

۱- خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-1, -4)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

« پاسخ »

$$\text{الف) } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a \quad BB' = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \frac{16}{25}a^2 = a^2 - 9 \Rightarrow \frac{9}{25}a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow c = 4$$

$$\text{ب) } AA' = 2a = 10$$

$$F \begin{vmatrix} -4 + 4 = 0 \\ -1 \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} -4 - 4 = -8 \\ -1 \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} -4 + 5 = 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} -4 - 5 = -9 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} -4 \\ -1 + 3 = 2 \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} -4 \\ -1 - 3 = -4 \end{vmatrix}$$

۲- کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(-5, 1)$ است.

الف) فاصله‌ی کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله‌ی قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

« پاسخ »

$$\text{الف) } F \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} 1 \\ -5 \end{vmatrix} \quad \text{مرکز } O \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3+(-5)}{2} = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{معادله قطر بزرگ } x = 1 \\ \text{معادله قطر کوچک } y = -1 \end{matrix}$$

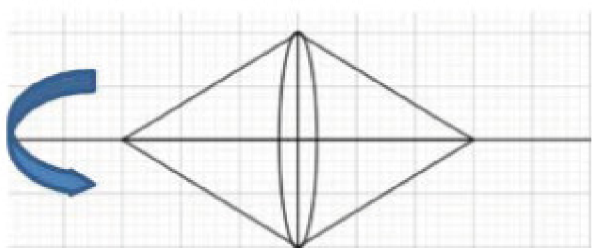
$$FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

$$\text{ب) } c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow BB' = 4\sqrt{5}$$

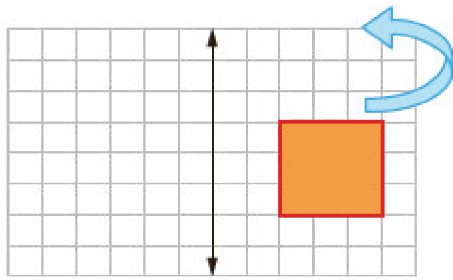
$$\text{خروج از مرکز } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۳- اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چه قدر است؟

« پاسخ »

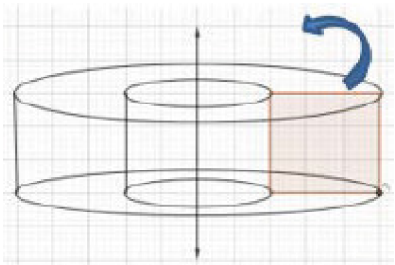


$$V = 2 \left(\frac{\pi}{3} \times 2^2 \times 3 \right) = 8\pi$$



۴- مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصله‌ی ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.
 الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.
 ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعده‌ی آن توصیف کنید.

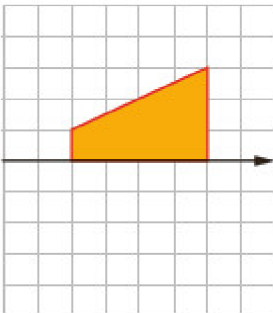
« پاسخ »



حجم شکل = حجم استوانه بزرگ - حجم استوانه کوچک (الف)

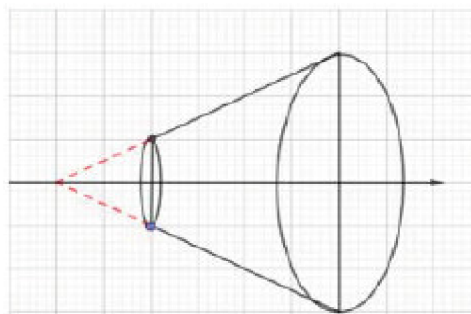
$$\pi \times 5^2 \times 3 - \pi \times 2^2 \times 3 = 75\pi - 12\pi = 63\pi$$

ب) سطح مقطع موازی با قاعده یک دایره تو خالی شعاع خارجی ۵ و شعاع داخلی ۲ است.



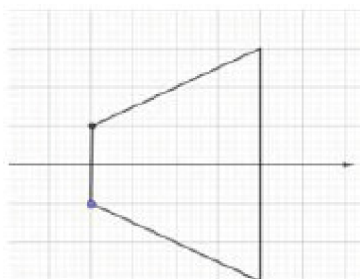
۵- در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.
 الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.
 ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چه قدر است؟

« پاسخ »



$$V - V_1 = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 6 - \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 2 = \frac{52}{3}\pi$$

ب) ذوزنقه



$$S = \frac{1}{2}(2 + 6) \times 4 = 16$$

۶- درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.
 شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخروط می‌باشد. (درست، نادرست)

« پاسخ »

درست ۰/۲۵

۷- در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.
 هرچه خروج از مرکز بیضی (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

« پاسخ »

کوچکتر ۰/۲۵

۸- در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چه قدر است؟

« پاسخ »

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \text{ (۰/۲۵)}, \quad 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \text{ (۰/۲۵)}$$

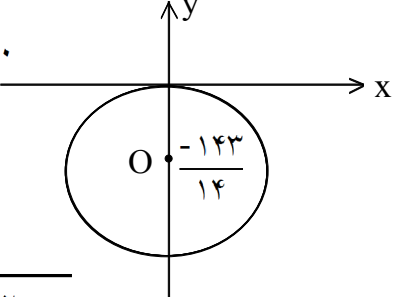
$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{7} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ (۰/۲۵)}$$

۹- مرکز و شعاع دایره زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

$$7x^2 + 7y^2 + 143y = 0$$

« پاسخ »

$$x^2 + y^2 + \frac{143}{7}y = 0$$


$$O \begin{cases} -\frac{a}{2} = 0 \\ -\frac{b}{2} = \frac{-143}{14} \end{cases}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{0 + \left(\frac{143}{7}\right)^2 - 0} = \frac{1}{2} \times \frac{143}{7} = \frac{143}{14}$$

۱۰- معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

« پاسخ »

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$O \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad r = 4 \quad O' \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad d = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$d = |r - r'| \Rightarrow 5 = |r - 4| \Rightarrow \begin{matrix} r - 4 = 5 \Rightarrow r = 9 \\ r - 4 = -5 \Rightarrow r = -1 \end{matrix}$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 81$$

۱۱- مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$

ب) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$ و $x^2 + (y-5)^2 = 5$

« پاسخ »

الف) $O \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = 3$

$O' \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{16}$

$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow r - r' < OO' < r + r' \Rightarrow$ متقاطعند

ب) $O \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \end{vmatrix} \quad r = \sqrt{7}$

$O' \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix} \quad r' = \sqrt{5}$

$OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-5)^2} = 2\sqrt{17} \Rightarrow OO' > r + r' \Rightarrow$ متخارجند

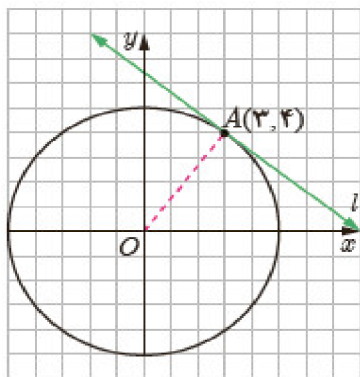
۱۲- معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطه‌ی $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

« پاسخ »

$$d = \frac{|3(0) - 4(3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3 = r$$

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 9$$

۱۳- اگر بدانیم خط l در نقطه $(3, 4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله‌ی خط مماس چیست؟



« پاسخ »

$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = r$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$m_{OA} = \frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3} \Rightarrow m' = -\frac{3}{4} \quad A \left| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right.$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 3x + 4y - 25 = 0$$

۱۴- وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $6x + 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

ب) $x^2 + y^2 = 2$ و $y = -x - 2$

« پاسخ »

الف) $O \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right. \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 28} = 1$

$$d = \frac{|6(2) + 4(2)|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{52}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

$d = \frac{10\sqrt{13}}{13} > r = 1$ خط و دایره نقطه‌ی مشترک ندارند و غیرمتقاطع‌اند

ب) $O \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad r = \sqrt{2}$

$$x + y + 2 = 0 \quad d = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2}$$

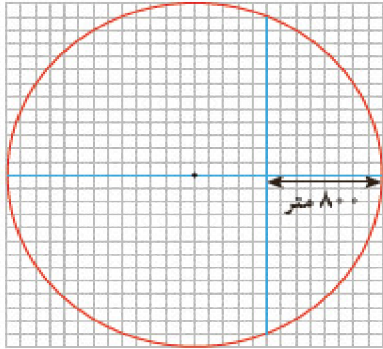
$d = r = \sqrt{2}$ خط بر دایره مماس است.

۱۵- معادله‌ی گسترده‌ی یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه‌ی شعاع آن را پیدا کنید و معادله‌ی آنرا به شکل استاندارد بنویسید.

« پاسخ »

$$O \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 32} = \sqrt{10}$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$$



۱۶- شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13, 13)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد:

الف) معادله‌ی این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

ت) طول مسیر عمودی چه قدر است؟

« پاسخ »

الف) $(x - 13)^2 + (y - 13)^2 = 169$

ب) $x = 18 \Rightarrow 25 + (y - 13)^2 = 169 \Rightarrow (y - 13)^2 = 144 \Rightarrow \begin{cases} y - 13 = 12 \Rightarrow y = 25 \\ y - 13 = -12 \Rightarrow y = 1$

$A \begin{vmatrix} 18 \\ 1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 18 \\ 25 \end{vmatrix}$

$y = 13 \Rightarrow (x - 13)^2 = 169 \Rightarrow x - 13 = \pm 13 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 26 \end{cases} \Rightarrow C \begin{vmatrix} 26 \\ 13 \end{vmatrix} \text{ و } D \begin{vmatrix} 0 \\ 13 \end{vmatrix}$

پ) $y = 13$ و $x = 18 \Rightarrow E \begin{vmatrix} 18 \\ 13 \end{vmatrix}$

ت) $AB = 25 - 1 = 24 \Rightarrow 2400$ متر

۱۷- وضعیت نقاط $(1, 0)$ ، $(0, -1)$ ، $(-2, -1)$ و $(0, 0)$ را نسبت به دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید.

« پاسخ »

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$p(1, 0) = 1 + 0 - 2 + 0 + 1 = 0$ روی دایره

$p(0, 0) = 1 > 0$ خارج دایره

$p(-1, -2) = 1 + 4 + 2 - 4 + 1 = 0$ روی دایره

$p(2, 3) = 4 + 9 - 6 + 2 + 1 = 10 > 0$ خارج دایره

۱۸- در حالت‌های زیر معادله‌ی دایره را بنویسید:

- الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(۲, -۱)$ باشد.
ب) دایره‌ای که مرکز آن $(۲, ۳)$ و نقطه‌ی $(-۳, -۹)$ نقطه‌ای روی آن باشد.
پ) دایره‌ای که نقاط $(۰, ۳)$ و $(-۴, -۱)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

« پاسخ »

$$\text{الف) } OC = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵} = r \quad (x-۲)^2 + (y+۱)^2 = ۵$$

$$\text{ب) } CA = \sqrt{(۲+۳)^2 + (۳+۹)^2} = ۱۳ = r \quad (x-۲)^2 + (y-۳)^2 = ۱۶۹$$

$$\text{پ) وسط دو نقطه } C\left(\frac{۰+(-۴)}{۲} = -۲, \frac{-۱+۳}{۲} = ۱\right)$$

$$۲r = \sqrt{(-۴-۰)^2 + (-۱-۳)^2} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow r = ۲\sqrt{۲}$$

$$(x+۲)^2 + (y-۱)^2 = ۸$$

۲۱- معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ می‌باشد، مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

« پاسخ »

$$O \begin{cases} \frac{-a}{2} = 3 \\ \frac{-b}{2} = -1 \end{cases} \quad (0/5) \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2 \quad (0/75)$$

۲۲- ابتدا معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به معادلات زیر را تعیین کنید. سپس مختصات نقاط برخورد این دو دایره را تعیین کنید.

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0, \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$$

« پاسخ »

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0 \end{cases}$$

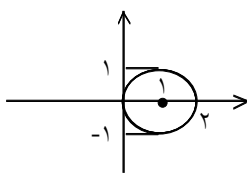
وتر مشترک $\Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$$\Rightarrow 4 + y^2 + (-4) + 2y - 24 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 25$$

$$\Rightarrow (y + 1)^2 = 45 \Rightarrow \begin{cases} y + 1 = 5 \Rightarrow A(-2, 4) \\ y + 1 = -5 \Rightarrow B(-2, -6) \end{cases}$$

۲۳- اندازه‌ی شعاع دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x = 0$ را تعیین کنید و مختصات مرکز آن را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

« پاسخ »



$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{شعاع } R = 1 \quad \text{مرکز } C(1, 0)$$

۲۴- معادله مکان نقاطی را تعیین کنید که عرض نقطه‌های واقع بر دایره‌ی $x^2 + y^2 = 16$ را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کنند.

« پاسخ »

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm \sqrt{16 - x^2}$$

عرض نقاط دایره

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4} \left(\pm \sqrt{16 - x^2} \right) \Rightarrow 4y = \pm 3 \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow 16y^2 = 9(16 - x^2)$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

بیضی افقی ۱

۲۵- معادله دو دایره را بنویسید که برای آنها یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد.

(الف) $O_1 O_2 = 0$ (دو دایره هم‌مرکز)

(ب) $O_1 O_2 > r_1 + r_2$ (دو دایره متخارج)

« پاسخ »

الف) هم مرکز

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 9 \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O(0, 0) \text{ و } r = 1 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1 \Rightarrow O'(3, 4) \text{ و } r' = 1 \end{cases} \Rightarrow OO' = 5, r + r' = 2$$

متخارج $OO' > r + r'$

۲۶- برای هر دسته از معادله دایره‌های مفروض مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل یا مماس خارج و یا متقاطع‌اند؟

(ب) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$

(الف) $x^2 + (y-5)^2 = 5$

« پاسخ »

الف) $O(0, 5), r = \sqrt{5}$

$$\rightarrow OO' = 2\sqrt{17}, r + r' = \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

ب) $O'(2, -3), r' = \sqrt{7}$

دو دایره متخارج $OO' > r + r'$

۲۷- برای هر دسته از معادله دایره‌های مفروض مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل یا مماس خارج و یا متقاطع‌اند؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9 \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } O(-1, 2), r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{14}$$

$$\text{ب) } O'(1, -2), r' = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = 3 \rightarrow OO' = 2\sqrt{5}, r + r' = 3 + \sqrt{14}, r - r' = \sqrt{14} - 3$$

$$\rightarrow |r - r'| < OO' < r + r' \text{ دو دایره متقاطع}$$

۲۸- برای هر دسته از معادله دایره‌های مفروض مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل یا مماس خارج و یا متقاطع‌اند؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } O(-1, 2), r = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow OO' = 2\sqrt{5}, r + r' = 2\sqrt{5}$$

$$\text{ب) } O'(1, -2), r' = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow OO' = r + r' \rightarrow \text{مماس خارج}$$

۲۹- برای هر دسته از معادله دایره‌های مفروض مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل یا مماس خارج و یا متقاطع‌اند؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 40 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } O|_{-2}^{-1}, r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow OO' = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}, r + r' = 4\sqrt{5}$$

$$\text{ب) } O'|_{-2}^1, r' = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 160} = 3\sqrt{5}, |r - r'| = 2\sqrt{5} \Rightarrow OO' = |r - r'| = 2\sqrt{5} \text{ مماس داخل}$$

۳۰- ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر را به دست آورید. سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به دست آورید. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$

« پاسخ »

معادله وتر مشترک : $x = -2$: کم می کنیم

$$x = -2 \text{ جاگذاری : } 4 + y^2 - 8 + 2y - 20 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y - 24 = 0 \Rightarrow (y + 6)(y - 4) = 0 \begin{cases} y = 4 \\ y = -6 \end{cases}$$

نقطه تقاطع : $A|_{-2}^{-2}$, $B|_{-6}^{-2}$

۳۱- معادله وتر مشترک دو معادله زیر را به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0 \text{ و } x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0$$

« پاسخ »

دو دایره را از هم کم می کنیم \Rightarrow دو دایره متقاطع هستند

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0 \end{cases}$$

$$-4x + 4y + 92 = 0 \xrightarrow{\div 4} y = x - 23$$

۳۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(7, 1)$ و $(0, 0)$ و $(-1, 6)$ بگذرد. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

« پاسخ »

$$x^2 + y^2 + ax + by + d = 0$$

جاگذاری نقاط : $\begin{cases} 49 + 1 + 7a + b + d = 0 \\ d = 0 \\ 1 + 36 - a + 6b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a + b = -50 \\ -a + 6b = -37 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-263}{43}, b = \frac{-309}{43}$

\Rightarrow مرکز $O\left(\frac{263}{86}, \frac{309}{86}\right)$

۳۳- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(1, 0)$ و $(6, 0)$ گذشته و بر خط $y = 1$ مماس باشد.

« پاسخ »

$$A|_1, B|_6$$

$$AB \text{ وسط: } \frac{x_A + x_B}{2} = x_0 = \frac{7}{2} \quad AB \text{ عمودمنصف: } x = \frac{7}{2}, y = 1 \quad \text{روی دایره: } C\left(\frac{7}{2}, 1\right)$$

$$\text{معادله کلی دایره: } x^2 + y^2 + ax + by + d = 0$$

$$x_0 = \frac{7}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 7x + by + d = 0 \xrightarrow{C\left(\frac{7}{2}, 1\right)} \frac{49}{4} + 1 - \frac{49}{2} + b + d = 0$$

$$\Rightarrow b = -7 + \frac{49}{4} = \frac{21}{4} \Rightarrow O\left(\frac{7}{2}, -\frac{21}{8}\right), r = \frac{29}{8}$$

$$\text{معادله کلی دایره: } x^2 + y^2 - 7x + \frac{21}{4}y + d = 0$$

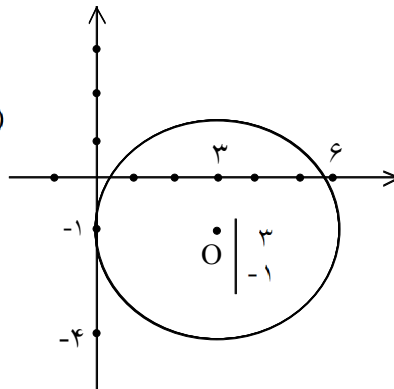
۳۴- مرکز و شعاع دایره زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$$

« پاسخ »

$$O \begin{cases} -\frac{a}{2} = 3 \\ -\frac{b}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow O(3, -1)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 4} = 3$$



۳۵- مرکز و شعاع دایره زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

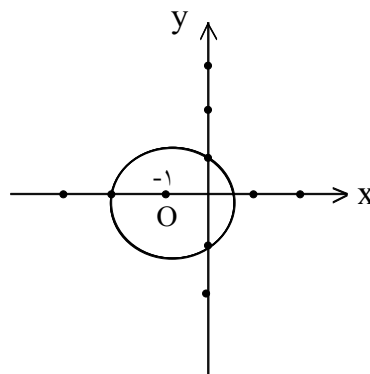
$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 1 = 0$$

« پاسخ »

$$x^2 + y^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$$

مرکز: $O(-1, 0)$

$$\text{شعاع: } r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 - 4 \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



۳۶- مرکز و شعاع دایره زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

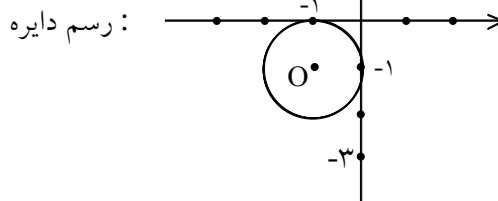
$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$$

« پاسخ »

$$O \begin{cases} -\frac{a}{2} = -1 \\ -\frac{b}{2} = -1 \end{cases} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - 4(-1)} = \frac{1}{2} \sqrt{12} = \sqrt{3}$$

مرکز: $O(-1, -1)$

$$\text{شعاع: } r = \sqrt{3}$$



۳۷- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(0, 0)$ و $(17, 7)$ گذشته و مرکزش بر خط $6x - 5y = 0$ واقع باشد.

« پاسخ »

$$A \left| \begin{matrix} 17 \\ 7 \end{matrix} \right., B \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \quad \text{عمودمنصف } AB: \text{ وسط } M \left(\frac{17}{2}, \frac{7}{2} \right), m_{AB} = \frac{7}{17} \Rightarrow m' = -\frac{17}{7}$$

$$\text{معادله عمودمنصف} \Rightarrow y - \frac{7}{2} = -\frac{17}{7} \left(x - \frac{17}{2} \right) \Rightarrow y = -\frac{17}{7}x + \frac{338}{14} \Rightarrow 6x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow O \left(\frac{5 \times 169}{27}, \frac{6 \times 169}{27} \right)$$

$$\text{معادله دایره: } \left(x - \frac{5 \times 169}{27} \right)^2 + \left(y - \frac{6 \times 169}{27} \right)^2 = 61 \left(\frac{169}{27} \right)^2$$

۳۸- اگر فاصله نقطه $M(x,y)$ تا نقطه $A(۶,۰)$ دو برابر فاصله اش تا نقطه $B(۰,۳)$ باشد، نشان دهید که مکان M یک دایره خواهد بود. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$AM = 2BM \quad \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + (y-3)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4(x^2 + y^2 - 6y + 9) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 24y + 12x = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0 \rightarrow O\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), r = \frac{1}{3}\sqrt{16 + 64} = 2\sqrt{5}$$

۳۹- چه نقاطی در نابرابریهای زیر صدق می کنند؟

(الف) $x^2 + 4x + y^2 - 12 \leq 0$ (ب) $2x^2 + 2y^2 + x + y > 0$

« پاسخ »

(الف) $x^2 + 4x + y^2 - 12 \leq 0$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + y^2 \leq 16 \rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \leq 4$$

نقاط داخل دایره و روی دایره $O(-2, 0)$ ، $r = 4$

(ب) $2x^2 + 2y^2 + x + y > 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y > 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} > 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{8} \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2} > \sqrt{\frac{1}{8}}$$

نقاط بیرون دایره $O\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ ، $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$