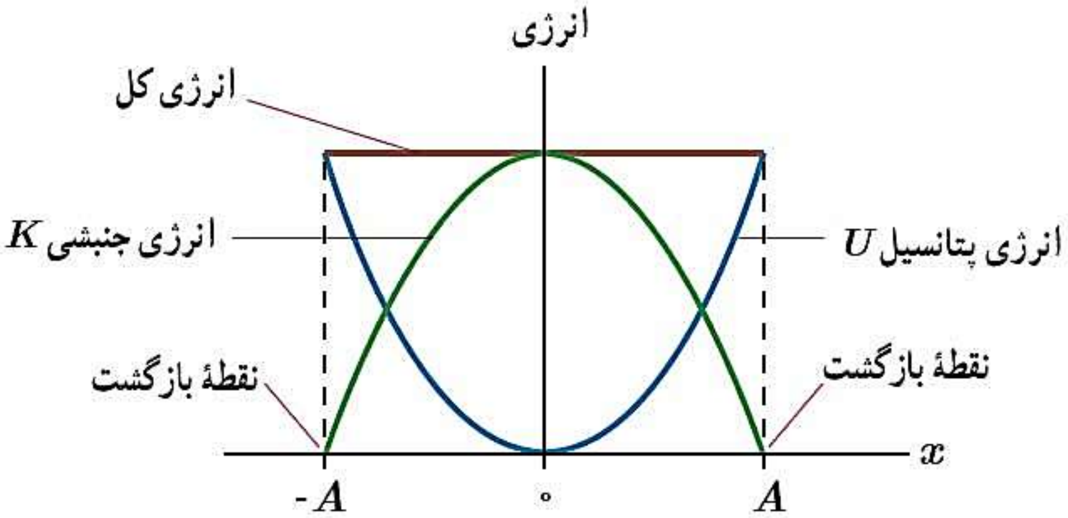
برای محاسبه انرژی نوسانگر در حرکت هماهنگ ساده، انرژی سامانه جرم- فنر را بررسی می کنیم. در سامانه جرم-فنر، وقتی فنری کشیده یا فشرده شود، انرژی پتانسیل کشسانی در آن ذخیره می شود. به صورتی که با افزایش جابجایی از نقطه تعادل، این انرژی افزایش می یابد. بنابر این انرژی پتانسیل سامانه جرم-فنر در نقاط بازگشتی $(x = \pm A)$ بیشینه و در نقطه تعادل (x=0) ، کمینه است.

با افزایش جابجایی از نقطه تعادل، سرعت کاهش می یابد و انرژی جنبشی کم می شود یعنی در نقاط بازگشتی، سرعت و انرژی جنبشی صفر می شوند. بیشینه سرعت و انرژی جنبشی در نقطه تعادل است.

انرژی مکانیکی نوسانگر

انرژی مکانیکی این سیستم برابر با مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی آن است و چون سطوح بی اصطکاک هستند، انرژی مکانیکی پایسته است. بنابر این مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل در هر نقطه از مسیر برابر است یعنی با افزایش انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل کاهش می یابد و برعکس. نمودار زیر تبدیل انرژی جنبشی به پتانسیل در سیستم جرم و فنر را نمایش می دهد:



انرژی مکانیکی سیستم جرم و فنر به صورت زیر است:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 2\pi^2 mA^2 f^2$$

بنابر این انرژی مکانیکی هر نوسانگر هماهنگ ساده ای متناسب با مجذور دامنه A^2 و مجذور بسامد f^2 است.

تندی بیشینه نوسانگر در حرکت هماهنگ ساده

مثال 1:

الف)نشان دهید تندی بیشینه در حرکت هماهنگ ساده برابر است با Aω.

ب)تندی نوسانگر هماهنگ ساده ای که با دامنه 10cm و دوره 0.50s نوسان می کند، هنگام عبور از نقطه تعادل چقدر است؟

پاسخ:

الف) چون انرژی مکانیکی که برابر با مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل فنر است، همواره ثابت است و چون هر دو عبارت جنبشی و پتانسیل ،بزرگتر و یا برابر با صفر هستند، پس زمانی انرژی جنبشی و سرعت بیشینه می شود که انرژی پتانسیل فنر صفر شود یعنی زمانی که نوسانگر از نقطه تعادل عبور می کند بنابر این:

$$E = K + U$$

$$K \geq 0 \quad \text{و} \quad U \geq 0 \rightarrow K_{max} = E \quad \text{و} \quad U_{max} = E$$

$$K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \rightarrow k = m\omega^2$$

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \rightarrow v_{max} = A\omega$$

ب) در ابتدا رابطه بین تندی و مکان نوسانگر را به صورت زیر حساب می کنیم.

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

$$v^2 = A^2\omega^2 - \frac{k}{m}x^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

اگر چه می دانیم در نقطه تعادل تندی بیشینه است، اما اگر در رابطه بالا ، x=0 قرار دهیم هم به همان رابطه می رسیم.

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2) = \omega^2 A^2 \rightarrow v_{max} = A\omega$$

$$v_{max} = 0.1 \times \left(\frac{2\pi}{0.5}\right) = 0.4\pi\ m/s$$

مثال هایی از انرژی نوسانگر

مثال 2:

دامنه نوسان وزنه ای که به یک فنر با ثابت فنر 75N/m متصل است و در راستای افقی نوسان می کند، برابر با 8cm است. اگر انرژی پتانسیل این نوسانگر در نقطه ای از مسیر نوسان، $8\times10^{-2}J$ باشد، انرژی جنبشی آن در این مکان چقدر است؟

پاسخ:

انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = U + K$$

$$\frac{1}{2} \times 75\frac{N}{m} \times (0.08)^2 = 8 \times 10^{-2}J + K$$

$$K = 0.16J$$

مثال 3:

معادله حرکت هماهنگ ساده یک نوسانگر در SIبه صورت زیر است.

$$x = (0.050m)\cos(20\pi t)$$

الف)در چه زمانی، پس از لحظه صفر، برای نخستین بار تندی نوسانگر به بیشترین مقدار خود می رسد؟

ب) در چه زمانی، پس از لحظه صفر، برای نخستین بار تندی نوسانگر به صفر می رسد؟

ج) تندی نوسانگر چقدر باشد تا انرژی جنبشی نوسانگر برابر با انرژی پتانسیل آن شود؟

پاسخ:

الف) در نقطه ی تعادل یعنی x=0 ، بیشینه سرعت اتفاق می افتد بنابر این:

$$x = 0 \rightarrow \cos(20\pi t) = 0 \rightarrow 20\pi t = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{1}{40} s$$

ب) زمانی که سرعت نوسانگر صفر می شود، انرژی جنبشی نوسانگر صفر است. بنابر این انرژی پتانسیل بیشینه است . یعنی بیشترین فاصله از نقطه تعادل. بنابر این:

$$x = A = 0.05 \rightarrow 0.050 = (0.050m)\cos(20\pi t)$$

$$\cos(20\pi t) = 1 \rightarrow 20\pi t = 0, \pi, \ldots$$

$$t = \frac{1}{20} s$$

ج) انرژی جنبشی برابر با انرژی پتانسیل است یعنی:

$$E = U + K \rightarrow U = K \rightarrow E = 2K$$

$$\frac{1}{2} \times mA^2\omega^2 = 2 \times \frac{1}{2} \times mv^2 \,, \omega = 20\pi$$

$$v^2 = \frac{1}{2} \times (0.05)^2 \times (20\pi)^2 = \frac{1}{2}\pi^2$$

$$v = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \; m/s$$

مثال 4:

جسمی به جرم 100 گرم به فنری متصل است و روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد. اگر بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر 0.8 میلی ژول باشد، لحظه ای که انرژی پتانسیل نوسانگر 0.4 میلی ژول است، سرعت نوسانگر چند سانتی متر بر ثانیه است؟

پاسخ :

$$E = k_{max} = 0.8\,mj$$

$$E = K + U \;\rightarrow K = E - U = 0.8 - 0.4 = 0.4\,mj = 4 \times 10^{-4} j$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \;\rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 4 \times 10^{-4}}{0.1}} = 4\sqrt{5} \times 10^{-2} m = 4\sqrt{5}\,cm$$

تمرین ها

تمرین 1:

جسمی به جرم 1kg به فنری افقی با ثابت 6N/cm متصل است. فنر به اندازه 9cm کشیده و سپس رها می شود و جسم روی سطح افقی شروع به نوسان می کند. با چشم پوشی از اصطکاک :

الف)دامنه نوسان و تندی بیشینه جسم چقدر است؟

ب)وقتی تندی جسم 1.6m/s است، انرژی پتانسیل کشسانی آن چقدر است؟

پاسخ:

ابتدا برای جلوگیری از اشتباه در محاسبات، باید واحد ها را به SI تبدیل کنیم.

$$k = 6\frac{N}{cm} \times \frac{100cm}{1m} = 600\frac{N}{m}$$

دامنه نوسان به همان اندازه ای است که فنر را کشیده ایم. یعنی :

$$A = 9cm$$

$$v_{max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_{max} = 0.09m \times \sqrt{\frac{600\frac{N}{m}}{1kg}} \times = 2.2\frac{m}{s}$$

ب)

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = U + K = U + \frac{1}{2}mv^2$$

$$U = \frac{1}{2} \times 600\frac{N}{m} \times (0.09m)^2 - \frac{1}{2} \times 1kg \times \left(1.6\frac{m}{s}\right)^2 = 2.43J - 1.28J = 1.15J$$

تمرین 2:

نوسانگری به جرم 100 گرم، روی پاره خطی به طول 20cm حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد و در مدت یک چهارم ثانیه از مرکز نوسان به انتهای مسیر می رسد. انرژی جنبشی نوسانگر در مرکز نوسان، چند میلی ژول است؟ (π^2=10)

پاسخ:

طول پاره خط یعنی دو برابر دامنه. مطابق شکل زیر. بنابر این دامنه نوسان عبارت است از:

$$A = \frac{0.2m}{2} = 0.1m$$

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow T = 1s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

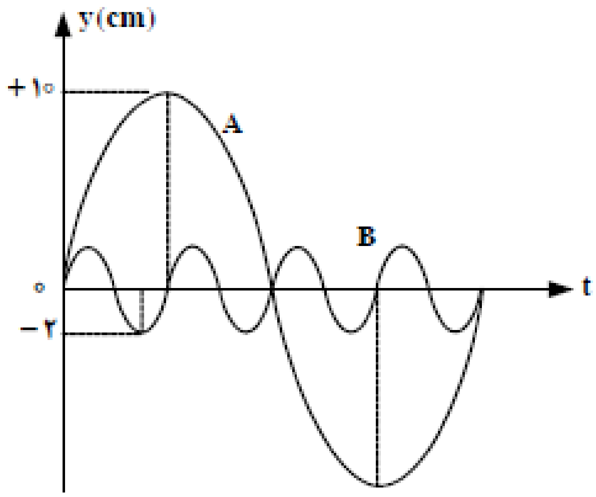
انرژی جنبشی در مرکز نوسان بیشینه و برابر با انرژی کل است یعنی:

$$E = K_{max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.1kg \times (0.1m)^2 \times (2\pi)^2$$

$$2\pi^2 \times 10^{-3}J = 20\ mJ$$

تمرین 3:

شکل روبرو نمودار مکان–زمان دو نوسانگر A و B را نشان می دهد. اگر جرم نوسانگر B ، پنج برابر جرم نوسانگر A باشد، انرژی مکانیکی نوسانگر A چند برابر انرژی مکانیکی نوسانگر B است؟



پاسخ:

همانطور در شکل دیده می شود، دوره ی نوسان A چهار برابر دوره نوسان B است بنابر این:

$$T_A = 4 \times T_B$$

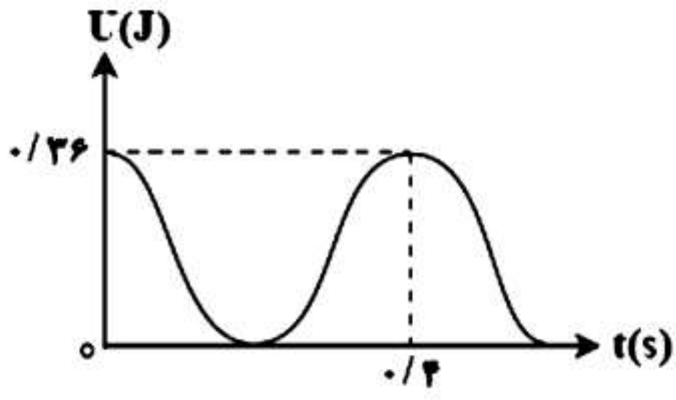
$$A_A = 5 \times A_B$$

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{U_{A\,max}}{U_{B\,max}} = \frac{\frac{1}{2} m_A {A_A}^2 {\omega_A}^2}{\frac{1}{2} m_B {A_B}^2 {\omega_B}^2} = \frac{m_A {A_A}^2 {T_B}^2}{m_B {A_B}^2 {T_A}^2}$$

$$\frac{E_A}{E_B} = \left(\frac{m_A}{m_B}\right) \times \left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2 \times \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right) \times (5)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

تمرین 4:

نمودار انرژی پتانسیل کشسانی یک نوسانگر ساده مطابق شکل رو به رو است. در لحظه t=0.1s، انرژی جنبشی نوسانگر چند ژول است؟ (برای پایه دوازدهم مناسب نیست)



پاسخ:

مطابق شکل در زمان 0.4 ثانیه، نصف نوسان کامل اتفاق افتاده است بنابر این:

$$\frac{T}{2} = 0.4s \to \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8} = 2.5\pi$$

$$\omega t = \frac{5}{2}\pi t = \frac{5}{2}\pi \times 0.1s = 0.25\pi$$

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 cos^2(\omega t)$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 0.36$$

$$\to U(t) = 0.36cos^2(\omega t) = 0.36 \times (cos(\frac{\pi}{4}))^2 = 0.18$$

$$K = E - U = 0.36 - 0.18 = 0.18J$$

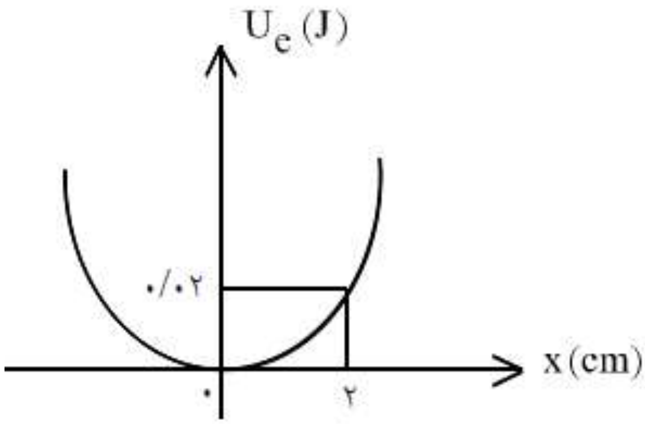
روش دوم : می توانستیم بگوییم، 0.1 ثانیه یعنی T/8 پس مکان و انرژی نوسانگر به صورت زیر محاسبه می شود.

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \to U = K = \frac{E}{2} = \frac{0.36}{2} = 0.18\ j$$

تمرین 5:

نمودار انرژی پتانسیل-مکان نوسانگری به جرم 400g مطابق شکل است. دوره حرکت نوسانگر چند ثانیه است؟

$(\pi^2=10)$



پاسخ:

در x=2cm انرژی پتانسیل برابر با 0.02J است بنابر این:

$$U=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \rightarrow 0.02J=\frac{1}{2}\omega^2\times 0.4kg\times (0.02)^2$$

$$\omega^2=\frac{1000}{4}=250=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{250}\rightarrow$$

$$T^2=\frac{40}{250}\rightarrow T=\frac{2}{5}=0.4$$