

مشتق

- ۱ آشنایی با مفهوم مشتق
- ۲ مشتق پذیری و پیوستگی
- ۳ آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

فصل



ماهواره در سیمرغ پایگاه فضا (امام خمینی ریه)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

آشنایی با مفهوم مشتق



مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

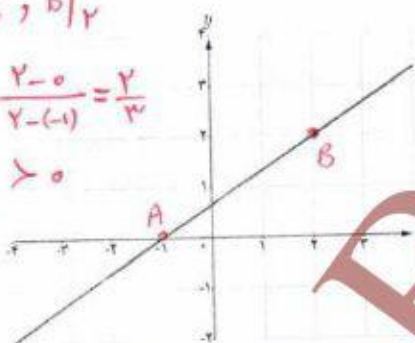


1 شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

$$A|_0^2, B|_2^3$$

$$m = \frac{3-0}{2-(-1)} = \frac{3}{3}$$

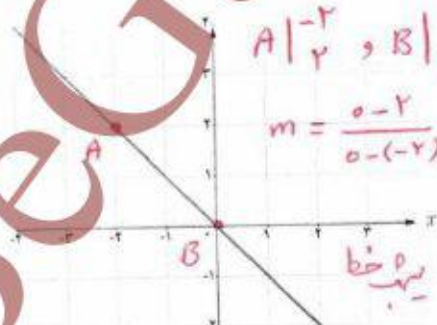
شیب خط > 0



$$A|_2^0, B|_0^{-2}$$

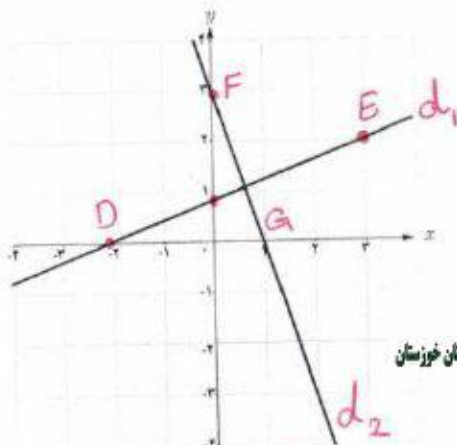
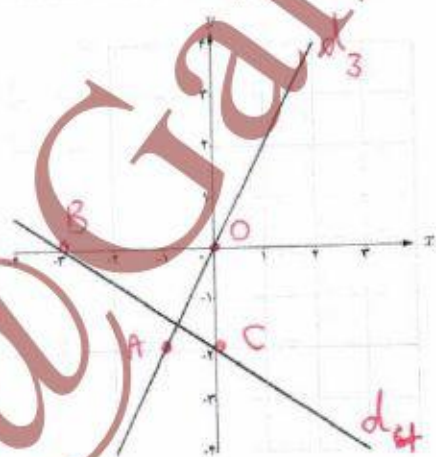
$$m = \frac{0-2}{0-(-2)} = \frac{-2}{2} = -1$$

شیب خط < 0



خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-2	2	$-\frac{2}{3}$

2 با توجه به جدول رویه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1, d_2, d_3, d_4 را روی شکل مشخص کنید.



توجه کننده:
گروه ریاضی اطلاع دوم متوسطه، استان خوزستان

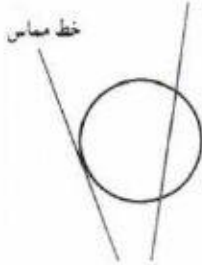
$$A|_{-1}^{-2}, C|_0^0 \rightarrow m = \frac{0-(-2)}{0-(-1)} = 2 = md_3$$

$$B|_0^{-3}, C|_{-1}^{-2} \rightarrow m = \frac{-2}{3} = md_4$$

$$D|_2^0, E|_3^3 \rightarrow m = \frac{3}{8} = md_1$$

$$G|_0^1, F|_2^3 \rightarrow m = \frac{3}{-1} = md_2$$

خط مماس بر یک منحنی

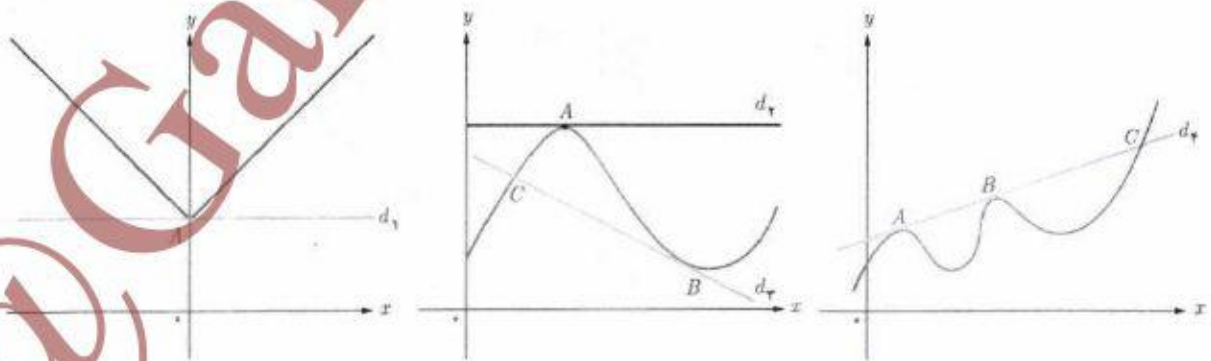


یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خواندنی

از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشند. از این رو به نظرس رسیده که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۳۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب‌نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب‌نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

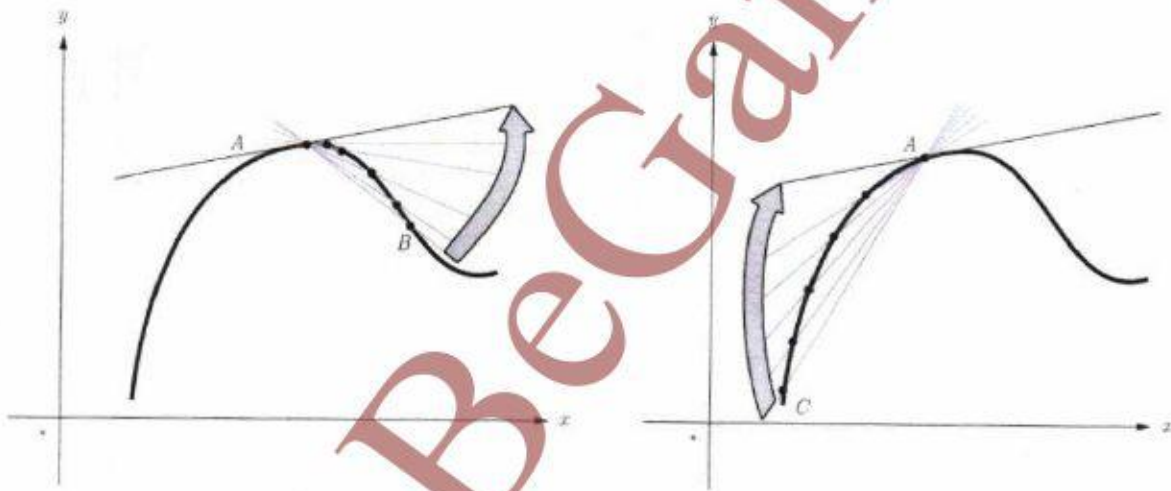
خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_1 در نقطه A ، خط d_2 در نقطه B و خط d_3 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_4 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_2 و d_3 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ **خط مماس**

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور شهودی می‌توان گفت: **خط مماس نزدیک می‌شود.**

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

الف تابع $f(x) = -x^2 + 1$ داده شده است، اگر $0 \leq x \leq 1$ نقاط $A(2, f(2))$ ، $B(4, f(4))$ ، $C(5, f(5))$ ، $D(4, f(4))$ و $E(3, f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

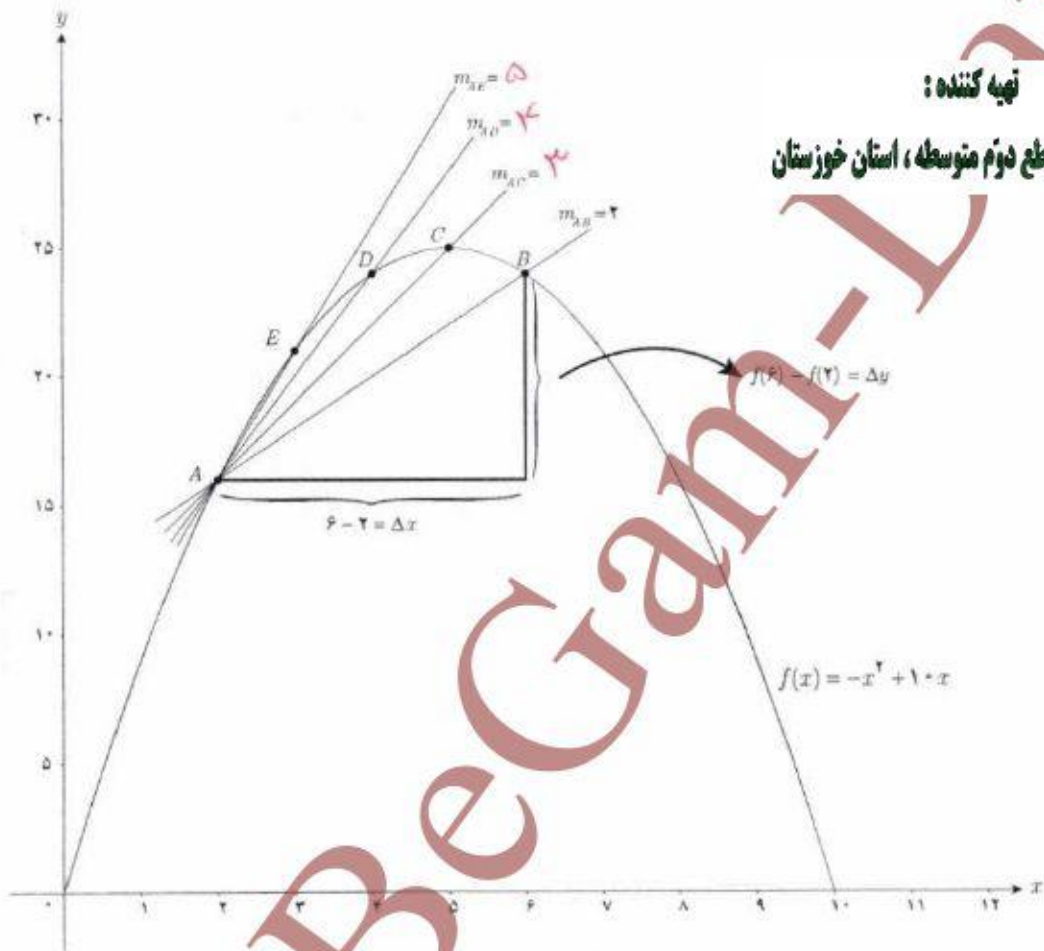
$A | \frac{2}{16}$ ، $B | \frac{4}{24}$ ، $C | \frac{5}{25}$ ، $D | \frac{4}{24}$ ، $E | \frac{3}{21}$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{25 - 16}{5 - 2} = 3$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{24 - 16}{4 - 2} = 4$$

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{21 - 16}{3 - 2} = 5$$



تهیه کننده:

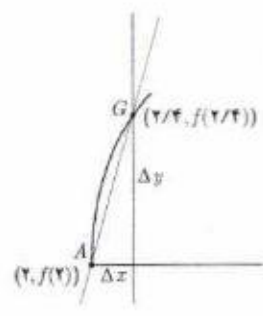
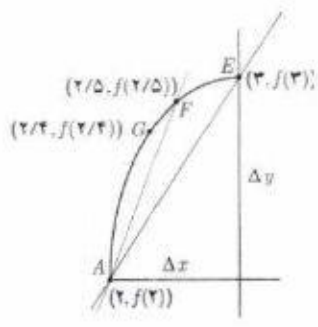
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

همان طور که می دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به دست می آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می کنند؟

$[2, 6]$	۲	_____	۶	$\Delta x = 6 - 2 = 4$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 5]$	۲	_____	۵	$\Delta x = 5 - 2 = 3$	$\Delta y = 25 - 16 = 9$
$[2, 4]$	۲	_____	۴	$\Delta x = 4 - 2 = 2$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 3]$	۲	_____	۳	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	$\Delta y = 21 - 16 = 5$



$$m_{AF} = \frac{f(2/5) - f(2)}{2/5 - 2}$$

$$= \frac{18/75 - 16}{-1/5}$$

$$= \frac{2/75}{-1/5} = 5/5$$

$$m_{AG} = \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2}$$

$$= \frac{18,25 - 16}{2,5 - 2} = \frac{2,25}{0,5}$$

$$= 5,225$$

با حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[2, 2/4]$ رسم شده است.

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مناسبت شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a, b]$	شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد.
$[2, 2/4]$	$\frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} = \frac{18,25 - 16}{2,5 - 2} = \frac{2,25}{0,5} = 5/6$
$[2, 2/3]$	$\frac{f(2/3) - f(2)}{2/3 - 2} = \frac{17,75 - 16}{2,3 - 2} = \frac{1,75}{0,3} = 5,83$
$[2, 2/2]$	$\frac{f(2/2) - f(2)}{2/2 - 2} = \frac{17/16 - 16}{-1/2} = \frac{1/16}{-1/2} = 5/8$
$[2, 2/1]$	$\frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{16/59 - 16}{-1} = \frac{-1/59}{-1} = 5/9$
$[2, 2/0.1]$	$\frac{f(2/0.1) - f(2)}{2/0.1 - 2} = \frac{16/0.599 - 16}{-0.1} = \frac{-1/599}{-0.1} = 5/99$
$[2, 2/0.01]$	$\frac{f(2/0.01) - f(2)}{2/0.01 - 2} = \frac{16/0.5999 - 16}{-0.01} = \frac{-1/5999}{-0.01} = 5/999$
$[2, 2+h]$	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \longrightarrow ?$

معادله به دست آمده به h نزدیک می‌شوند.



اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط

بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 6$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(x+h)^2 + 1 \cdot (x+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 2h + 4) + x + 1 \cdot h - 16}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 2h - 4 + x + 1 \cdot h - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h + 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h + 6) = 6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[1/5, 2]$ ، $[1/6, 2]$ ، $[1/7, 2]$ ، $[1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ ، $6/2$ ، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به

قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 6$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 6$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و منتهای باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$f(3) = -(3)^2 + 10(3) = -9 + 30 = 21$$

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2) = 6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x) = -x^2 + 10x$ محاسبه شده است:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 10(3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 30 + 10h - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد:

$$f'(2) = 6$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

کارد کلاس

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه ای به طول -2 بنویسید.

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4$$

تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خطهای قاطع می توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه

مشق در یک نقطه به دست آورد. به طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا:

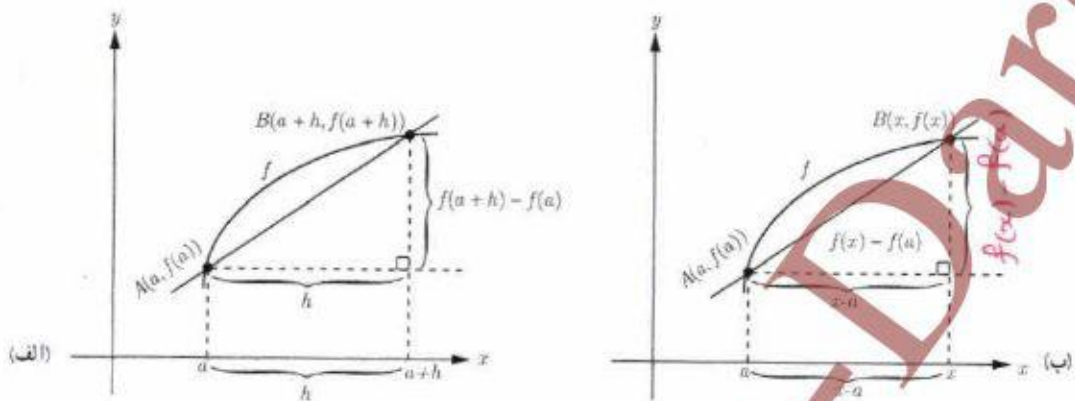
مثال: اگر $f'(2)$ ، $f(x) = -x^2 + 10x$ را از دستور بالا به دست آورید:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 10(2 + \Delta x) - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 - 4\Delta x - \Delta x^2 - 4\Delta x + 20 + 10\Delta x - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-\Delta x + 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 6) = 6$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشق تابع f در نقطه $x = a$ به صورت: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در

نقطه $x = a$ می یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده تر می کند.



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم:

$$\text{شیب خط } AB = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$\text{شیب خط } AB = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به

$$a \text{ نزدیک شود). به عبارت دیگر: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مثال: اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

حل:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h}$$

روش اول:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

روش دوم:

$$f(x) = -x^2 + 10x = 16 \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 16}{x - 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{-(n-2)(n-8)}{n-1} = -6$$

$$f(5) = -(5)^2 + 10(5) = 25 \quad f'(5) = \lim_{n \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{n - 5} = \lim_{n \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 10x - 25}{n - 5} = \lim_{n \rightarrow 5} \frac{-(n-5)^2}{n-5} = 0$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس بعد به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش بالا را بررسی کنید.

کارد کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

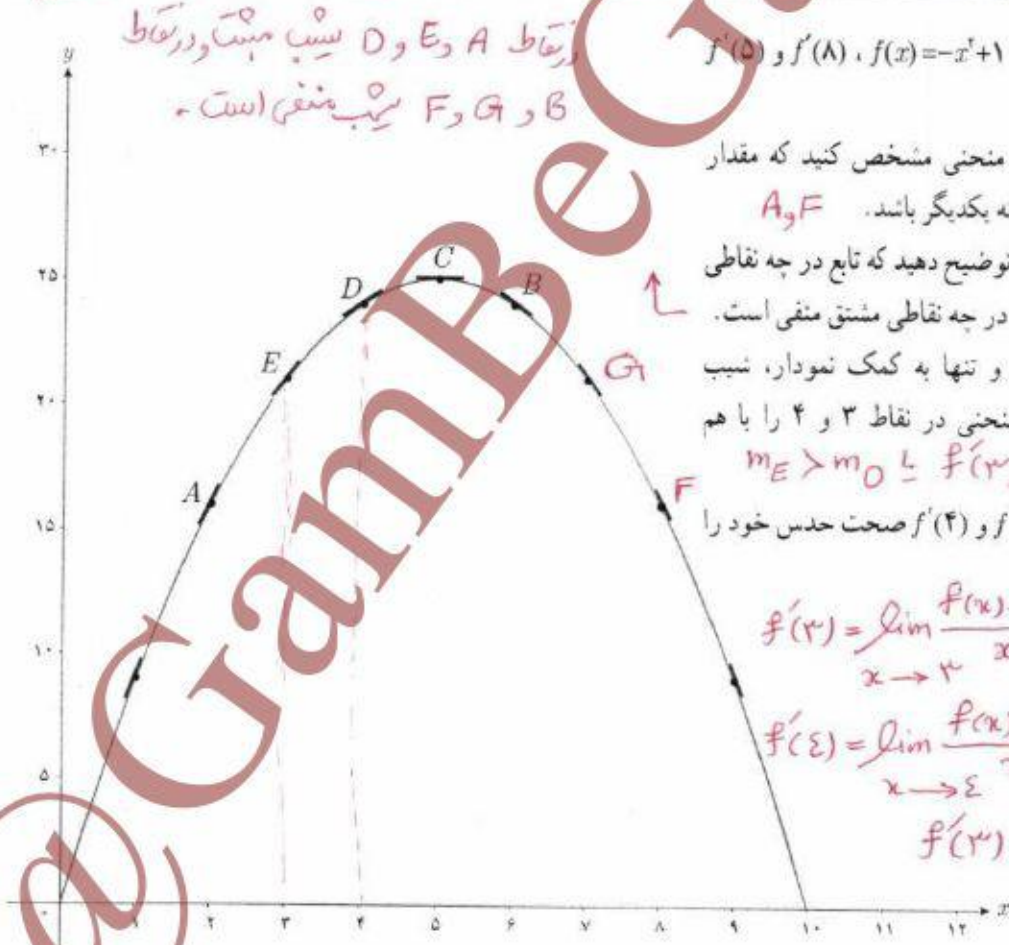
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

اگر قرار دهیم $a+h = x$ پس $h = x-a$ و چون $x \rightarrow a$ پس $h \rightarrow 0$

راه‌نمایی: تغییر متغیر $a+h = x$ را به کار برید. توجه کنید وقتی که $h \rightarrow 0$ آنگاه $x \rightarrow a$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

کارد کلاس



نقاط A, E, D, C, B و F نسبت مثبت و در نقاط A, E, D, C, B و F نسبت منفی است.

الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(3)$ و $f'(7)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. A, F

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط 3 و 4 را با هم مقایسه کنید $m_E > m_A \Rightarrow f'(7) > f'(3)$

ث) با محاسبه $f'(4)$ و $f'(3)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \dots = 4$$

$$f'(7) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} = \dots = 2$$

لذا $f'(7) > f'(3)$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+8)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 8) = 10$$

فصل چهارم: مشتق ۸۱

$$y - 9 = 10(x - 2)$$

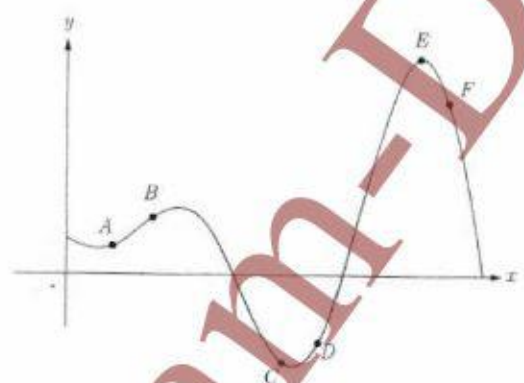
$$y - 9 = 10x - 20 \rightarrow y = 10x - 11$$

معادله خط مماس

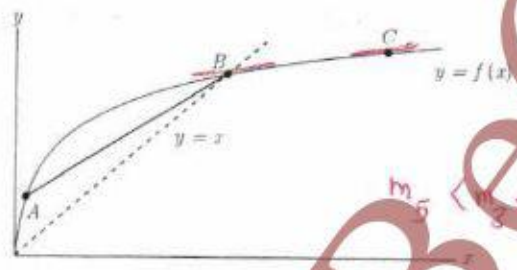
۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	E
-۱	C
۰	E
۱/۲	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

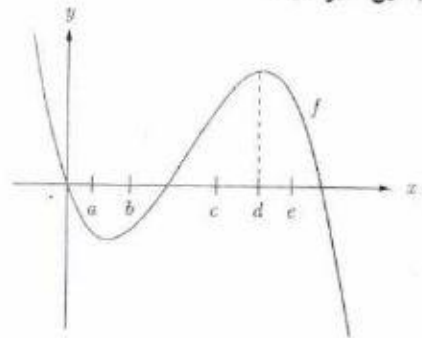


- الف) شیب نمودار در نقطه A m_1
- ب) شیب نمودار در نقطه B m_2
- ب) شیب نمودار در نقطه C m_3
- ت) شیب خط AB m_4
- ت) شیب خط $y=2$ $m_5 = 0$
- ج) شیب خط $y=x$ $m_6 = 1$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_6, \dots, m_4, m_3, m_2, m_1$ در نظر بگیرید.

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
a	۰
b	۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲



توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) نقطه A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

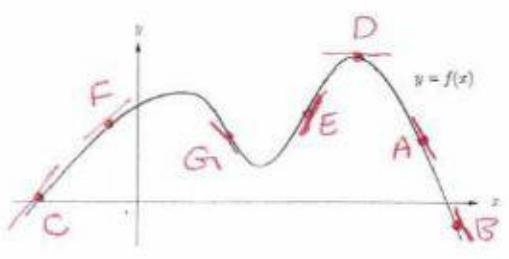
ب) نقطه B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است. $f(x) = 0$ و $f'(x) > 0$

ت) نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است. $f'(x) = 0$

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند. $f'(x_1) = f'(x_2)$

ج) نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است. $f(x) > 0$ و $f'(x) < 0$



$f(-1) = -3$

$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 3 - (-3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 1}$

اگر $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را به دست آورید. $f'(-1)$

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$

۶ نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست**

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) **درست**

پ) $m_E < m_B < m_A$ **درست**

ت) شیب منحنی در نقاط C و D, F منفی است. **درست**

ث) $m_C < m_D < m_F$ **نادرست** $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ **درست**



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



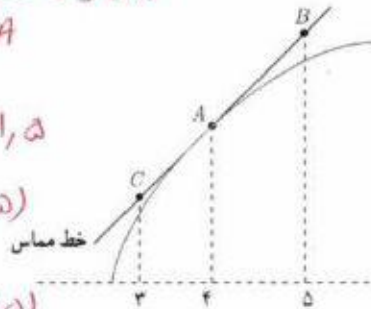
۸ برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A, B, C را بیابید.

$$\frac{\text{نسبت}}{\text{نسبت}} = \frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} = f'(A)$$

$$\Rightarrow \frac{f(B) - 25}{1} = \frac{f(C) - 25}{-1} = 1/5$$

$$f(B) = 25/5 \rightarrow B(5, 25/5)$$

$$f(C) = 23/5 \rightarrow C(3, 23/5)$$



۹ در هر ثانیه علی t متر با دوچرخه و رضا t متر با پای پیاده طی می کنند، به طوری که $t > s$. در یک زمان داده شده، چگونه

می توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

الف) علی $t - s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی $t \cdot s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

پ) علی t/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

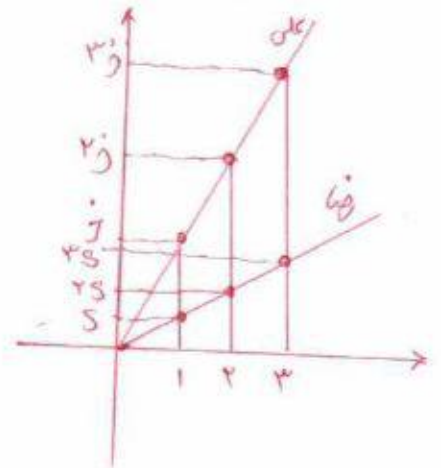
ت) علی $t \cdot s$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی t/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ثابت	۱	۲	۳	n
علی	t	$2t$	$3t$	nt
رضا	s	$2s$	$3s$	ns

لذا t/s ثابت است. پس هر چه t بزرگتر شود، t/s بزرگتر می شود.

علی t/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.



مشتق پذیری و پیوستگی

درس

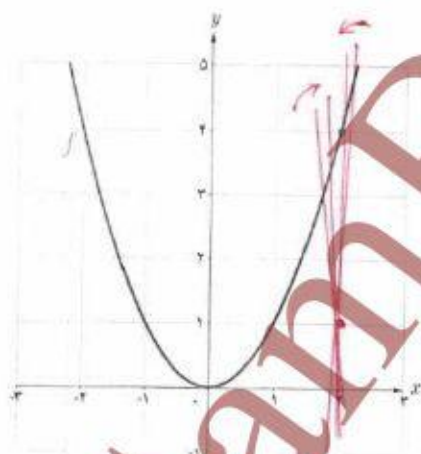
در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x مشتق پذیر است. در مطالعه رفتار یک تابع مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟

زیرا شیب خط‌ها مایع که از نقطه $x=2$ می‌گذرند به عدد حقیقی و منحصراً بزرگی میل نمی‌کنند.

اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به کار بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} =$$

نهی کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و منتهای) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانان مقایسه کنید.

کاردرکلاس

تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟ زیرا سبب خطاها ما را به این نتیجه می گذراند، به عدد حقیقی و منصفه بودی



مثل نمی کند. حقیقی

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2 \end{cases}$$

پس $g'(1)$ وجود ندارد.

تابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x = 2$ و $x = 1$ ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می کنیم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



قضیه : اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x-a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می توان نتیجه گرفت که :

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

مثال : مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خط های مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x = 1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x = 1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x = 1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

شیب نیم مماس چپ $f'_-(1)$

شیب نیم مماس راست $f'_+(1)$

معادله این نیم مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از:

نیم مماس راست $y - 0 = 2(x-1)$ یا $y = 2x - 2, x \geq 1$

نیم مماس چپ $y - 0 = -2(x-1)$ یا $y = -2x + 2, x \leq 1$

می‌باشند.

کاردر کلاس

یا این فرضیه

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را به ترتیب $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \right.$$

$$① \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} -(x-1) = 2 \Rightarrow f'_+(-1) = 2$$

معادله نیم مماس راست

$$\rightarrow y - 0 = 2(x + 1) \rightarrow y = 2x + 2 \quad x > -1$$

$$② \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2 \Rightarrow f'_-(-1) = -2$$

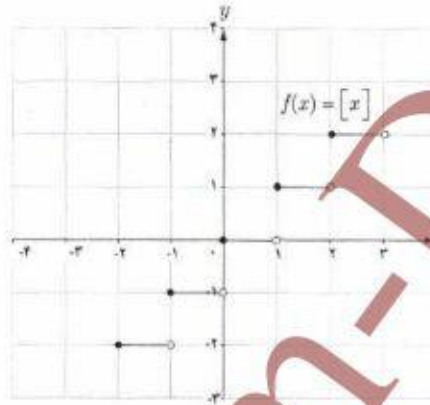
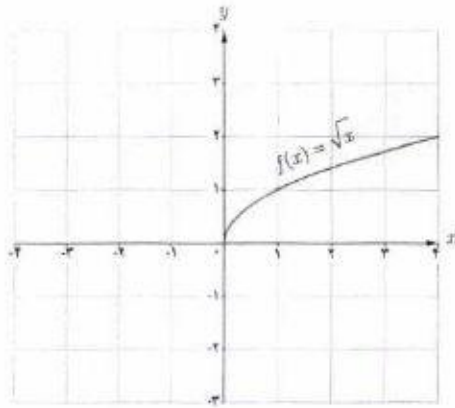
معادله نیم مماس چپ

$$\rightarrow y - 0 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x - 2 \quad x < -1$$

نهیة کننده:

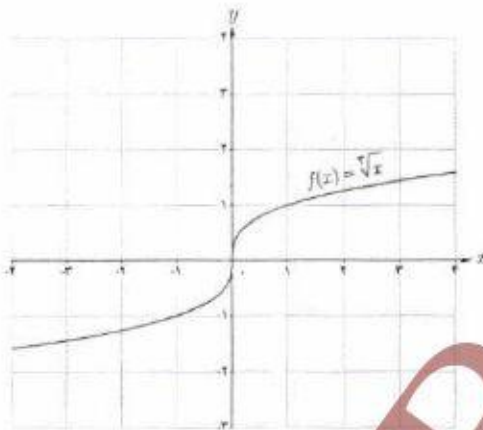
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مثال: توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

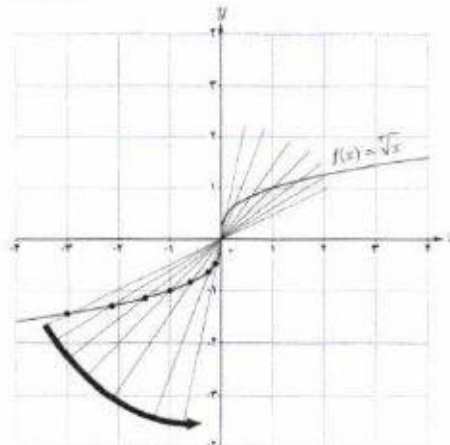
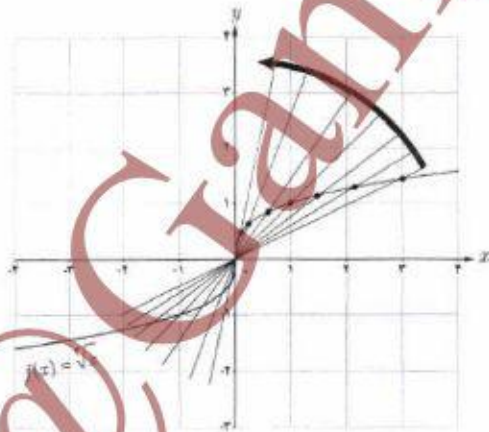
مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «مماس قائم» منحنی می‌نامیم.



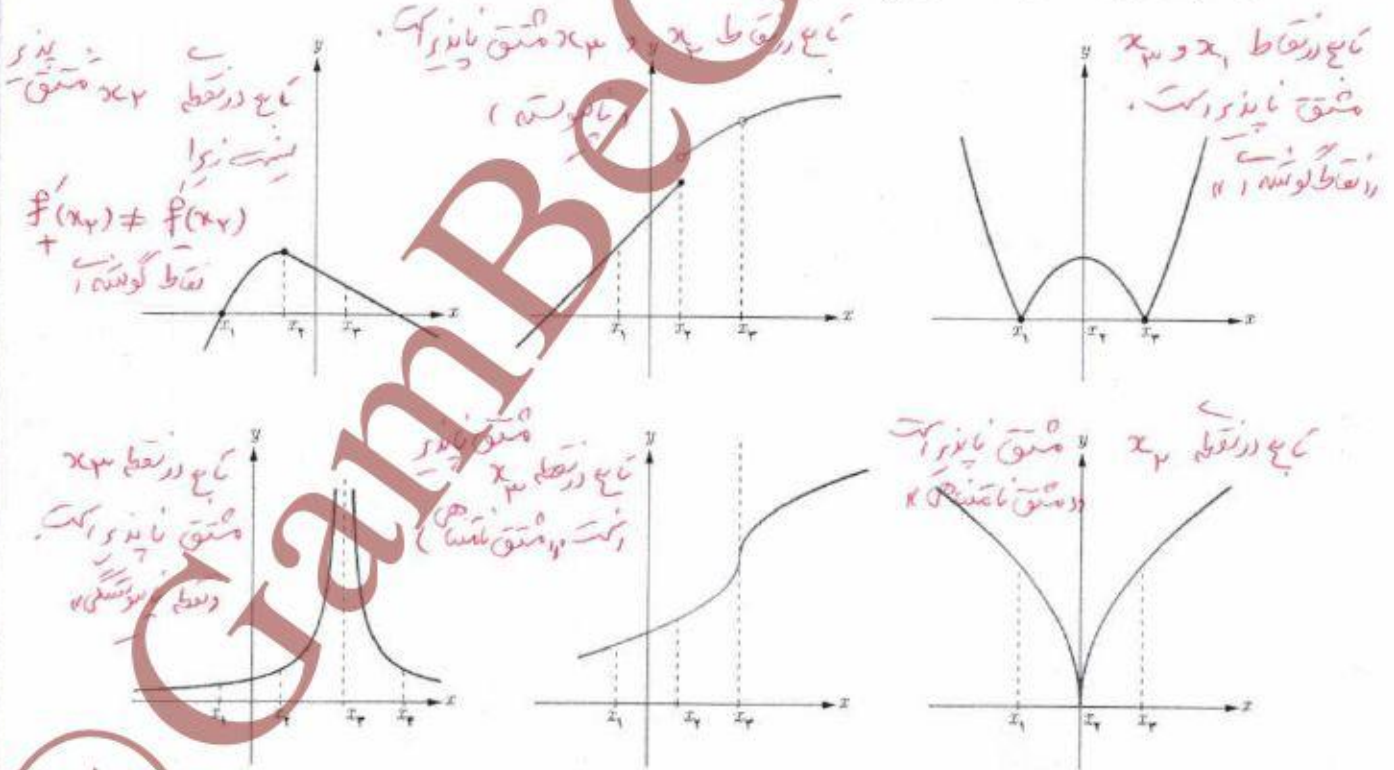
اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ در این صورت خط $x = a$ را «عماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به طور خلاصه می‌توان گفت:

- ❑ تابع f در $x = a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:
 - ❑ f در a پیوسته نباشد.
 - ❑ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:
 - الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).
 - ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشند (نقطه گوشه‌ای).
 - ب) هر دو نامتناهی باشند.

کاردت کلاس

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه با نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.

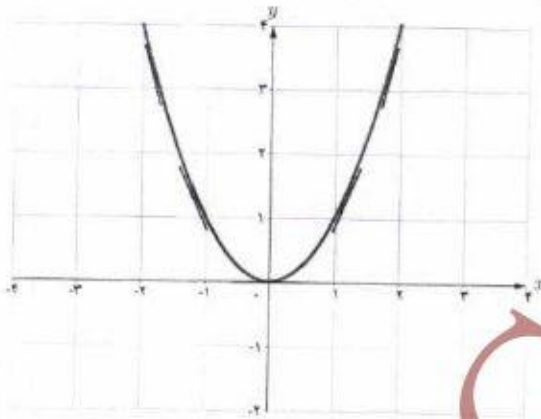


۱- همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فکارت



تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	1	$2\sqrt{3}$	4

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکناست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

اگر عضو x از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x) = 2x$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \text{ و } f'(5^\circ) = 10^\circ$$

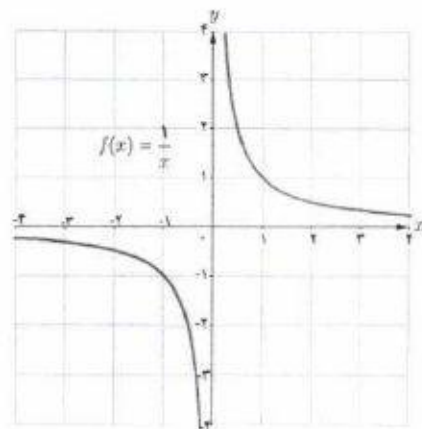
مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید: با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = \frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ و $f'(3)$ را به طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

کارد کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} \cup \{1\} = \mathbb{R}$

$D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$ تابع در نقطه $x=1$ وجود ندارد. لذا $f'(1)$ وجود ندارد.

$f'(x) = \begin{cases} 5 & x \neq 1 \\ \text{نمی‌تواند} & x = 1 \end{cases}$



اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x) = c$ آن گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.



❑ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$ ، آن گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$ ، به کمک این دستور نشان می‌دهیم که: $f'(x) = 3x^2$. ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= \frac{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}{1+n} = nx^{n-1}$$

❑ به‌طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

☞ مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدیم که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

❑* اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[n]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، مورد نظر است. رعایت این موضوع در ارزشنمایی‌ها الزامی است.

۵ اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

۷ اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

ب) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ت) $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.
مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

ج) $h(x) = (2x^2+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^2+1)(-2x+7)$

ت) $l(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow l'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

۱ مشتق تابع های زیر را به دست آورید :

الف) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$

$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + \sqrt{x}(6x)$

$h'(x) = \frac{1(2x^2 + x - 1) - (2x + 1)x}{(2x^2 + x - 1)^2}$

۲ اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ ، $g'(2) = -6$ و مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست

$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
 $= 5 \times 8 + (-6) \times 3 = 22$

$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$ آورید.
 $= \frac{5 \times 8 - (-6) \times 3}{(8)^2} = \frac{29}{32}$

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ مشتق پذیر هستند و داریم: $f'(x) = \cos x$ و $g'(x) = -\sin x$

♦ اثبات: با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin x \frac{\cos h - 1}{h}) + \lim_{h \rightarrow 0} (\cos x \frac{\sin h}{h}) = 0 + \cos x = \cos x \end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

در حسابان (۱) دیدیم که:

بنابراین: $f'(x) = (\sin x)' + (\cos x)(1)$ و در نتیجه $f'(x) = \cos x$ به طریق مشابه اگر $g(x) = \cos x$ داریم:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= (\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x \Rightarrow g'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

با استفاده از دو دستور فوق می توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به دست آورد.

مثال: مشتق $f(x) = \tan x$ را به دست آورید.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

کاردینالاس

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \tan x$

ب) $g(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x}$

$$f'(x) = \cos x \tan x + \sin x (1 + \tan^2 x) \quad g'(x) = \frac{-\Delta \sin x (1 - \sin x) - (\cos x)(\Delta \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

مثال: اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ ، مطلوب است $h'(x)$.

حل: اگر $f(x) = x^4$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$ ، آن گاه: $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)) = (2x + 3) f'(g(x))$$

اگر $u = g(x)$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^4 \Rightarrow f'(u) = 4u^3 = 4(g(x))^3 = 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x + 3) (4) (x^2 + 3x + 1)^3$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد،

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

مثال: مشتق تابع $y = \sin^2 x$ را به دست آورید.

حل: با فرض $\sin x = u$ داریم: $y = u^2$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 2u = (\cos x)(2)(\sin x) = 2 \sin x \cos x$$

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^2(5x - 1)$

$f'(x) = 2(2x)(x^2 + 1)(5x - 1) + (x^2 + 1)^2(5)$

ب) $g(x) = \cos^2 x$

پ) $h(x) = \sin(2x^2 + 5)$

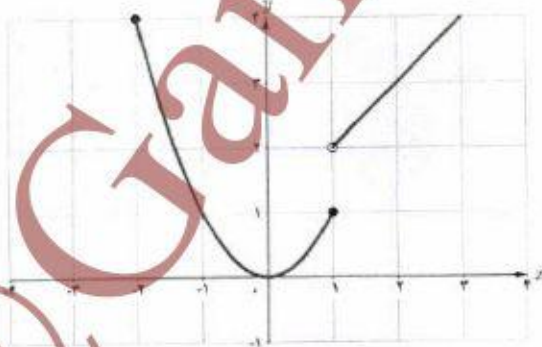
$g'(x) = -2 \sin x \cos x$

$h'(x) = 4x \cos(2x^2 + 5)$

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.
 تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق پذیری روی بازه‌های (a, b) و $[a, b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.
 تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
 تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد،
 گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر
 می‌گیریم.

f روی بازه‌های $(1, \infty)$ و $[-2, 1)$ مشتق پذیر است. ولی
 f روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)

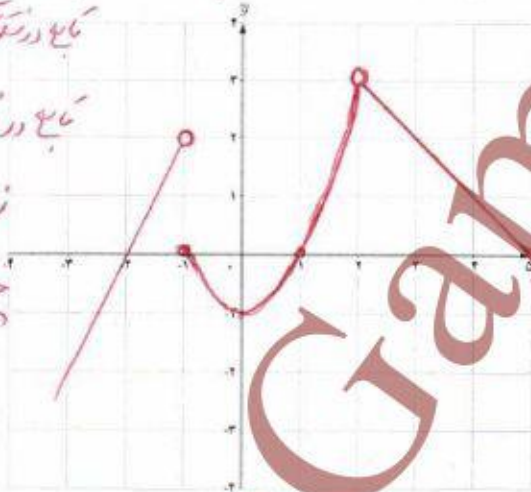
زیرا با اینکه روی بازه $(1, 2)$ مشتق پذیر است، اما در $x = 1$ پیوستگی راست ندارد، لذا
 $x = 1$ مشتق راست ندارد.

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-2, 0]$ و $(2, 5)$ بررسی کنید.

$f'_+(-1) = -2$ و $f'_-(1) = 2$

بررسی کنید.

تابع در نقطه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است.
 تابع در نقطه $(2, 5)$ مشتق پذیر است.
 تابع در فاصله $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست.
 زیر تابع در فاصله $[-2, 0]$ پیوسته نیست.
 جمله تابع در $x = -1$ ناپیوسته و مشتق پذیر است.



توجه کنید:

گروه ریاضی منابع دوم متوسطه، استان خوزستان

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y'' = f''(x)$ را به $y = f(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال: اگر $y = 3x^3 + 2x^2 - 1$ آن گاه:

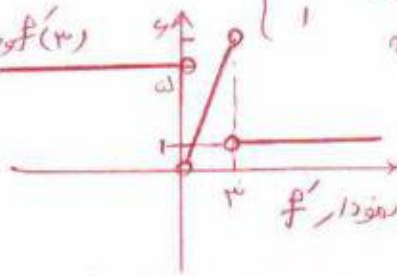
$y' = 12x^2 + 4x$ ، $y'' = 36x + 4$



(ب) $f'(0)$ وجود ندارد چون $f(x)$ در $x=0$ تانگنسی است.

$f'(3) = 1$ و $f'(3) = 6 \rightarrow f'(3)$ وجود ندارد

$$f'(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$



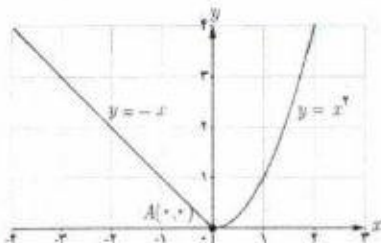
فصل چهارم: مشتق ۹۹

توابع

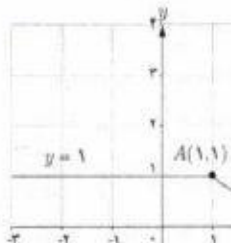
۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

$$f(x) = |x-2| \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}$$

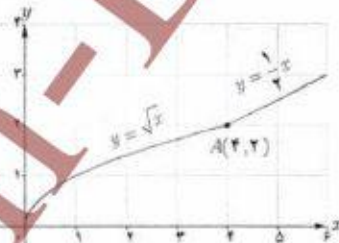
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



$$f'_+(0) = 0 \quad \text{و} \quad f'_-(0) = -1 \rightarrow f'(0) \text{ وجود ندارد. (الف)}$$



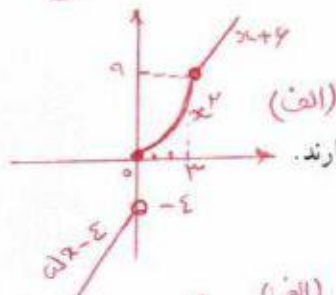
$$f'_+(1) = -1 \quad \text{و} \quad f'_-(1) = 0 \rightarrow f'(1) \text{ وجود ندارد. (ب)}$$



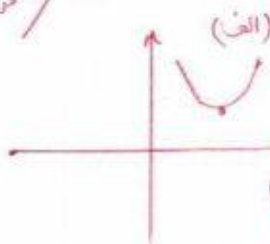
$$f'_+(4) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad f'_-(4) = \frac{1}{2} \rightarrow f'(4) \text{ وجود ندارد. (ب)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases} \quad \text{تابع (الف)}$$

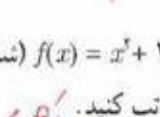
(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.
(ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.



(ب) نشان دهید که $f'(3)$ و $f'(0)$ وجود ندارند.
(ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.



۲ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن
(الف) در یک نقطه برابر صفر شود.
(ب) در تمام نقاط مثبت باشد.
(ت) در تمام نقاط منفی باشد.



۳ (الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(-1) = 0 < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

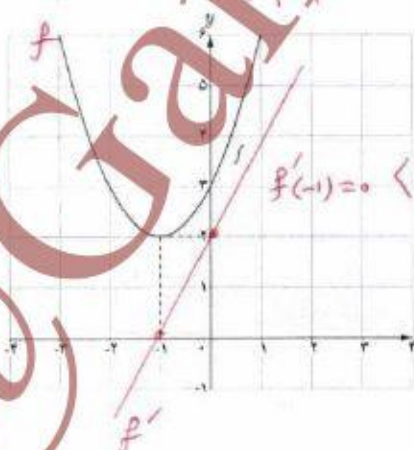
(ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(2) = 6$$

$$f'(-1) = 0, f'(0) = 2, f'(3) = 8$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

• تابع پذیرای $x=1$ نیست. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

• در این نقطه مشتق پذیر نیست.

سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < -2 \\ -(x^2 - 2) & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2 & x > 2 \end{cases}$$

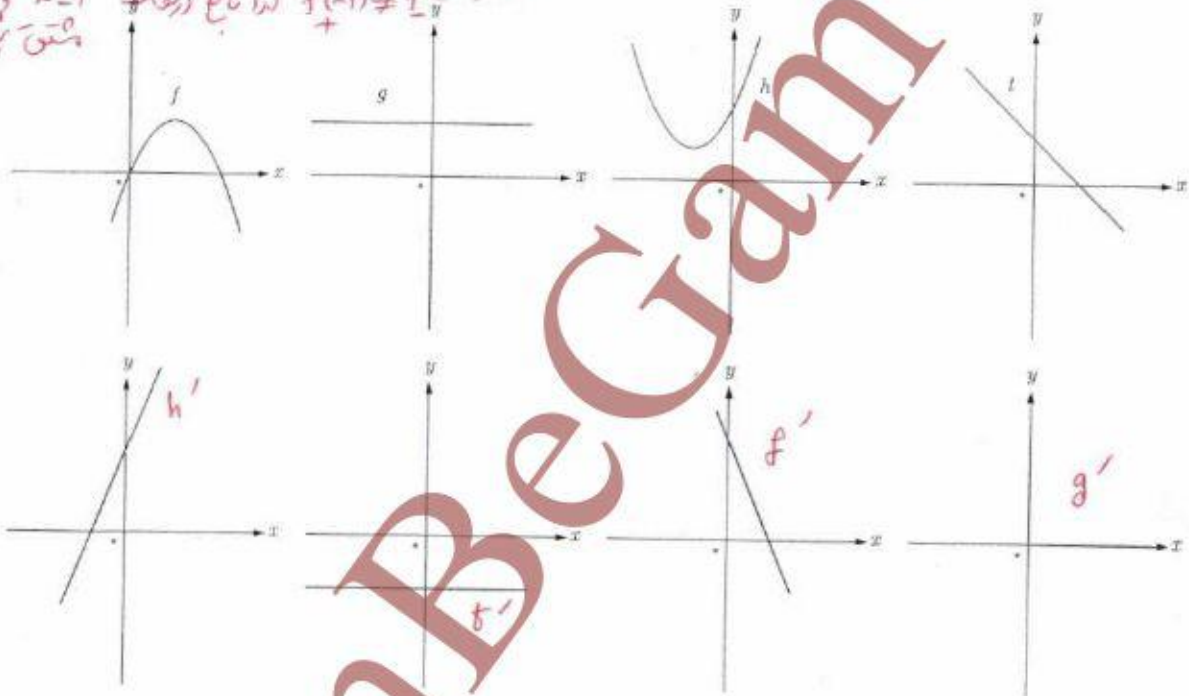
$$f(x) = 3x \quad g(x) = 3x + 1 \quad h(x) = 3x - 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -2 \\ -2x & -2 < x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = |x^2 - 2| \quad \text{اگر } f(x) = |x^2 - 2| \text{ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری } f \text{ را در نقاط به طول های } 2 \text{ و } -2 \text{ بررسی کنید.}$$

نمودار توابع f و g و h را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.

$x=2$ و $x=-2$ مشتق پذیر نیست.



$$f'(1) = 2$$

$$g'(1) = -1$$

$$f'(2) = 4$$

$$g'(2) = 1$$

$$f'(3) = 6$$

$$g'(3) = 2$$



$$h'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 1$$

$$h'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = -4$$

$$h'(3) = f'(3)g(3) + g'(3)f(3) = 6 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 = -6$$

نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ و $h'(2)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$ و $k'(2)$ و $k'(3)$

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1}{(1)^2} = 3$$

$$k'(2) = \frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{(g(2))^2} = \frac{4 \cdot (-2) - 1 \cdot 4}{(-2)^2} = -\frac{12}{4} = -3$$

$$k'(3) = \frac{f'(3)g(3) - g'(3)f(3)}{(g(3))^2} = \frac{6 \cdot (-3) - 2 \cdot 6}{(-3)^2} = \frac{-30}{9} = -\frac{10}{3}$$

۱۱ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 5 = 19$$

۱۲ نشان دهید $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق ندارد.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ وجود ندارد.

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} (3x+2) + 3x^2 \sqrt{3x+2}$$

ب) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$

الف) $f(x) = (3x^2-4)(2x-5)^2$
 $f'(x) = 6x(2x-5) + 2(3x^2-4)(2) = 12x(2x-5) + 4(3x^2-4)$

ب) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{-2x+2}$

ت) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$
 $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{9x+2}{2x\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(-2x+2) - (-2)(x^2-3x+1)}{(-2x+2)^2}$$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x - 2 \sin x \cos x = 0$$

ب) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x}$?

ب) $f(x) = \tan^2 x + 2 \cos x$

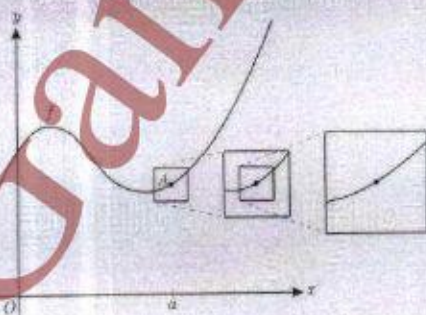
$$f'(x) = 2(1 + \tan^2 x) \tan x + 2 \sin x$$

ت) $f(x) = \sin x \cos 2x$

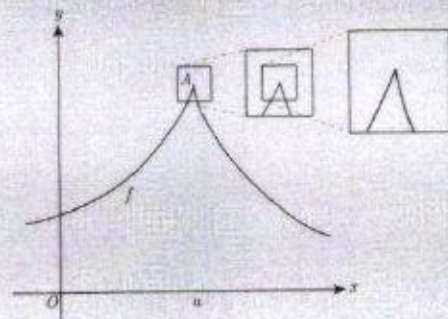
$$f'(x) = \cos 2x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin x$$

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند بر حسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.

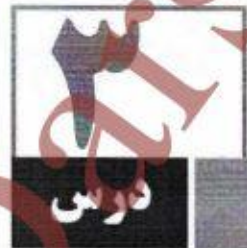


تابع در a مشتق پذیر است.



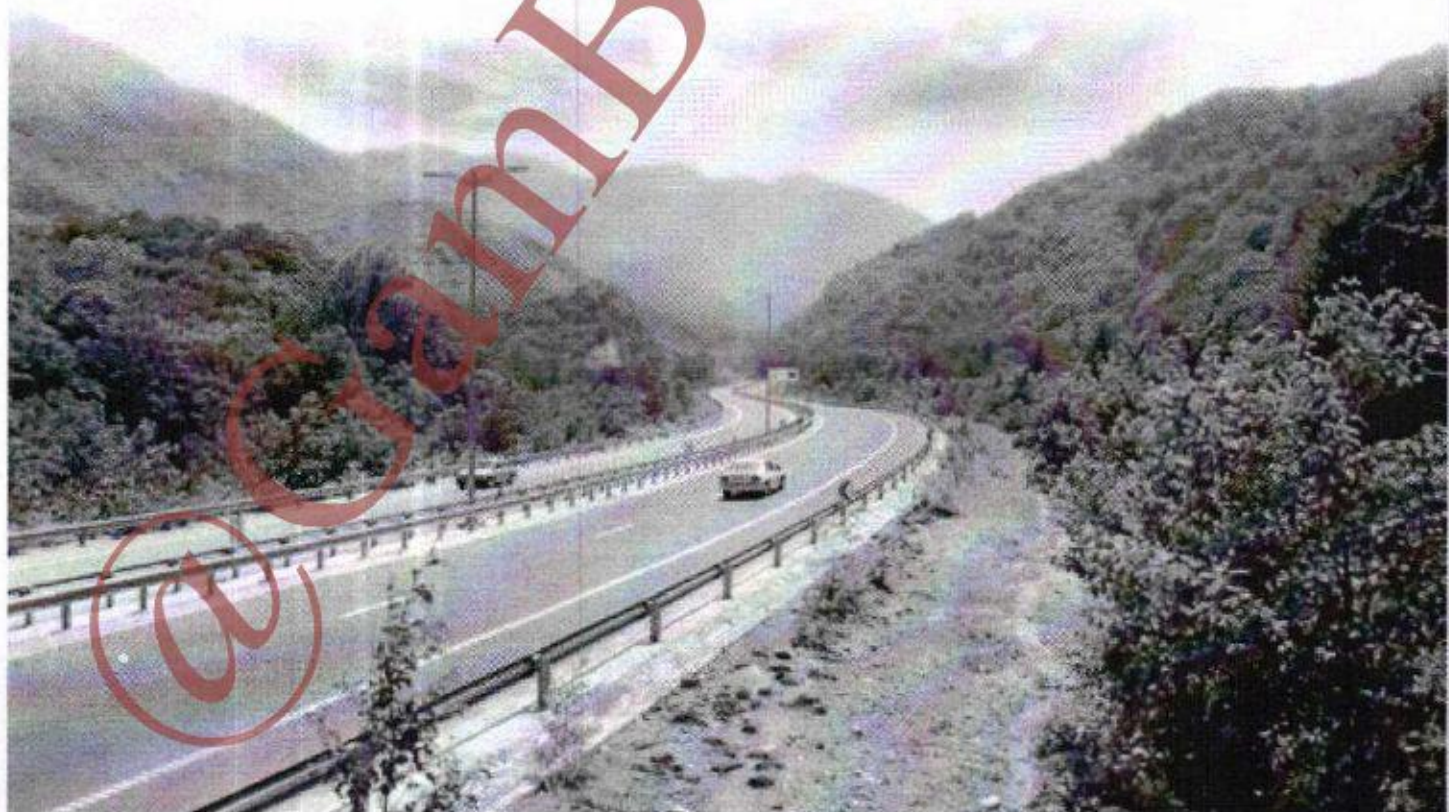
تابع در a مشتق پذیر نیست.

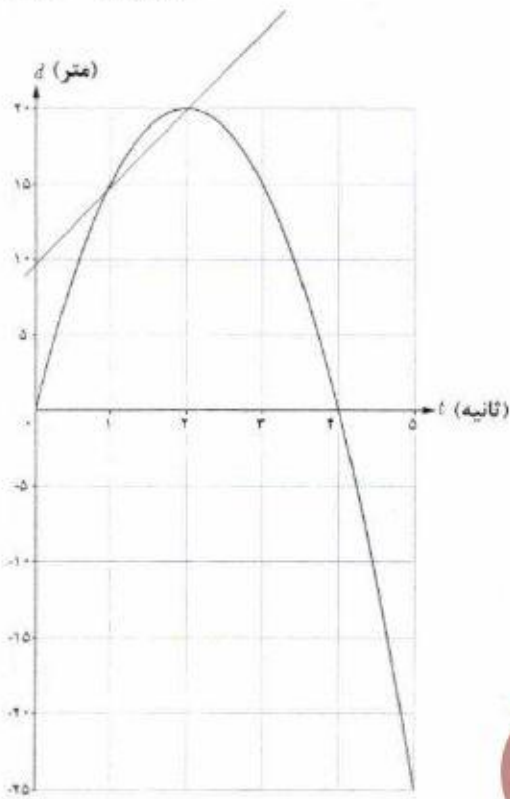
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر



با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت 280 کیلومتر را در 4 ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $70 = \frac{280}{4}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان - زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.





مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ $d(t) = -5t^2 + 20t$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان - زمان (شکل):
الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی $[1, 2]$ ، $[1, 5/5]$ و $[1, 1/4]$ به دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند $[1, 1/2]$ و $[1, 1/3]$ و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

ب) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

پاسخ حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18/5 - 15}{-4/5} = \frac{3/5}{-4/5} = -3/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/2 - 15}{-3/4} = \frac{3/2}{-3/4} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

ب) $d'(1) = 10$ ، پس ، $d'(t) = -10t + 20$

ت) $d'(2) = 0$ ، $d'(3) = -10$

سرعت در لحظه $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور x هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه های $t=1$ و $t=3$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می دهد که جهت حرکت در $t=3$ برخلاف جهت حرکت در $t=1$ است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه ای تابع f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

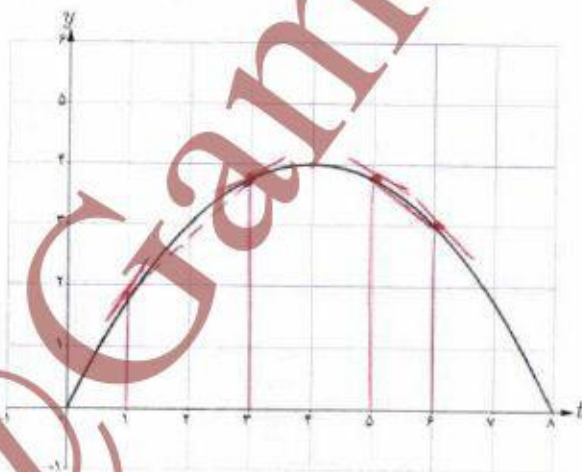
آهنگ متوسط تغییر با شیب خط فاطع و آهنگ لحظه ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه متناظراند.

نیه کنده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$

B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

C سرعت لحظه ای در $t=1$

D سرعت لحظه ای در $t=3$

E سرعت لحظه ای در $t=5$

F سرعت لحظه ای در $t=6$

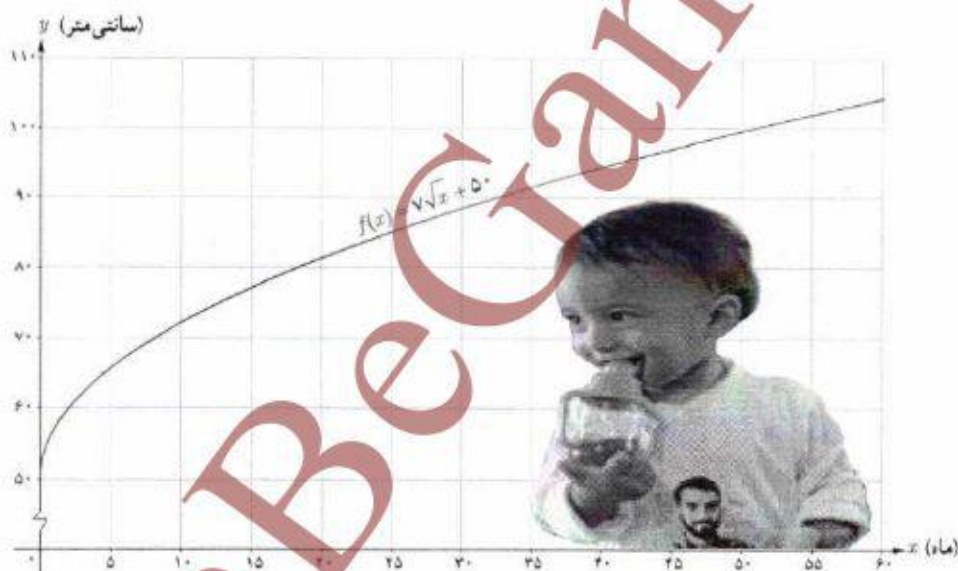
$$F < B < E < D < A < C$$

کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد همان‌گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx 0.19 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۱۹ سانی متر در هر ماه است.



گارد کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ $\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{\sqrt{25} + 50 - 50}{25} = \frac{5}{25} = 0.2 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$ $f'(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} \approx 0.07 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$ $f'(25) > f'(49)$

ب) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله

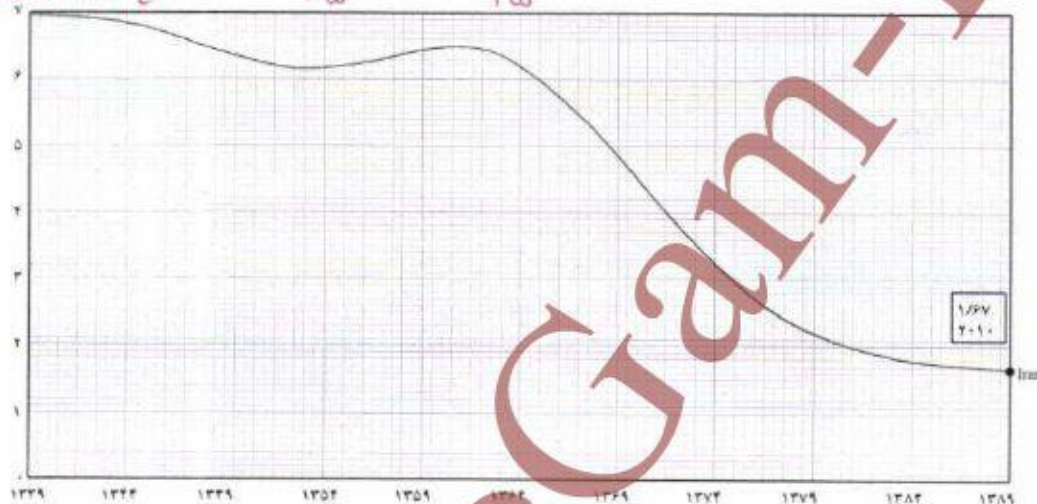
حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.
 $\frac{f(36) - f(16)}{36 - 16} = \frac{9.5 - 8}{20} = \frac{1.5}{20} = 0.075 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$

نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۸۹, ۱۳۳۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0.108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(1379) - f(1364)}{1379 - 1364} = \frac{2.2 - 7.2}{15} = \frac{-5}{15} = -0.33$$

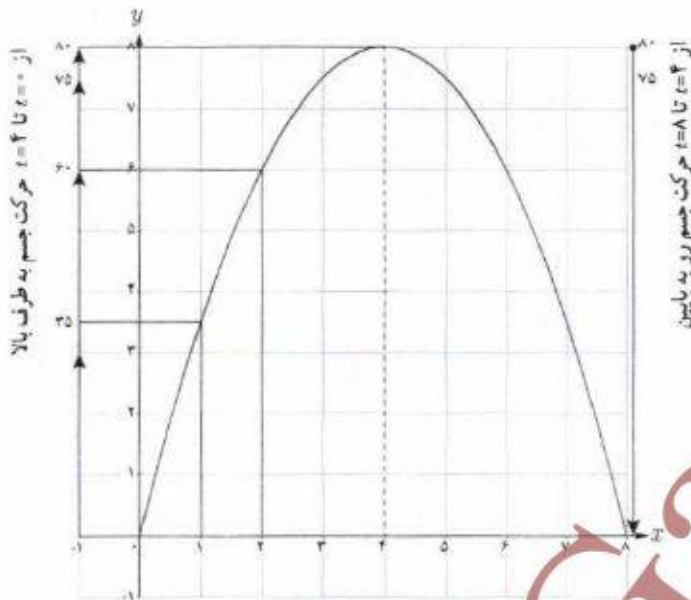


میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابداع سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، بر اساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای



مثال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است. به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان - زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0, 2]$ ، $[1, 2]$ ، $[2, 3]$ و $[3, 4]$ را به ترتیب با v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s}, \quad h'(2) = 20 \text{ m/s}, \quad h'(3) = 10 \text{ m/s}, \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود.

سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4, 5]$ برابر $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{75 - 80}{1} = -5 \text{ m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است. سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10 \text{ m/s}$ است.

با توجه به مثال قبل:

الف) سرعت جسم هنگام برتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید. $t=0 \Rightarrow h'(0) = 40 \text{ m/s}$ هنگام برتاب

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5, 8]$ به دست آورید. $t=8 \Rightarrow h'(8) = -40 \text{ m/s}$ هنگام برخورد به زمین

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 25 m/s و -25 m/s است.
 $\frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - 75}{3} = -25 \text{ m/s}$
 $25 = -10t + 40 \rightarrow t = 1.5 \text{ s}$
 $-25 = -10t + 40 \rightarrow t = 6.5 \text{ s}$

د) $h'(t) = -10t + 40$ سرعت لحظه‌ای

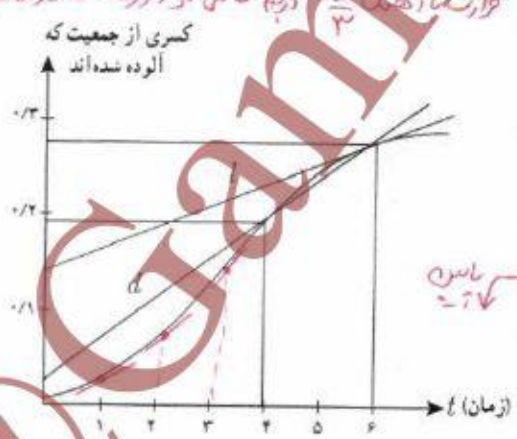
تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

الف) $\frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{19 - 11}{4} = 2$ ب) $\frac{T(18) - T(12)}{18 - 12} = \frac{9 - 19}{6} = -\frac{5}{3}$

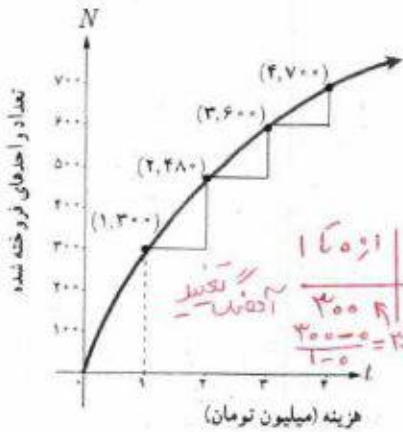
آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:
 الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.
 ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.
 پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.



۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط t و d چه چیزهایی را نشان می دهند.
 ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟
 پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.

الف) شیب خط d آهنگ تغییر خطم‌ای کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه $t=6$ است.
 شیب خط d آهنگ تغییر متوسط کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله‌ی زمانی $t=6$ است.
 زخمه‌ی مهمان تا هفته‌ی ششم نشان می دهد.



۲ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف x میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب x را وقتی x از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر x افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟ زیرا با افزایش هزینه، تعداد کالاها فروخته شده کم می‌شود و در نتیجه آهنگ کم می‌شود.

۳ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است.

در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{25 - 1}{5} = 4.8 \quad \text{و} \quad f'(t) = 2t - 1 \quad \rightarrow \quad 2t - 1 = 4.8 \quad \rightarrow \quad t = 2.9$$

۵ تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t	ثانیه	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

$\frac{f(0.4) - f(0.3)}{0.1} = 12 \text{ m/s}$
 $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 11 \text{ m/s}$
 $f'(0.4) = 11.5 \text{ m/s}$

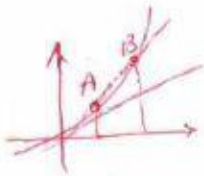
بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

- الف) $1/23 \text{ m/s}$ ب) $14/91 \text{ m/s}$ ج) $11/5 \text{ m/s}$ د) $16/3 \text{ m/s}$

۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(1) = -6$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	-۶	-۳	-۱/۸	-۰/۸	۴

۷ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :



الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. **نادرست**

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. **درست**

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$ **نادرست**
 $f(a) = f'(a) = 0$

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$$\frac{m(4) - m(3)}{4 - 3} = \frac{130 - \sqrt{3} - 54}{1} \approx 76, 3$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \rightarrow m'(3) \approx 54, 39$$

۹ گنجایش ظرفی 40 لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس

از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

الف) $\frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = 39, 206 - 40 = -0, 794$ **لیتر**

ب) $\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = -0, 4$ **لیتر متوسط**

$V'(t) = -0, 8(1 - \frac{t}{100})$ **لیتر لحظه‌ای** $\rightarrow -0, 8(1 - \frac{t}{100}) = -0, 4$

$$\rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow t = 50$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

