فصل ۱ درس ۲: معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجه ۲

پیش نیاز های درس ۲:

- توانایی حل معادلات درجه دوم
- توانایی رسم نمودار سهمی با داشتن ضابطه جبری آن
- تشخیص اینکه یک سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم از روی ضابطه جبری آن
- یافتن طول و عرض رأس سهمی داده شده
- توانایی محاسبه مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه ۲

اهداف درس ۲:

- استفاده از روش تغییر متغیر برای حل معادلات دو مجذوری.
- یافتن مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ بدون حل معادله
- تشکیل معادله درجه ۲ با p و s معلوم برای حل مسائل کاربردی مرتبط.
- محاسبه ماکزیمم یا مینیمم سهمی و استفاده از آن در حل مسائل بهینه سازی .
- تشخیص تعداد صفرهای تابع درجه ۲ و علامت آنها بدون محاسبه مقدار دقیق آنها
- به دست آوردن ضابطه سهمی به کمک برخی اطلاعات از نمودار آن

معادله درجه دوم:

هر معادله پس از ساده کردن به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.

مهم ترین روش‌های حل معادله درجه دوم:

۱- روش تجزیه

۲- روش فرمول کلی یا دلتا (Δ)

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه:

در حل معادله درجه دوم به روش تجزیه، از فاکتور گیری و اتحادها کمک می‌گیریم. و عبارت حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم.

✓ نکته: ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دوعبارت جبری باشند و AB = ۰ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$A \times B = 0 \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

حل معادلهٔ درجه دوم به روش فرمول کلی (Δ):

مرحله (۱): ابتدا Δ را بدست می‌آوریم. $\Delta = b^2 - 4ac$

مرحله (۲):

الف)اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. ومقدار آن $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ است

ب)اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه(ریشه مضاعف)است.و مقدار آن $x = \dfrac{-b}{2a}$ است.

ج) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه حقیقی نیست.

مثال: معادله $x^2 - 3x - 10 = 0$ به دو روش تجزیه و دلتا حل کنید.

✓ نکته: در معادله درجه ۲:

(فعالیت ۱و۲ ص۱۲)

الف)اگر a, c مختلف العلامت باشند : آنگاه $(\Delta > 0)$ و معادله دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است .مثل $3x^2 + 5x - 1 = 0$ که ضرایب ۱- و ۳مختلف العلامت هستند و معادله دارای دو ریشه است.

ب) اگرجمع ضرایب برابر صفر شود($a + b + c = 0$): آنگاه ریشه ها ($1, \dfrac{c}{a}$)است

ج: اگر $a - b + c = 0$ باشد(یعنی: $b = a + c$)آنگاه ریشه ها ($-1, -\dfrac{c}{a}$)است . مثلا در $3x^2 + 4x + 1$ چون (۱+۳=۴)است پس جواب ها ($-1, -\dfrac{1}{3}$)است

روش تغییر متغیر برای حل معادلات دومجذوری:

معادلاتی که ممکن است حتی درجه دوم نباشند، ولی با تغییر متغیر ، به معادله درجه ۲ تبدیل می شوند

(مثال ص۱۱)

معادله $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ را حل کنید.

حل:

به جای x^2 عبارت متغیر(مجهول)جدیدی مثل **u** قرار می دهیم .به این کار تغییر متغیر می گوییم.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$u^2 = u \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0$$

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ u = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

(کاردرکلاس۱۱ ص۱۲)

⑪معادله های زیر را حل کنید.

ب) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$	الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

Homework:(تمرین۱ ص۱۸)

① معادله های زیر را حل کنید.

ب) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$	الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ بدون حل آن:

اگر β , α ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha.\beta = P = \frac{c}{a}$$

(کاردرکلاس ص۱۳)

در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P :

معادله درجه دومی که مجموع ریشه های آن S و حاصل ضرب ریشه های آن P باشد، به صورت زیراست:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(کاردرکلاس۱و۲و۳ص۱۳)

①دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۱/۵- و حاصل ضربشان ۷- باشد.

③معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ باشد.

② طول و عرض مستطیلی با مساحت $6cm^2$ و محیط $11cm$ را بیابید

(تمرین ۲ ص ۱۸):Homework

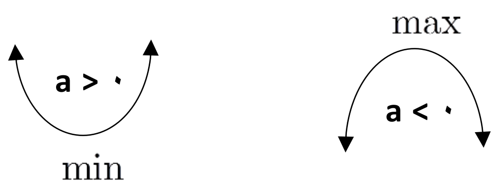
② معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $۱+\sqrt{۲}$ و $۱-\sqrt{۲}$ باشد.

محاسبه ماکزیمم (بیشترین) و مینیمم (کمترین) سهمی:

نمودار هر معادله به شکل

$$y = ax^{۲} + bx + c \qquad (a \neq ۰)$$

که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند را سهمی می‌نامیم.



برای یافتن ماکزیمم(بیشترین) و مینیمم(کمترین) سهمی کافیست عرض راس سهمی (y) را بیابیم که برای به دست آوردن آن، باید طول راس سهمی ($x = -\frac{b}{۲a}$) را درضابطه سهمی ($y = ax^{۲} + bx + c$) قرار دهیم یا مقدار $\left(y = \frac{-\Delta}{۴a}\right)$ بیابیم.

✓ نکته: ماکزیمم(کمترین) و مینیمم(بیشترین) سهمی به شکل $y=a(x-h)^{۲}+k$ برابر k می باشد.

(مثال ص ۱۴)

ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه $f(x) = -x^{۲} + ۲x + ۳$ رابیابید. حل:

$$x = -\frac{b}{۲a} = ۱$$

$$f(۱) = -(۱)^{۲} + ۲(۱) + ۳ = ۴$$

(کار در کلاس ۱ ص ۱۵)

① تعیین کنید کدام یک از سهمی های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند .سپس مقدارماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید

الف) $g(x) = -(x+۱)^{۲} + ۳$

ب) $h(x) = x^{۲} - ۴x + ۹$

(تمرین ۳ ص ۱۸):Homework

③ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -۲x^{۲} + ۸x - ۵$

ب) $f(x) = ۳x^{۲} + ۶x + ۵$

مسائل بهینه سازی:

مسائلی هستند که در آن مقدار مساحت ،حجم و...قرار است مینیمم یا ماکزیمم شود

برای حل مسائل بهینه سازی ابتدامقداری را که قرار است مینیمم یا ماکزیمم شودرا به صورت معادله یک متغیره می نویسیم اگر معادله به دست آمده یک سهمی بود طول رأس سهمی ($x = -\frac{b}{۲a}$) را محاسبه می کنیم و مقدار **y** را می یابیم.

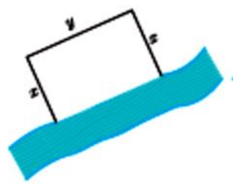
(مثال ص ۱۴)

یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است .اگر محیط پنجره ۴***m*** باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر

نوردهی را داشته باشد.

(کاردرکلاس ۲ ص۱۵)

②قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم .برای این کارلازم است سه ضلعِ محوطه نرده کشی شود .اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



Homework:(تمرین ۵ ص۱۸)

⑤ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است.اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

الف)مساحت مستطیل حداکثر ممکن گردد.

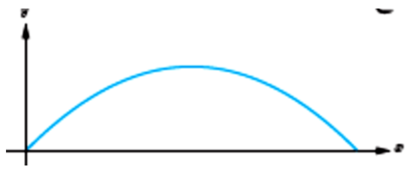
ب)مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

صفرهای تابع درجه ۲:

نقاط برخورد نمودار یک تابع درجه ۲ با محورx ها را صفرهای تابع می نامیم که در واقع ریشه های معادله درجه ۲ هستند که برای محاسبه صفرهای تابع ، تابع را مساوی صفر قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم.

(مثال ص۱۵)

فوتبالیستی توپی را با زاویه ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه$۲۰ \ m/s$ شوت میکند معادله مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطه $y = \frac{-۱}{۴۰}x^۲ + x$ است که نمودارآن مانند شکل مقابل است .



الف)حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

حل:

یعنی x راس سهمی را می یابیم

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۱}{۲ \times \left(-\frac{۱}{۴۰}\right)} = ۲۰$$

ب)به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

حل:

نقاط برخورد تابع با محورx ها که همان صفرهای تابع است را می یابیم:

$$y = ۰ \Rightarrow x\left(\frac{-۱}{۴۰}x + ۱\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴۰ \end{cases}$$

$x = ۰$ زمان شروع پرتاب و $x = ۴۰$ زمان برخورد گلوله بازمین است .

Homework:(تمرین ٤ص١٨)

④راکتی به طور عمودی شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد که در آن ($t \geq ۰$)

$$h(t) = ۱۰۰t - ۵t^{۲}$$

الف) چقدر طول می کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی گردد؟

به دست آوردن ضابطه سهمی به کمک برخی اطلاعات از نمودار آن:

برای نوشتن ضابطه سهمی دو حالت داریم:

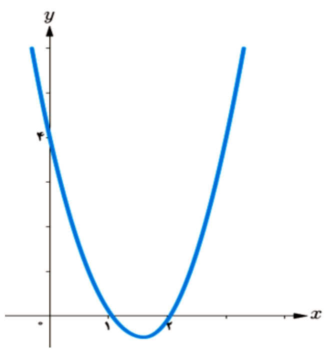
۱)با داشتن راس سهمی $y = a(x-h)^{۲} + k$

۲) با داشتن صفرهای تابع $\begin{cases} y = a(x-x_{۱})(x-x_{۲}) \\ y = a(x-x_{۱})^{۲} \end{cases}$

توجه: مقدار a را با انتخاب یک نقطه روی نمودار که معمولا عرض از مبدا (محل برخورد نمودار با محور y) است می یابیم.

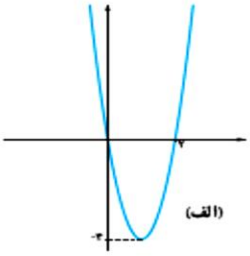
(مثال ص ۱۶)

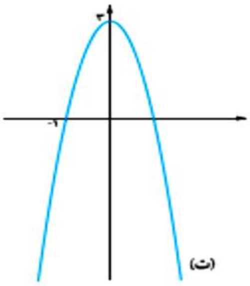
معادله سهمی مقابل را بنویسید.

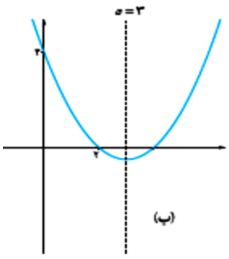


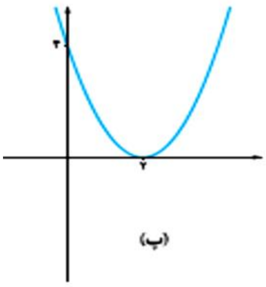
Homework:(تمرین ٦ص١٨)

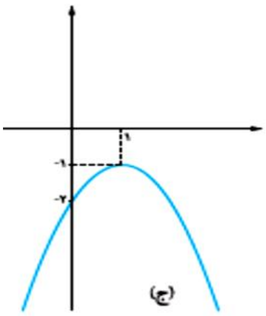
⑥ضابطه جبری سهمی های زیر را بنویسید.

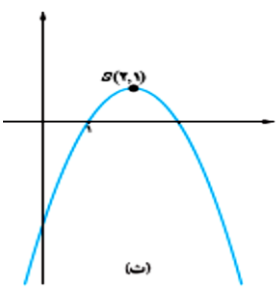








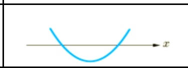
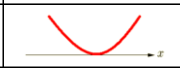
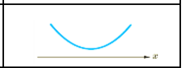
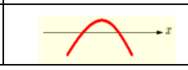
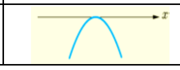
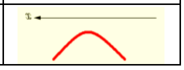




تعداد صفرهای تابع درجه ۲ و علامت آنها بدون محاسبه مقدار دقیق آنها:

به کمک علامت دلتا Δ می توان تعداد ریشه های معادله (صفرهای تابع)را مشخص کرد

(کاردرکلاس ۱ ص ۱۶)

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

به کمک علامت $S\,,P$ می توان علامت ریشه ها ی معادله را مشخص کرد

اگر $S > 0, P > 0$ دوریشه مثبت هستند

اگر $S < 0, P > 0$ دوریشه منفی هستند

اگر $S < 0, P < 0$ دوریشه مختلف العلامتند و ریشه بزرگتر منفی است

اگر $S > 0, P < 0$ دوریشه مختلف العلامتند و ریشه بزرگترمثبت است

(کاردرکلاس ۲ ص ۱۶)

②در توابع زیر، تعداد و علامت ریشه های توابع داده شده را (در صورت وجود) مشخص کنید

الف) $y = x^2 + 6x + 5$ حل:

$\Delta = 16 > 0 \rightarrow$ دو ریشه متمایزدارد

$p = \dfrac{c}{a} = 5 > 0 \rightarrow$ ریشه ها هم علامت اند

$s = \dfrac{b}{a} = 6 < 0 \rightarrow$ هر دو ریشه منفی است

ب) $y = x^2 + 4x - 5$

پ) $y = 3x^2 - 7x + 1$

ت) $y = -x^2 + 2x - 1$

تعیین علامت ضرایب $a\,,b\,,c$ از روی نمودار:

۱)علامت c : محل برخورد نمودار سهمی با محور y

۲) علامت a: اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد a مثبت و اگر رو به پایین باشد a منفی است

۳)علامت b:

روش اول:

الف)اگر راس سهمی در ربع ۱و۴وبین آنها بود،علامت b مخالف علامت aاست.

ب) اگر راس سهمی در ربع ۲و۳وبین آنها بود،علامت bموافق علامت aاست.

ج) اگر راس سهمی روی محور عرض ها باشد bصفر است.

روش دوم:

به محل برخورد منحنی با محور y ها نگاه می کنیم آنگاه علامت b برابرشیب نمودار این نقطه است

(کاردرکلاس ۳ص ۱۷)

③با توجه به شکل های زیر علامت ضرایب a و b و c و علامت و تعداد ریشه ها را در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ تعیین کنید

ویژگی	علامت a	علامت b	علامت c	تعداد ریشه	علامت ریشه
تابع f					
تابع g					
تابع h					
تابع i					
تابع j					
تابع k					
تابع l					
تابع m					
تابع n					
تابع p					
تابع q					
تابع r