ باشد نسبت تشابه را بدست

$$\text{نسبت تشابه} \quad \frac{18}{12} = \frac{3 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{2} \quad \text{آورید.}$$

نکته: در سوال بالا نسبت تشابه $\frac{3}{2}$ هم می تواند باشد یعنی هر دو شکل متشابه دو نسبت تشابه دارد خودش با معکوشش.

مثال: مثلثی با اضلاع ۴ و ۵ و ۸ با مثلث دیگری با اضلاع $x - 1$ و 10 و $4y$ با هم متشابه هستند مقدار y و x را

بدست آورید. ابتدا نسبت تشابه را بدست آوریم $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

$$\frac{4}{x-1} = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\text{با طرفین وسطین}} \quad x-1=8 \rightarrow x=9$$

$$\frac{8}{4y} = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\text{با طرفین وسطین}} \quad 4y=16 \rightarrow y=\frac{16}{4}=4 \rightarrow y=4$$

مثال: مقیاس نقشه ای $\frac{1}{10000}$ است اگر طول جاده روی نقشه ای ۸ سانتی متر باشد. طول واقعی جاده چند متر است؟

$$\frac{\text{اندازه نقشه}}{\text{اندازه واقعی}} \rightarrow \frac{1}{10000} = \frac{8}{x} \quad \xrightarrow{\text{با طرفین وسطین}} \quad x=80000$$

چونکه براساس متر خواسته پس به متر تبدیل میکنیم $80000 \div 100 = 800$

(ب) اگر اندازه یکی از زاویه ها در روی نقشه ۵۰ درجه باشد در واقعیت چه قدر است؟ در دو شکل متشابه زاویه تغییر نمی کند پس ۵۰ درجه است.

ایستگاه سوال:

(۱) در یک نقشه، مقیاس ۱ : ۲۰۰ است فاصله دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتیمتر است فاصله این دو نقطه در اندازه واقعی چه قدر است؟

$$\frac{1}{200} = \frac{3/5}{x} \Rightarrow x = \frac{200 \times 3/5}{1} = 700 \text{ cm}$$

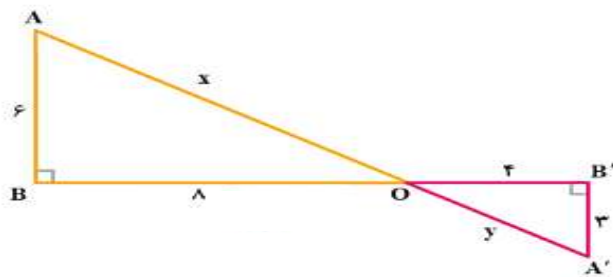
$$x = 7 \text{ m}$$

(۲) اگر نسبت تشابه دو مربع $\frac{3}{5}$ باشد و اندازه ضلع مربع بزرگ تر ۳۰ باشد اندازه ضلع مربع کوچک تر چه قدر است؟

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{30} \rightarrow 5y = 3 \times 30$$

$$5y = 90 \rightarrow y = \frac{90}{5} = 18$$

(۳) در شکل زیر:



(الف) مقادیر x و y را بدست آورید.

$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x^2 = 36 + 64 = 100$$

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

$$y^2 = 3^2 + 4^2$$

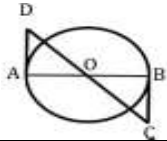
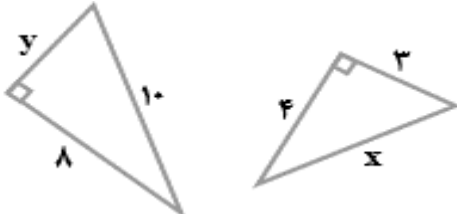
$$y^2 = 9 + 16 = 25$$

$$y = \sqrt{25}$$

(ب) آیا دو مثلث با هم متشابه هستند؟ بله چونکه نسبت تشابه همه ضلع ها $\frac{1}{2}$ است.

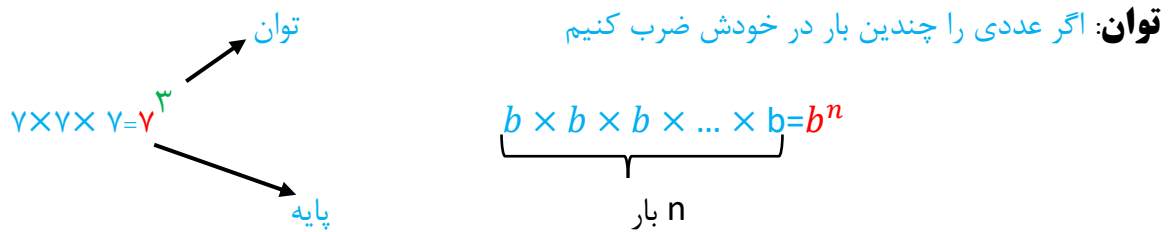
ایستگاه سوالات پایان فصل

۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) دو مستطیل دلخواه همیشه با هم متشابه هستند (ب) در هر مربع قطرهای نیمساز زاویه های روبه رو هستند (پ) داده های یک مسئله را فرض می گویند (ت) در دایره کمان های نظیر وترهای مساوی با هم مساوی هستند</p>
۲	<p>جاهای خالی را کامل کنید.</p> <p>(الف) در هر لوزی زاویه های مجاور به یک ضلع هستند</p> <p>(ب) استفاده از ویژگی های استدلال در یک عضو برای سایر اعضا را می نامند.</p>

<p>گزینه مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>الف) نسبت تشابه دو مربع $\frac{3}{5}$ است. اگر محیط یکی ۲۴ سانتیمتر باشد. اندازه ضلع مربع دیگری چقدر است؟ <input type="radio"/> ۴۰ (۱) <input type="radio"/> ۳۰ (۲) <input type="radio"/> ۱۰ (۳) <input type="radio"/> ۸ (۴)</p> <p>ب) شکل های کدام گزینه همواره متشابه نیستند؟ <input type="radio"/> دو مربع (۱) <input type="radio"/> دو لوزی (۲) <input type="radio"/> دو مثلث متساوی الاضلاع (۳) <input type="radio"/> دو پنج ضلعی منتظم (۴)</p> <p>ج) نسبت مساحت های دو مربع متشابه $\frac{1}{16}$ می باشد. نسبت تشابه آن ها کدام است؟ <input type="radio"/> $\frac{1}{4}$ (۱) <input type="radio"/> $\frac{1}{8}$ (۲) <input type="radio"/> $\frac{1}{16}$ (۳) <input type="radio"/> $\frac{1}{32}$ (۴)</p> <p>د) اگر در طبیعت زاویه بین دو خیابان 65° باشد زاویه بین آنها در نقشه چند درجه است؟ <input type="radio"/> ۶۵ درجه (۱) <input type="radio"/> $32/5$ درجه (۲) <input type="radio"/> ۱۳۰ درجه (۳) <input type="radio"/> صفر درجه (۴)</p>	۳
<p>استدلال زیر را کامل کنید.</p> <p>لوژی نوعی است.</p> <p>در لوژی زاویه های روبه رو در متوازی الاضلاع برابر است.</p>	۴
<p>ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ضلع های رو به رو با هم مساوی هستند.</p>	۵
<p>در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس هستند نشان دهید که BC و AD با هم برابرند.</p> 	۶
<p>نشان دهید هر نقطه که روی عمود منصف پاره خط قرار دارد از دو سر آن به یک فاصله است. (فرض و حکم نوشته شود) فرض: حکم:</p>	۷
<p>مثلی به اضلاع ۷ و ۵ و x با مثلث دیگری به اضلاع ۱۵ و ۲۴ با هم متشابه هستند مقادیر x و y را بدست آورید.</p>	۸
<p>با ارائه یک مثال نقض ادعای زیر را رد کنید. « حاصل ضرب دو عدد گنگ همیشه عددی گنگ است »</p>	۹
<p>دو شکل زیر با هم متشابه اند مقدار x و y را بدست آورید</p> 	۱۰

فصل چهارم: توان و ریشه

درس اول: توان صحیح



قواعد توان:

(۱) هر عددی به توان صفر برسد برابر است با یک (به شرطی که پایه صفر نباشد) $a^0 = 1$ $a \neq 0$

مثال: $5^0 = 1$ و $(-3)^0 = 1$

(۲) هر عددی به توان یک برسد برابر است با خود عدد. $m^1 = m$ مثال: $4^1 = 4$ و $(-9)^1 = -9$

(۳) اگر عددی دو بار به توان برسد توان ها در هم ضرب می شوند (به شرطی که پایه داخل پرانتز باشد)

مثال: $(3^2)^5 = 3^{10}$ $(a^n)^m = a^{m \times n}$

(۴) ضرب اعداد توان دار:

(الف) اگر پایه ها با هم برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

مثال: $7^4 \times 7^5 = 7^9$ $(\frac{1}{7})^3 \times (0.15)^4 = (0.15)^7$

(ب) اگر توان ها با هم برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم. $a^m \times b^m = (ab)^m$

مثال: $11^4 \times 5^4 = (11 \times 5)^4 = 55^4$ $(-2)^{13} \times (4)^{13} = (-8)^{13}$

(۵) تقسیم اعداد توان دار:

(الف) اگر پایه ها با هم برابر باشند یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

مثال: $\frac{18^8}{18^2} = 18^{8-2} = 18^6$ $(-10)^{11} \div (-10)^3 = (-10)^8$

(ب) اگر توان ها با هم برابر باشد: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم. $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$

مثال: $15^8 \div 3^8 = 5^8$ $6^5 \div 18^5 = (\frac{6}{18})^5 = (\frac{1}{3})^5$

۶) توان منفی: برای بدست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس می کنیم تا توان مثبت شود $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

مثال: $\left(\frac{3}{1}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+5}$ $\left(\frac{6}{11}\right)^{-7} = \left(\frac{11}{6}\right)^{+7}$

نکته: به طور کلی اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت منتقل شود توان آن قرینه می شود یا به عبارت دیگر هر جا به جایی صورت و مخرج توان را قرینه می کند.

نکته: در جمع چند عدد با پایه و توان برابر ابتدا آن ها را به ضرب تبدیل می کنیم و مانند قواعد ضرب حاصل آن را بدست می آوریم.

مثال: $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^1 \times 3^5 = 3^6$ $5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 = 5^1 \times 5^7 = 5^8$

نکته: در ضرب و تقسیم اعداد باید به دنبال این باشیم که پایه برابر یا توان برابر پیدا کنیم. اگر نبود می توانیم پایه و یا توان را تجزیه کنیم

مثال: $8^5 \times 2^7 = (2^3)^5 \times 2^7 = 2^{15} \times 2^7 = 2^{22}$ $9^2 \div 2^7 = (3^2)^2 \div 3^3 = 3^4 \div 3^3 = 3^1$

ایستگاه سوال:

۱) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

برای جمع و تفریق توان های منفی ابتدا توان را مثبت می کنیم

الف) $3^{-1} + 2^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

ب) $3^{-2} \times 4^{-2} = (3 \times 4)^{-2} = 12^{-2} = \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$

۲) در جای خالی علامت < یا > قرار دهید

$3^{-1} > 3^{-2}$	$(0.5)^{-2} > (0.6)^{-2}$	$2^{11} < 8^4$	$-5^2 < (-5)^2$
$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	2^{11}	$-\left(\frac{1}{5}\right)^2$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	2^{12}	$-\frac{1}{25}$
	$\left(\frac{5}{10}\right)^{-2}$	$(2^3)^4$	$\left(\frac{1}{-5}\right)^2$
	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$		$\frac{1}{25}$
	$(2)^{-2}$		
	$\left(1\frac{4}{6}\right)^{-2}$		

۳) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $3^{-4} \times 3^2 \div 2^7 = 3^{-4+2} \div 2^7 = 3^{-2} \div 2^7 = 3^{-2} \div 3^3 = 3^{-2-(3)} = 3^{-2-3} = 3^{-5}$

$$\text{ب) } \frac{2^8 \times 5^{10}}{2^4 \times 5^6} = 2^{8-4} \times 5^{10-6} = 2^4 \times 5^4 = 10^4$$

$$\text{پ) } (0.2)^{-4} \times 25^{-4} = (0.2)^{-4} \times (5^2)^{-2} = (0.2)^{-4} \times 5^{-4} = (0.2 \times 5)^{-4} = 1$$

$$\text{ت) } \frac{9^4 \div 9^{-2}}{3^{-7} \times 3^2} = \frac{9^{4-(-2)}}{3^{-7+2}} = \frac{9^6}{3^{-5}} = \frac{(3^2)^6}{3^{-5}} = \frac{3^{12}}{3^{-5}} = 3^{12-(-5)} = 3^{12+5} = 3^{17}$$

درس دوم: نماد علمی

نماد علمی: برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم

نکته: به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عدد صحیحی است.

الف) نماد علمی اعداد بزرگتر از یک (توان مثبت): ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مثال:

$$47890000 = 4.789 \times 10^7$$

$$3756 = 3.756 \times 10^3$$

$$37564/93 = 3.756493 \times 10^4$$

ب) نماد علمی اعداد بین صفر و یک (توان منفی): ابتدا یک رقم به غیر از صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم

$$0.0000768 = 7.68 \times 10^{-5} \quad 0.00678 = 6.78 \times 10^{-3} \quad 0.967 = 9.67 \times 10^{-1}$$

نکته: اگر عدد به صورت نماد علمی باشد می توان آن را به صورت نمایش اعشاری نوشت

الف) اگر توان مثبت باشد به اندازه عدد توان ممیز را به سمت راست می بریم

$$3/456 \times 10^{+4} = 34560$$

ب) اگر توان منفی باشد به اندازه عدد توان ممیز را به سمت چپ می بریم

$$8/3 \times 10^{-3} = 0.0083$$

$$7/8 \times 10^{-1} = 0.78$$

ایستگاه سوال:

۱) هر یک از عدد های داده شده را با نماد علمی بنویسید

$$2450000 = 2.45 \times 10^6$$

$$0.007 = 7 \times 10^{-3}$$

$$14.4 = 1/4.4 \times 10^{+3}$$

$$.72 = 7/2 \times 10^{-5}$$

(۲) نمایش اعشاری عدد های زیر را بنویسید

$$9/0.4 \times 10^{-3} = .00904$$

$$7 \times 10^{+6} = 7000000$$

(۳) حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت نماد علمی بنویسید

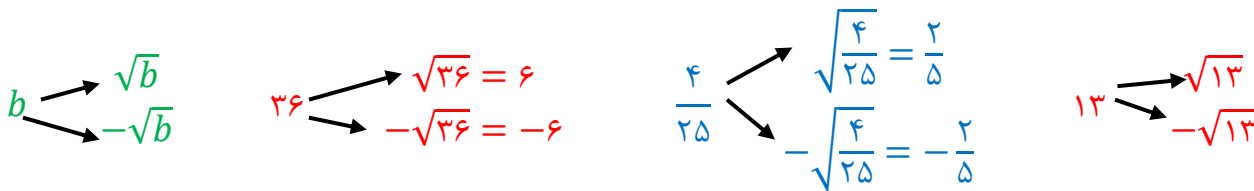
الف) $(.000009 \times 4 \times 10^{11}) = 9 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{11} = 36 \times 10^{-6+11} = 36 \times 10^{+5} = 3/6 \times 10^{+1} \times 10^{+5} = 3/6 \times 10^{+6}$

ب) $\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}} = \frac{12/5}{25} \times \frac{10^{-4}}{10^{-19}} = .48 \times 10^{+15} = 48 \times 10^{-1} \times 10^{+15} = 48 \times 10^{-1+15} = 48 \times 10^{+14}$

درس سوم: ریشه گیری

ریشه

الف) ریشه دوم اعداد: به طور کلی هر عدد حقیقی مثبت دو ریشه دوم دارد.



مثال: عدد ۶- ریشه دوم ندارد

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند

ب) ریشه سوم اعداد: به طور کلی همه ی اعداد حقیقی یک ریشه سوم دارند. فرجه یا ریشه سوم $\sqrt[3]{a}$

مثال: ریشه سوم $\sqrt[3]{8} = 2$ (یعنی چه عددی را سه بار در خودش ضرب کنیم ۸ می شود)

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt[3]{14^3} = 14$$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10}$$

ضرب و تقسیم رادیکال ها:

نکته: اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب می کنیم و یا بر هم تقسیم کنیم.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

نکته: اگر پشت رادیکال ها اعداد صحیح باشد ابتدا عددهای صحیح را در هم ضرب و یا تقسیم می کنیم سپس رادیکال ها

$$2\sqrt{2} \times 3\sqrt{8} = 6\sqrt{2 \times 8} = 6\sqrt{16} = 6 \times 4 = 24$$

$$\frac{\sqrt{8 \times 5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{8 \times 5}{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

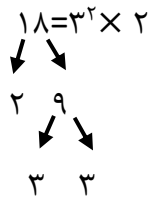
$$9\sqrt[3]{54} \div 3\sqrt[3]{2} = \frac{9\sqrt[3]{54}}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{9}{3} \times \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = 3 \times \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = 3 \times \sqrt[3]{27} = 3 \times 3 = 9$$

$$\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{60}}{1} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 60}{5}} = \sqrt[3]{18 \times 12} = \sqrt[3]{216} = 6$$

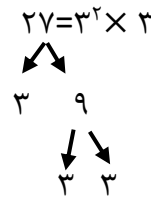
ساده کردن رادیکال ها: بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد به این صورت که با توجه به هر رادیکال عددهای زیر رادیکال را تجزیه درختی می کنیم و براساس فرجه توان دار می کنیم و هر پایه که توان آن با فرجه برابر باشد از زیر رادیکال ها بیرون می آید.

مانند:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$



$$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$



$$\sqrt{128} = \sqrt{(2^3 \times 2^3 \times 2)} = 2 \times 2 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

تجزیه درختی میکنیم و سپس حاصل را به صورت روبه رو بدست می آوریم

ایستگاه سوال

(۱) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$$

منفی
مثبت
قرینه

(الف) اگر $y > 0$ و $x < 0$ باشد:

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = -x - (-y) = -x + y$$

منفی
منفی

(ب) اگر $y < 0$ و $x < 0$ باشد:

(۲) جاهای خالی را پر کنید:

$$-\sqrt{\frac{49}{16}} = -\frac{7}{4} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

(الف) ریشه دوم عدد $\frac{49}{16}$ برابر است با

$$\sqrt{-5}$$

(ب) ریشه سوم عدد -5 برابر است با

$$\sqrt{(-1)^2} = |-1| = +1$$

پ) عبارت $\sqrt{(-1)^2} = -1$ نادرست است زیرا

۳) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

الف)
$$\frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{15}} = \frac{\sqrt[3]{5 \times 54}}{\sqrt[3]{9 \times 15}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2}$$

ب)
$$-5\sqrt{3} \times 2\sqrt{12} = -10 \times \sqrt{36} = -10 \times 6 = -60$$

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال ها

جمع و تفریق رادیکال ها: برای جمع و تفریق رادیکال ها باید فرجه ها با هم برابر و هم چنین عبارت های زیر رادیکال با هم برابر باشد آنگاه عددهای پشت رادیکال را با هم جمع و تفریق می کنیم.

$$3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 1\sqrt{5}$$

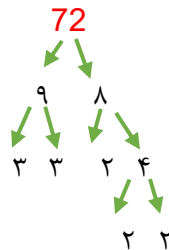
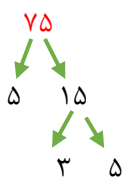
مانند:

$$-7\sqrt[3]{14} - 5\sqrt[3]{14} = -12\sqrt[3]{14}$$

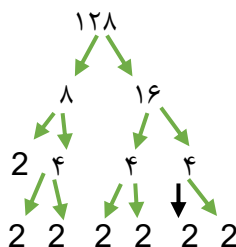
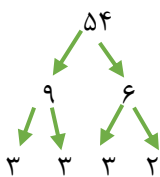
نکته: اگر فرجه ها با هم برابر باشند ولی عبارت زیر رادیکال با هم برابر نباشند آنگاه عبارت زیر رادیکال ها را ساده می کنیم تا با هم برابر باشند سپس جمع و تفریق می کنیم.

$$2\sqrt{2} - \sqrt{75} - 3\sqrt{72} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5^2 \times 3} - 3\sqrt{3^2 \times 2 \times 2} + 4\sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 3 \times 2 \times 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 18\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = -16\sqrt{2} - 1\sqrt{3}$$



$$5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{128} = 5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3^3 \times 2} - 4\sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2} = 5\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 16\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$



گویا کردن مخرج کسرها:

الف) اگر مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد: صورت و مخرج کسر را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \qquad \frac{1}{3\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{9 \times \sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{9 \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم: صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم با این تفاوت که بررسی می کنیم چقدر توان مخرج کم دارد تا به ۳ برسد که با فرجه برابر باشد حال که عدد زیر رادیکال را پیدا کردیم در صورت و مخرج ضرب می کنیم.

مثال:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5 \times 5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5} \quad (\text{توان } 5 \text{ عدد یک است پس یک } 5^2 \text{ کم داریم تا با فرجه برابر شود.)}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{4 \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2 \times a}} = \frac{4 \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{4 \sqrt[3]{a}}{a}$$

ایستگاه سوال

۱) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{20} + \sqrt{4} - \sqrt{50} - \sqrt{10} = \sqrt{2^2 \times 5} + 2 - \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{10}$
 $= 2\sqrt{5} + 2 - 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{2^2 \times 2} + \sqrt{8^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} = 2\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$

۲) مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

۳) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) در جای خالی علامت $>$ یا $=$ یا $<$ قرار دهید.

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} > \sqrt{5+4} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \sqrt{9} = 3 \end{matrix}$$

$$\sqrt{16} > \sqrt{3^2 + 2^2} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \end{matrix}$$

$$\frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^0$$

(ب) در جای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$\frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = \frac{\cancel{12}^2}{\cancel{4}^1 \times \cancel{3^2}^2} = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{3}^2} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

ایستگاه سوالات پایان فصل

<p>۱</p> <p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) $(-\frac{1}{5})^{-2} = \frac{1}{25}$</p> <p>(ب) $180000 = 1/8 \times 10^4$</p> <p>(ت) $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$</p>	<p>۱</p> <p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) $(-\frac{1}{5})^{-2} = \frac{1}{25}$</p> <p>(ب) $180000 = 1/8 \times 10^4$</p> <p>(ت) $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$</p>
<p>۲</p> <p>جاهای خالی را کامل کنید.</p> <p>(الف) ریشه ی سوم عدد -27 مساوی است</p> <p>(ب) حاصل $5^{-1} + 3^{-1}$ برابر است.</p>	<p>۲</p> <p>جاهای خالی را کامل کنید.</p> <p>(الف) ریشه ی سوم عدد -27 مساوی است</p> <p>(ب) حاصل $5^{-1} + 3^{-1}$ برابر است.</p>
<p>۳</p> <p>گزینه مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>(الف) حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2}$ کدام گزینه است.</p> <p>(۱) $\sqrt{2} - 2$</p> <p>(۲) $2 - \sqrt{2}$</p> <p>(۳) صفر</p> <p>(۴) $\pm(\sqrt{2} - 2)$</p> <p>(ب) حاصل $(-\frac{1}{10})^{-1}$ گزینه می باشد.</p> <p>(۱) 10</p> <p>(۲) -10</p> <p>(۳) $\frac{1}{10}$</p> <p>(۴) $-\frac{1}{10}$</p>	<p>۳</p> <p>گزینه مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>(الف) حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2}$ کدام گزینه است.</p> <p>(۱) $\sqrt{2} - 2$</p> <p>(۲) $2 - \sqrt{2}$</p> <p>(۳) صفر</p> <p>(۴) $\pm(\sqrt{2} - 2)$</p> <p>(ب) حاصل $(-\frac{1}{10})^{-1}$ گزینه می باشد.</p> <p>(۱) 10</p> <p>(۲) -10</p> <p>(۳) $\frac{1}{10}$</p> <p>(۴) $-\frac{1}{10}$</p>
<p>۴</p> <p>حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.</p> $\frac{20^1 \times 5^2}{5^2 \times 4^1} =$	<p>۴</p> <p>حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.</p> $\frac{20^1 \times 5^2}{5^2 \times 4^1} =$
<p>۵</p> <p>در جای خالی علامت $< = >$ قرار دهید.</p> <p>$5^{-2} \square (-5/5)^{-2}$</p> <p>$(-4)^{-2} \square 4^{-2}$</p>	<p>۵</p> <p>در جای خالی علامت $< = >$ قرار دهید.</p> <p>$5^{-2} \square (-5/5)^{-2}$</p> <p>$(-4)^{-2} \square 4^{-2}$</p>
<p>۶</p> <p>حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید</p> <p>$25 \times 10^{-19} \times 4/2 \times 10^7 =$</p>	<p>۶</p> <p>حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید</p> <p>$25 \times 10^{-19} \times 4/2 \times 10^7 =$</p>

<p>حاصل عبارت زیر را بدست آورید.</p> $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{32}}{\sqrt{8}} =$	۷
<p>عبارت های زیر را ساده کنید.</p> $5\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{75} =$ $\sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{50}) =$	۸
<p>مخرج کسر زیر را گویا کنید.</p> $\frac{5}{\sqrt{8}}$	۹
<p>اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.</p> $1^{-1000}, 8^{-4}, 0/25^{-5}, 25^3, 2^4, \left(-\frac{1}{2}\right)^0, (-1)^{13}$	۱۰