

حسابان ۱

پایه یازدهم « رشته ی ریاضی فیزیک »

فصل ۴ : مثلثات

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی



www.mathtower.ir

@amerimath

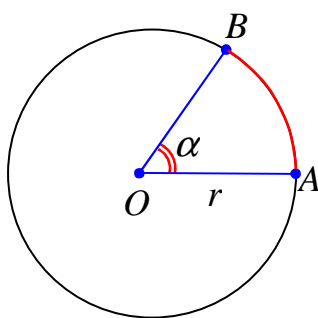
مهر ۱۴۰۱



درس اول : واحدهای اندازه گیری زاویه

در سالهای گذشته با مفهوم زاویه آشنا شده اید. به یاد می آورید که برای اندازه گیری زاویه از درجه استفاده می شود. در واقع درجه یکی واحدهای اندازه گیری زاویه است. استفاده از درجه در برخی موارد مشکلاتی را به همراه دارد، لذا از واحدهای دیگر نیز استفاده می شود. در اینجا در پی آن هستیم که رادیان را به عنوان واحد دیگر اندازه گیری زاویه را معرفی نماییم. استفاده از رادیان در برخی مسائل ضروری است.

قسمت اول : آشنایی با رادیان



یک رادیان برابر اندازهی زاویهی مرکزی از یک دایره است که طول کمان روبرو به آن زاویه، برابر شعاع دایره باشد.

$$\overset{\frown}{AB} = r \leftrightarrow \alpha = 1 \text{ rad}$$

تمرین ۱ : در یک دایره به شعاع ۵ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۰ سانتی متر می باشند. اندازهی زاویهی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۲ : در یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۲ سانتی متر می باشند. اندازهی زاویهی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

نتیجه ۱ : اندازهی یک زاویه بر حسب رادیان برابر خارج قسمت اندازهی طول کمان روبرو به آن زاویه بر اندازهی شعاع آن است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$

تمرین ۳ : نشان دهید که محیط یک دایره به شعاع r برابر 2π رادیان است.

حل :

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

آموزش حسابان ۱ تهیه کننده : جابر عامری

تمرین ۴: به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۹۰ درجه (ربع دایره) تعیین کنید که چند رادیان است؟

حل :

$$\frac{۳۶۰}{۲\pi} = \frac{۹۰}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{۲\pi \times ۹۰}{۳۶۰} = \frac{\pi}{۲} \text{ rad}$$

تمرین ۵: به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۱۸۰ درجه (نیم دایره) را برحسب رادیان تعیین کنید.

تمرین ۶: به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۳۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۷: به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۲۷۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

نتیجه ۲: یک دایره (دوران کامل) برابر ۳۶۰ درجه و ۲π رادیان است.

تمرین برای حل :

۸: اندازه‌ی زاویه‌های ۱۲۰ درجه و ۴۵ درجه را برحسب رادیان به دست آورید.

۹: اندازه‌ی زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان را برحسب درجه به دست آورید.

۱۰: اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی در یک دایره $\frac{۱}{۵}$ رادیان و طول کمان روبرو به آن زاویه ۹ سانتی متر است. اندازه‌ی شعاع دایره را بدست آورید.

۱۱: حساب کنید که چه مدت طول می کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{۲}{۵}\pi$ رادیان دوران کند؟

قسمت دوم: رابطه‌ی بین رادیان و درجه

نظر به اینکه یک دایره کمانی برابر ۳۶۰ درجه و 2π می باشد. با تشکیل تناسب می توان، رابطه‌ی زیر بین اندازه‌ی زاویه بر حسب درجه و اندازه‌ی زاویه بر حسب رادیان بیان کرد.

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$$

نتیجه ۱: برای تبدیل واحد های اندازه‌ی زاویه از رابطه‌ی زیر استفاده می شود.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

تمرین ۱۱: اندازه‌ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۲: اندازه‌ی زاویه ای ۹۰- درجه است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۳: اندازه‌ی زاویه ای $\frac{2\pi}{3}$ رادیان است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

نتیجه ۲: زاویه‌ای که اندازه‌ی آن یک درجه باشد، اندازه‌ی آن بر حسب رادیان برابر $\frac{\pi}{180}$ است. بنابراین:

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{180} = \text{یک درجه}$$

تمرین برای حل:

۱۴: اندازه‌ی زاویه ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۳ بعد از ظهر حرکت می کند را

برحسب درجه و رادیان بیان کنید.

۱۵: اندازه‌ی زاویه ای $\frac{\pi}{3}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه را برحسب درجه به دست آورید.

۱۶: یک دایره‌ی مثلثاتی رسم کنید و روی آن زاویه های منطبق بر محور های مختصات را برحسب رادیان

مشخص کنید.

۱۷ : جدول زیر را کامل کنید.

۱۵			۱۳۵	زاویه برحسب درجه
	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$		زاویه برحسب رادیان

۱۸ : در یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر، یک زاویه‌ی مرکزی به اندازه‌ی ۲۰ درجه رسم شده است.

الف : اندازه‌ی این زاویه را برحسب رادیان بدست آورید.

ب : طول کمان روبرو به این زاویه را تعیین کنید.

۱۹ : درستی یا نادرستی جملات زیر را بنویسید.

الف) در دایره‌ی ای به شعاع ۱ سانتی متر، طول کمان روبرو به زاویه‌ی π رادیان، تقریباً برابر $3/14$ سانتی متر است.

ب) انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{6\pi}{5}$ رادیان، در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

ج) اگر زاویه‌ی بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی برابر ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه‌ی قاعده‌ی این مثلث، کوچکتر از اندازه‌ی هر یک از ساق‌های آن است.

د) زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $\frac{\pi}{9}$ رادیان و $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زاویه‌های یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

حل چند مسئله کاربردی

تمرین ۲۰ : طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است. فرض کنید برف پاکن، کمانی به

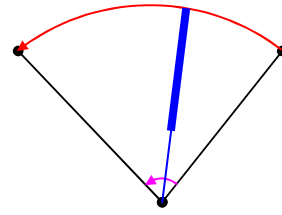
اندازه‌ی ۱۲۰ درجه طی می‌کند.

الف : اندازه‌ی کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

ب : طول کمان طی شده توسط نوک برف پاکن چند سانتی متر است؟ ($\pi = 3/14$)

حل :

الف) $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$



ب) $\theta = \frac{L}{r}$

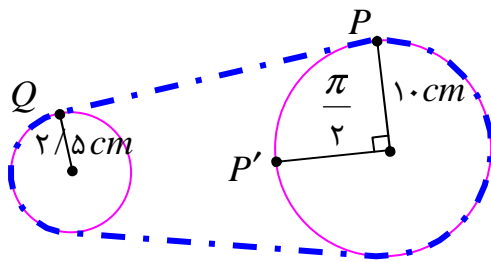
$\frac{2\pi}{3} = \frac{L}{24} \rightarrow L = \frac{2\pi \times 24}{3} = 16\pi \approx 50.24 \text{ cm}$

تمرین ۲۱: در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به

شعاع‌های ۱۰ و ۲/۵ سانتی متر را به هم وصل کرده است.

بررسی کنید که وقتی قرقره‌ی بزرگتر $\frac{\pi}{2}$ رادیان می

چرخد، (یعنی نقطه‌ی P در موقعیت P' قرار می‌گیرد).



قرقره‌ی کوچکتر چند رادیان می‌چرخد؟ ($\pi \text{ rad} = 3/14 \text{ rad}$)

حل: ابتدا مسافتی را که نقطه‌ی P بر روی محیط قرقره‌ی بزرگتر طی می‌کند، به دست می‌آوریم.

$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{R} \rightarrow \widehat{PP'} = R\theta = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi = 15.7 \text{ cm}$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره‌ی کوچکتر نیز 5π سانتی متر حرکت می‌کند.

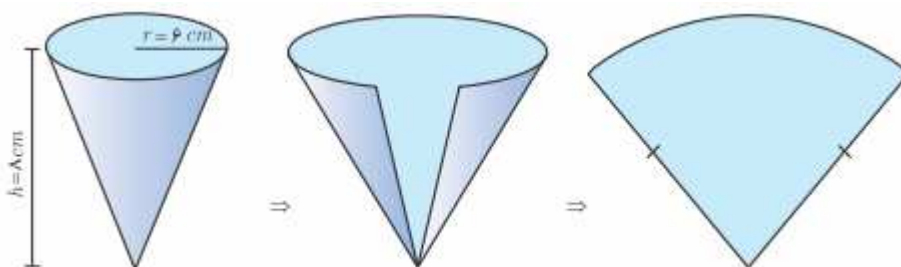
برای این قرقره داریم:

$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = 2\pi \text{ rad}$

بنابراین وقتی قرقره‌ی بزرگتر ربع دور می‌چرخد، قرقره‌ی کوچکتر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه‌ی Q

به مکان خود باز می‌گردد.

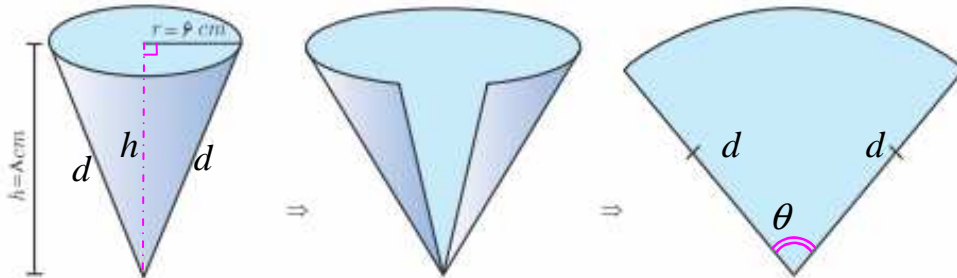
تمرین ۲۲: در شکل زیر، یک مخروط و گسترده‌ی آن را مشاهده می‌کنید.



آموزش حسابان ۱ تهیه کننده : جابر عامری

شعاع قاعده‌ی مخروط ۶ و ارتفاع آن ۸ سانتی متر است. تعیین کنید که اندازه‌ی زاویه‌ی قطاع^۱ حاصل از گسترده‌ی این مخروط چند رادیان است؟

حل :



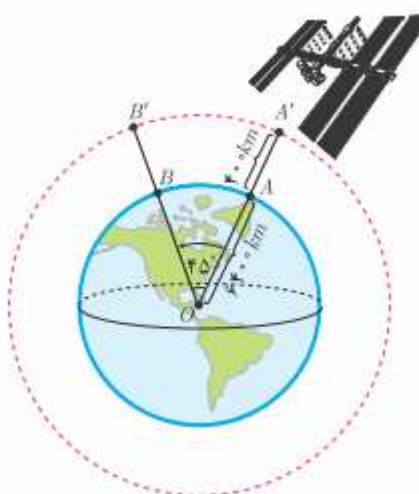
$$d^2 = r^2 + h^2 \rightarrow d^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow d = 10 \text{ cm}$$

از طرفی واضح است که طول کمان مربوط به قطاع برابر محیط دایره است. لذا اگر طول کمان را برابر L فرض کنیم، آنگاه داریم:

$$L = 2\pi r = 2\pi(6) = 12\pi$$

و در نهایت :

$$\theta = \frac{L}{d} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6}{5}\pi \text{ rad}$$



تمرین ۲۳: ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل

مقابل در نظر بگیرید که در فاصله‌ی تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره‌ی زمین قرار دارد. این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B که با مرکز زمین زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد، رصد می‌شود. تعیین کنید که این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' تا B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

حل :

^۱. به ناحیه‌ی ای از دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است، قطاع گفته می‌شود.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{45}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{4} \rightarrow \angle \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\widehat{A'B'}}{6400 + 400} \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\widehat{A'B'}}{6800} \rightarrow \widehat{A'B'} = \frac{6800 \cdot \pi}{4} \approx 5338 \text{ km}$$

جدول مقادیر نسبت‌های مثلثاتی تعدادی از زاویه‌ها

الف) زاویه‌های مهم

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	نامعین	
cot	نامعین	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	

تمرین ۲۴: مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A = 2 \sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + 4 \sin \frac{\pi}{2}$$

ب) زاویه‌های مرزی

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	۱	۰	-۱	۰	
cos	۱	۰	-۱	۰	۱	
tan	۰	نامعین	۰	نامعین	۰	
cot	نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین	

تمرین ۲۵ : مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$B = \sin \frac{\pi}{2} \cos \pi - 2 \tan \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \tan 2\pi + 4 \sin \frac{3\pi}{2}$$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

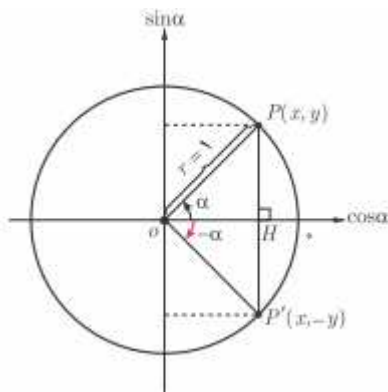
استان خوزستان

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

در این درس با معرفی روابط جدید، تلاش می کنیم که مقدار نسبت های مثلثاتی برخی از زاویه ها را به کمک مقدار نسبت های مثلثاتی زاویه هایی که قبلاً با آنها آشنا شده ایم، محاسبه نماییم.

قسمت اول : نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

اگر α یک زاویه روی دایره ی مثلثاتی باشد، $-\alpha$ قرینه ی آن است. با توجه به شکل مقابل بین نسبت های مثلثاتی زاویه ی α و قرینه ی آن یعنی $-\alpha$ رابطه ی زیر وجود دارد.



$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$$

تمرین ۱ : نسبت های مثلثاتی زاویه ی -30° درجه را به دست آورید.

تمرین ۲ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\cos(-\frac{\pi}{3}) \times \cos(-\frac{\pi}{6}) + \tan(-\frac{\pi}{4}) =$

ب) $\frac{\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)} =$

ج) $\cot(-\frac{\pi}{6}) + \tan(-\frac{\pi}{3}) =$

د) $\cos(-45^\circ) \times \cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-60^\circ) =$

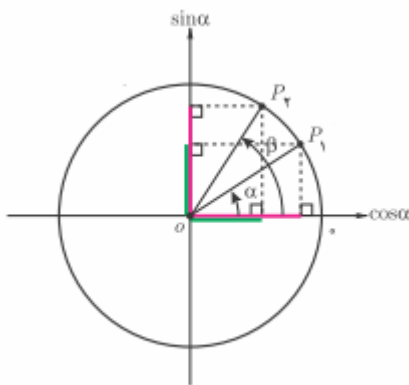
قسمت دوم : نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم

دو زاویه را متمم گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها ۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد.^۱ اگر α و β دو زاویه‌ی

متمم باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و متمم آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan(\alpha)$$

تمرین ۳ : متمم زاویه های زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{\pi}{7}$ ب) -25°

تمرین ۴ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sin 72^\circ = \cos(\quad)$ ب) $\tan \frac{5\pi}{14} = \cot(\quad)$

تمرین ۵ : اگر $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ، حاصل تساوی زیر را تعیین کنید.

$\cos(75^\circ) =$

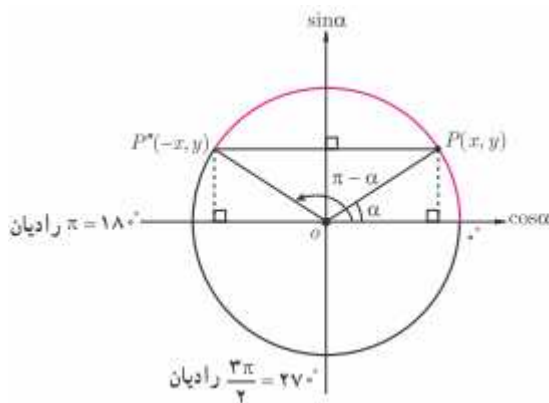
^۱. و به طور کلی مجموع آنها $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ رادیان باشند.

قسمت سوم : نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

دو زاویه را مکمل گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها ۱۸۰ درجه یا π رادیان^۲ باشد. اگر α و β دو زاویه‌ی مکمل باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha + \beta = \pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \pi - \alpha$$

بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و مکمل آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$$

تمرین ۸ : مکمل هر یک از زاویه های زیر را مشخص کنید.

الف) 75°

ب) 25°

ج) $\frac{\pi}{12}$

د) $-\frac{\pi}{4}$

تمرین ۹ : حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\tan \frac{2\pi}{3} =$

ت) $\cot(-120^\circ) =$

ب) $\cos \frac{3\pi}{4} =$

ث) $\cos(135^\circ) =$

پ) $\sin 120^\circ =$

تمرین ۱۰ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{5\pi}{6}$ رادیان را به دست آورید.

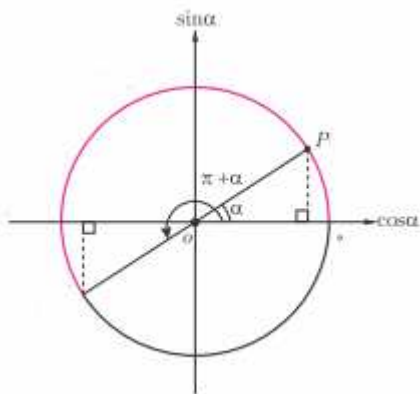
^۲. و به طور کلی مجموع آنها $2k\pi + \pi$ رادیان باشند.

قسمت چهارم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف π رادیان

اگر دو زاویه α و β طوری باشند که اختلاف آنها 180° درجه یا π رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta - \alpha = \pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \pi + \alpha$$

لذا می توان رابطه ی زیر را نوشت :



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$$

تمرین ۱۱ : حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\cot \frac{5\pi}{4} =$

ب) $\cos(-\frac{4\pi}{3}) =$

پ) $\sin 225^\circ =$

ت) $\tan(225^\circ) =$

ث) $\sin(-\frac{7\pi}{6}) =$

تمرین ۱۲ : نسبت های مثلثاتی زاویه ی $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را به دست آورید.

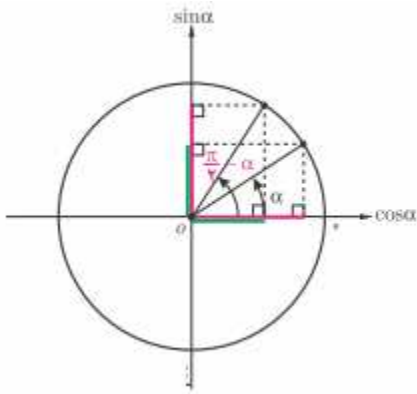
قسمت پنجم: نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها ۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان شود. در این صورت می توان

نوشت، $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan(\alpha)$$

تمرین ۱۳: حاصل تساوی زیر را تعیین کنید.

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

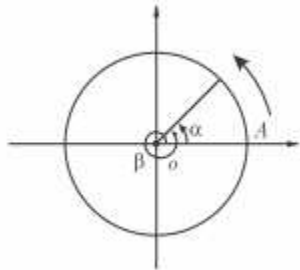
تمرین ۱۴: نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۳۵ درجه را به دست آورید.

قسمت ششم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با مجموع یا تفاضل 2π رادیان

اگر دو زاویه α و β طوری باشند که اختلاف آنها 360° درجه یا 2π رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta - \alpha = 2\pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = 2\pi + \alpha$$

لذا می توان رابطه ی زیر را نوشت :



$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$$

تمرین ۱۵ : حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\sin(405^\circ) =$

ب) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

روش سریع محاسبه ی نسبت های مثلثاتی

بر اساس آنچه که داشتیم ، می توان روابط دیگری را بررسی کرد که به طور مختصر این روابط را به شکل زیر عنوان می کنیم.

الف) اگر زاویه ی مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

ب) در نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس می توان مضربهای زوج π را حذف کرد ولی اگر مضربهای فرد π را حذف کنیم، باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(3\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(3\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha$$

ج) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضربهای صحیح π را می توان حذف کرد.

مثلاً:

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(3\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

د) در تمام نسبت های مثلثاتی می توان $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را حذف کرد ولی پس از حذف باید:

۱. سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تغییر داد و برعکس

۲. با فرض حاده بودن زاویه α ، ربعی که زاویه‌ی مثلثاتی در آن واقع است را روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا

کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده و جلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha \quad \text{ربع دوم}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \text{ربع سوم}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha \quad \text{ربع اول}$$

توجه ۱: اگر $n \in N$ آنگاه همواره داریم:

$$\sin(n\pi + \alpha) = (-1)^n \sin \alpha$$

$$\tan(n\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cos(n\pi + \alpha) = (-1)^n \cos \alpha$$

$$\cot(n\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

توجه ۲: با توجه به قواعد بالا همواره داریم.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

تمرین ۱۶: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\tan ۱۲۰^\circ =$

۴) $\cos(-۱۵۰^\circ) =$

۲) $\cos(۱۳۵^\circ) =$

۵) $\sin\left(\frac{۱۳\pi}{۲} - \alpha\right) =$

۳) $\cot(۲۱۰^\circ) =$

۶) $\sin(\alpha - ۳\pi) =$

تمرین ۱۷: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt{۲} \sin(۱۳۵^\circ) + \cot(۳۰^\circ) \cdot \cos(۲۱۰^\circ) - \tan(-۱۳۵^\circ) = -\frac{۳}{۲}$$

تمرین ۱۸: در تساوی زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

$$\sin(x) = \cos(۱۰^\circ + x)$$

حل: دو زاویه باید متمم همدیگر باشند. پس:

$$x + ۱۰ + x = ۹۰ \rightarrow ۲x = ۸۰ \rightarrow x = ۴۰$$

تمرین برای حل:

۱۹: مقدار دقیق عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) =$

ب) $\tan\left(\frac{۱۱}{۶}\pi\right) =$

ج) $\cos\left(\frac{۲۵\pi}{۳}\right) =$

۲۰: نشان دهید که $\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) + \cos(\pi - \theta) = ۰$

۲۱: مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\tan(-۳۰^\circ) \cot(۱۵۰^\circ) - \tan(۱۳۵^\circ) =$

ب) $\frac{\sin(۲۴۰^\circ) \times \cos(۱۲۰^\circ) + \cos(-۲۷۰^\circ) \times \sin(۳۰^\circ)}{\cos(۲۲۵^\circ) \times \cos(-۱۳۵^\circ) + \tan(۴۵^\circ)} =$

۲۲: حاصل $\tan(۲۰^\circ) + \tan(۴۰^\circ) + \tan(۶۰^\circ) + \dots + \tan(۱۸۰^\circ)$ را به دست آورید.

۲۳: حاصل $\frac{\sin(30^\circ)}{1 - \cos(24^\circ)}$ را به دست آورید.

۲۴: مقدار عددی عبارت مقابل را تعیین کنید.

$$A = \frac{\cos(24^\circ) + \sin(-15^\circ)}{\tan(-45^\circ)}$$

۲۵: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(x - 2\pi) \times \sin(x - \pi) + \tan(-x) \times \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$$

ب) $3 \sin(7^\circ) + \sin(55^\circ) + \cos(215^\circ) + 2 \cos(16^\circ) = \cos(2^\circ)$

۲۶: رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\sin(23^\circ) - 2 \sin(14^\circ) + \sin(41^\circ) + \cos(-5^\circ) + \sin(4^\circ) = 0$$

۲۷: آیا دو زاویه می توان یافت که سینوس یکسان داشته باشند؟ چرا؟ برای کسینوس چطور؟

۲۸: درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

۱) $\sin(84^\circ) = \sin(6^\circ)$

۵) $\cos \alpha + \cos(\pi - \alpha) = 0$

۲) $\cos(-324^\circ) = \cos(36^\circ)$

۶) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \alpha = 1$

۳) $\tan(-100^\circ) = \tan(8^\circ)$

۷) $\cos(7) = \cos(-7)$

۴) $\sin(875^\circ) = \sin(155^\circ)$

۸) $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

۲۹: در تساوی های زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

الف) $\sin(x) = \cos(2^\circ + x)$

ب) $\tan\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{9} + x\right)$

درس سوم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با برخی از اتحاد های مهم مثلثاتی از جمله اتحاد های زیر آشنا شده اید.

۱. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	۳. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	۵. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
۲. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	۴. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	۶. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

نتیجه : اگر α یک زاویه دلخواه باشد. در این صورت:

الف) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

ب) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

ج) $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

د) $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

در این درس، نسبت های مثلثاتی زاویه هایی که به صورت مجموع یا تفاضل دو زاویه نوشته می شوند (که زاویه های مرکب نیز گفته می شوند)، بر حسب نسبت های مثلثاتی آن دو زاویه را محاسبه می کنیم.

قسمت اول : محاسبه ی نسبت های مثلثاتی زاویه های مجموع و تفاضل دو زاویه

برای هر دو زاویه β و α ثابت می شود که :

۱) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

۲) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$

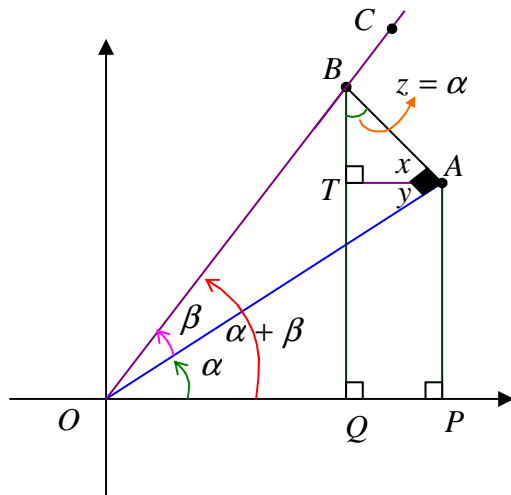
۳) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

۴) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$

۵) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

۶) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

تمرین ۱: رابطه‌های فوق را ثابت کنید.



اثبات: فرض کنید که نیم خط OA با محور طول‌ها زاویه‌ی α و با نیم خط OC زاویه‌ی β بسازند. از A بر OA عمودی خارج می‌کنیم تا OC را در نقطه‌ی B قطع کند. از A عمود AP و از B عمود BQ را بر محور طول‌ها رسم می‌کنیم. همچنین از A عمود AT را بر BQ فرود می‌آوریم.

$$\begin{cases} AT \perp BQ \\ BQ \perp OP \end{cases} \rightarrow AT \parallel OP \rightarrow \alpha = y \xrightarrow{x+y=90, z+x=90} y = z = \alpha$$

حال چون چهار ضلعی $ATQP$ مستطیل است، پس $TQ = AP$

همچنین

$$\Delta OBQ : \sin(\alpha + \beta) = \frac{BQ}{OB}$$

$$\Delta ABT : \cos \alpha = \frac{BT}{AB} \rightarrow BT = AB \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta OAP : \sin \alpha = \frac{AP}{OA} \rightarrow AP = OA \cdot \sin \alpha$$

$$\Delta OAB : \sin \beta = \frac{AB}{OB}$$

$$\Delta OAB : \cos \beta = \frac{OA}{OB}$$

لذا در نهایت داریم:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{BQ}{OB} = \frac{BT + TQ}{OB} = \frac{BT + AP}{OB} = \frac{AB \cdot \cos \alpha + OA \cdot \sin \alpha}{OB} \\ &= \frac{AB \cdot \cos \alpha}{OB} + \frac{OA \cdot \sin \alpha}{OB} = \frac{AB}{OB} \cdot \cos \alpha + \frac{OA}{OB} \cdot \sin \alpha = \sin \beta \cdot \cos \alpha + \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

به روش مشابه داریم:

$$\Delta OBQ : \cos(\alpha + \beta) = \frac{OQ}{OB}$$

$$\Delta ABT : \sin \alpha = \frac{AT}{AB} \rightarrow AT = AB \cdot \sin \alpha$$

$$\Delta OAP : \cos \alpha = \frac{OP}{OA} \rightarrow OP = OA \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta OAB : \cos \beta = \frac{OA}{OB}$$

$$\Delta OAB : \sin \beta = \frac{AB}{OB}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OQ}{OB} = \frac{OP - QP}{OB} = \frac{OP - AT}{OB} = \frac{OA \cdot \cos \alpha - AB \cdot \sin \alpha}{OB}$$

$$= \frac{OA \cdot \cos \alpha}{OB} - \frac{AB \cdot \sin \alpha}{OB} = \frac{OA}{OB} \cdot \cos \alpha - \frac{AB}{OB} \cdot \sin \alpha = \cos \beta \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

اثبات قسمت های دیگر نیز به سادگی و به کمک دو تساوی اثبات شده در فوق انجام می گیرد.

اثبات بند ۲

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

اثبات بند ۴

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta))$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

اثبات بند ۵

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

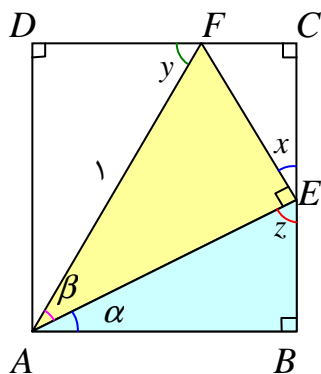
$$= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

اثبات بند ۶

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(-\beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$



اثبات دیگر: در شکل روبرو، مثلث AEF ، یک مثلث قائم الزاویه به طول وتر یک است. از رأس های این مثلث خطوطی چنان رسم شده است که چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل شود. در این صورت چون زاویه-ی BEC یک زاویه ی نیم صفحه است، پس:

$$x + 90 + z = 180 \quad (1)$$

همچنین در مثلث ABE داریم:

$$\alpha + 90 + z = 180 \quad (2)$$

از تساوی های (۱) و (۲) می توان نتیجه گرفت:

$$x = \alpha$$

اضلاع AB و DC با هم موازی و پاره خط AF به صورت مورب آن قطع کرده است. لذا:

$$\angle DFA = \angle FAB$$

یعنی

$$y = \alpha + \beta$$

از طرفی با توجه به این شکل خواهیم داشت:

$$\Delta(ADF): \begin{cases} \sin y = \frac{AD}{AF} \xrightarrow{y=\alpha+\beta, AF=1} \sin(\alpha + \beta) = AD \\ \cos y = \frac{DF}{AF} \xrightarrow{y=\alpha+\beta, AF=1} \cos(\alpha + \beta) = DF \end{cases}$$

$$\Delta(AEF): \begin{cases} \sin \beta = \frac{EF}{AF} \xrightarrow{AF=1} \sin \beta = EF \\ \cos \beta = \frac{AE}{AF} \xrightarrow{AF=1} \cos \beta = AE \end{cases}$$

$$\Delta(ABE): \begin{cases} \sin \alpha = \frac{BE}{AE} \xrightarrow{AE=\cos \beta} \sin \alpha = \frac{BE}{\cos \beta} \rightarrow BE = \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ \cos \alpha = \frac{AB}{AE} \xrightarrow{AE=\cos \beta} \cos \alpha = \frac{AB}{\cos \beta} \rightarrow AB = \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{cases}$$

$$\Delta(ECF): \begin{cases} \sin x = \frac{CF}{EF} \xrightarrow{EF=\sin \beta} \sin \alpha = \frac{CF}{\sin \beta} \rightarrow CF = \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos x = \frac{EC}{EF} \xrightarrow{EF=\sin \beta} \cos \alpha = \frac{EC}{\sin \beta} \rightarrow EC = \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{cases}$$

در نهایت با توجه به اینکه چهارضلعی $ABCD$ مستطیل می باشد. نتیجه می شود که :

$$AD = BE + EC \rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$DF = AB - CF \rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

تمرین ۲: تساوی های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\sin(75^\circ) =$

۳) $\sin(15^\circ) =$

۲) $\cos(75^\circ) =$

۴) $\cos(15^\circ) =$

تمرین ۳: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sin(x - 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 0$$

تمرین ۴: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{\sin(23^\circ)\cos(27^\circ) + \cos(23^\circ)\sin(27^\circ)}{\cos(23^\circ)\cos(17^\circ) - \sin(23^\circ)\sin(17^\circ)}$$

حل :

$$A = \frac{\sin(23^\circ + 27^\circ)}{\cos(23^\circ + 17^\circ)} = \frac{\sin(50^\circ)}{\cos(40^\circ)} = 1$$

تمرین ۵: ثابت کنید که $\sin 50^\circ + \sqrt{3} \cos 50^\circ = 2 \cos 20^\circ$

حل :

$$\begin{aligned} \sin 50^\circ + \sqrt{3} \cos 50^\circ &= \sin 50^\circ + \tan 60^\circ \cdot \cos 50^\circ \\ &= \sin 50^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cos 50^\circ = \frac{\sin 50^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 50^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \\ &= \frac{\sin(50^\circ + 60^\circ)}{\cos 60^\circ} = \frac{\sin 110^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + 20^\circ)}{\frac{1}{2}} = \frac{\cos 20^\circ}{\frac{1}{2}} = 2 \cos 20^\circ \end{aligned}$$

قسمت دوم : نسبت های مثلثاتی زاویه های دو برابر و سه برابر کمان

$$۱) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$۲) \cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$۳) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$۴) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$۵) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$۶) \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

تمرین ۶ : رابطه های فوق را ثابت کنید.

: ۱

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

: ۲

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

: ۳

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

: ۴

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 2 \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

: ۵

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

: ۶

$$\begin{aligned} \tan 3\alpha &= \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \left(\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}\right) \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \left(\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}\right) \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha + \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha (3 - \tan^2 \alpha)}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

تمرین ۷: به کمک نسبت های مثلثاتی زاویه ی ۶۰ درجه تساوی های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin(120^\circ) =$ ب) $\cos(120^\circ) =$

تمرین ۸: تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ ج) $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

ب) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ د) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

تمرین برای حل :

۹: تساوی های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\sin \frac{\pi}{12} =$ ۲) $\tan(105^\circ) =$ ۳) $\cot(105^\circ) =$

۱۰: تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cdot \cos b$

ب) $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos a \cdot \cos b$

۱۱: اگر z و y و x سه زاویه ی یک مثلث باشند، ثابت کنید که

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$$

۱۲: اگر α زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع سوم دایره ی مثلثاتی باشند و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin(\alpha + \beta) =$

ج) $\tan(\alpha + \beta) =$

ب) $\cos(\alpha - \beta) =$

د) $\cot(\alpha + \beta) =$

۱۳ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$

ب) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

ج) $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \cdot \sin(x - y)$

د) $\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x + y) \times \cos(x - y)$

۱۴ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A = \frac{\cos(20^\circ)\cos(40^\circ) - \sin(20^\circ)\sin(40^\circ)}{\sin(20^\circ)\cos(40^\circ) + \cos(20^\circ)\sin(40^\circ)}$$

۱۵ : مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x = \frac{\pi}{15}$ را محاسبه کنید.

$$A = \sin^3 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^3 x$$

۱۶ : حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \sin(15^\circ) - \sqrt{3} \cos(15^\circ)$$

۱۷ : اگر α زاویه ای در ربع دوم دایره ی مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin(2\alpha) =$

ب) $\cos(2\alpha) =$

۱۸ : عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

ب) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

ج) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

۱۹ : حاصل عبارت زیر را به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ بیابید.

$$A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$$

۲۰: تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

ب) $\sin 4\theta = 4 \sin \theta \cos^3 \theta - 4 \sin^3 \theta \cos \theta$

ج) $\sin 4\theta = 8 \sin \theta \cos^3 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta$

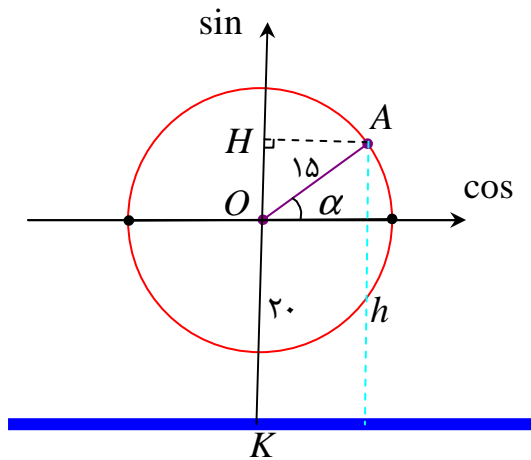
د) $\sin^2(45 + \alpha) - \sin^2(45 - \alpha) = \sin 2\alpha$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس چهارم : توابع مثلثاتی



قبل از ورود به بحث توابع مثلثاتی، مثال زیر را حل می کنیم.

یک شهر بازی چرخ و فلکی دارد که شعاع دایره‌ی آن ۱۵ متر است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ و فلک تا سطح زمین ۲۰ متر است. واضح است که ارتفاع هر کابین مانند کابین A با تغییر زاویه‌ی α تغییر می کند و برای ارتفاع کابین می توان نوشت:

$$\sin \alpha = \frac{OH}{OA} \rightarrow OH = OA \cdot \sin \alpha = 15 \sin \alpha$$

$$h = KH = OK + OH = 20 + 15 \sin \alpha$$

$$\rightarrow h = 20 + 15 \sin \alpha$$

هر تابع مشابه تابع فوق را یک **تابع مثلثاتی** می نامند. با توجه به این تابع به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف: ارتفاع کابین را وقتی که $\alpha = 120^\circ$ را به دست آورید.

ب : مقدار حداقلی و مقدار حداکثری ارتفاع کابین را تعیین کنید.

ج : تعیین کنید، که زاویه‌ی α چقدر باشد تا ارتفاع کابین ۲۰ متر شود.

قسمت اول : توابع مثلثاتی

هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گویند. تابع های $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$

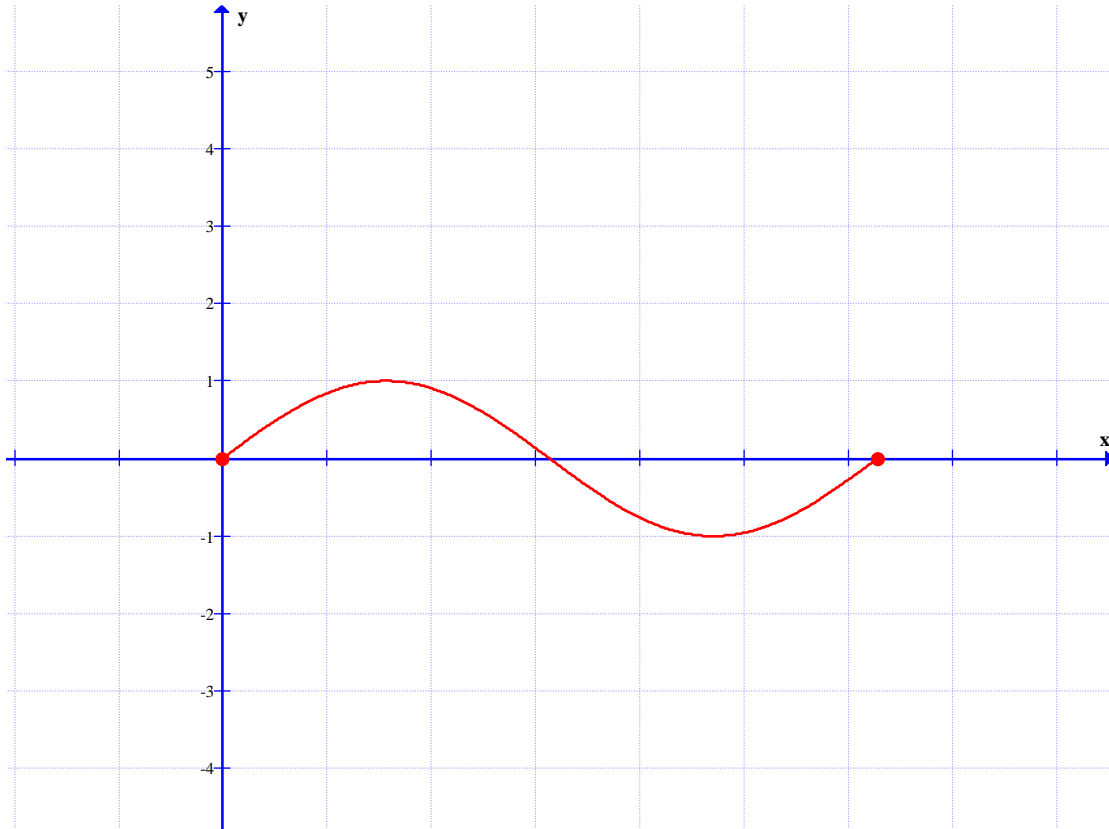
ساده ترین تابع های مثلثاتی هستند. برای رسم نمودار چنین توابعی ساده ترین روش، انتخاب چند نقطه به

کمک معادله و پیدا کردن آنها روی دستگاه مختصات (روش نقطه یابی) می باشد.

مثال ۱ : نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

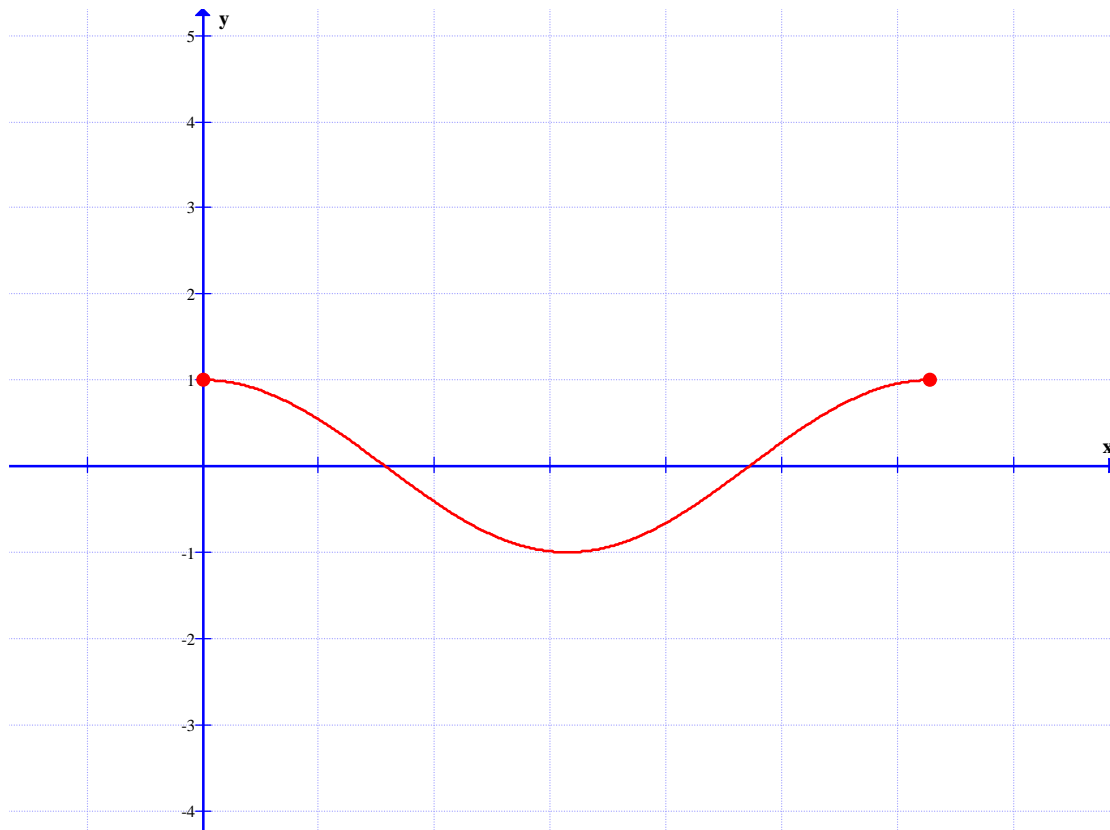
x	\cdot	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	\cdot	1	\cdot	-1	\cdot



مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = \cos x$ را در فاصله ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

حل: ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله ی داده شده، انتخاب می کنیم.

x	\cdot	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	\cdot	-1	\cdot	1



تمرین ۱ : نمودار تابع های $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ را در فاصله ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

قسمت دوم : توابع مثلثاتی

در ادامه به بررسی خواص این توابع می پردازیم.

خاصیت ۱ : مقدار حداکثری (max) تابع های $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ برابر ۱ و مقدار

حداقلی (min) آنها برابر -۱ می باشد.

خاصیت ۲ : دامنه ی تابع های $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آنها

بازه ی $[-1, 1]$ می باشد.

خاصیت ۳ : تابع $f(x) = \sin x$ از مبدأ مختصات می گذرد، ولی تابع $f(x) = \cos x$ از نقطه ی $(0, 1)$

می گذرد.

خاصیت ۴ : این دو تابع متناوب هستند. یعنی در فواصل معینی نمودار آنها تکرار می شود. طول هر یک از

این فاصله ها را دوره ی تناوب می نامند. دوره ی تناوب این دو تابع $T = 2\pi$ می باشد.

تمرین ۲: مقدار تابع $f(x) = 2 \sin 3x$ را در نقطه ی $x = \frac{\pi}{4}$ بدست آورید.

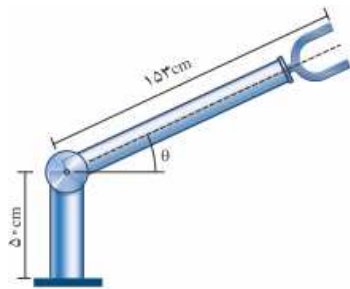
تمرین ۳: مقدار تابع $f(x) = -2 \sin(\pi - x)$ را در نقطه ی $x = \frac{\pi}{6}$ بدست آورید.

تمرین ۴: مقدار تابع زیر را در نقطه ی $x = \frac{\pi}{6}$ را به دست آورید.

$$f(x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

تمرین ۵: مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 3 + 2 \sin x$$



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

تمرین ۶: روبات ها در زمینه های مختلف کاربرد دارند. در طراحی

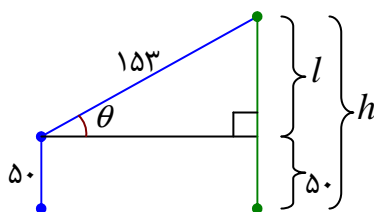
انواع روبات ها از توابع مثلثاتی استفاده می شود. در شکل روبرو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودرو سازی کاربرد دارد، مشاهده می

کنید. با توجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیره ی روبات را از

سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل سازی کنید.

حل: با توجه به شکل مقابل که با توجه به وضعیت روبات ترسیم

شده است، داریم.



$$\sin \theta = \frac{l}{153} \rightarrow l = 153 \sin \theta$$

لذا تابع ارتفاع نوک گیره روبات به شکل زیر است.

$$h = 50 + l = 50 + 153 \sin \theta$$

تمرین برای حل:

۷: مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 3 - 5 \cos x$$

۸: مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 7 + 2 \sin x$$

۹: درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

الف) تابع $y = \sin x$ یعنی سینوس زاویه ای از دایره‌ی مثلثاتی که اندازه‌ی x درجه باشد.

ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است.

پ) $\cos 3 = \cos(3^\circ)$

ت) اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $0 < \cos x < 1$ است.

ث) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است.

ج) عددی می توان یافت که سینوس آن برابر -2 باشد.

ح) حداکثر مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است.

خ) حداقل مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ است.

۱۰: جملات زیر را در مورد توابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ کامل کنید.

الف) دامنه‌ی تابع سینوس مجموعه‌ی و برد آن مجموعه‌ی است.

ب) دامنه‌ی تابع کسینوس مجموعه‌ی و برد آن مجموعه‌ی است.

پ) مقدار تابع سینوس در طول های $x = k\pi$ ($k \in Z$)، برابر است.

ت) مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول های برابر با صفر است.

ث) حداکثر مقدار تابع کسینوس است که در نقاطی به طول های $x = 2k\pi$ ($k \in Z$) است.

ج) حداقل مقدار تابع کسینوس است که در نقاطی به طول های به دست می آید.

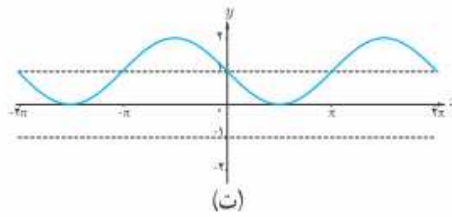
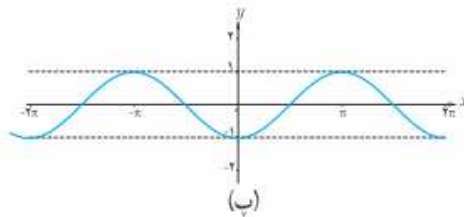
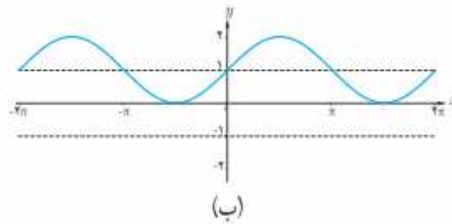
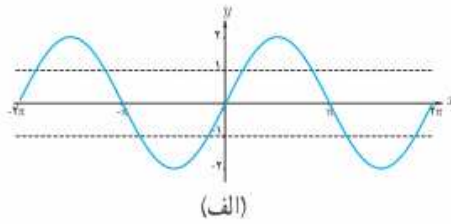
۱۱: هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام تابع است.

۱) $y = 2 \sin x$

۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

۳) $y = \sin x + 1$

۴) $y = -\sin x + 1$

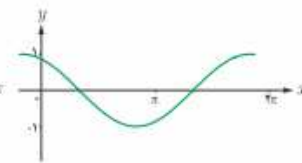
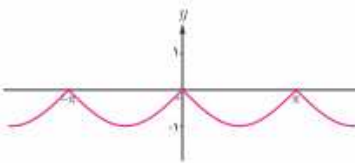
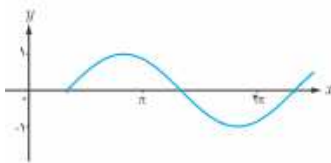


۱۲: توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$

ج) $y = -|\sin x|$



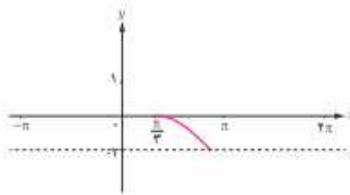
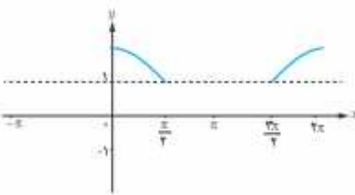
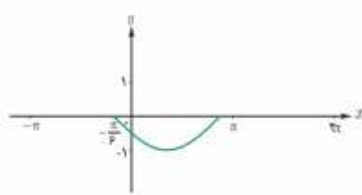
۱۳: در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده،

توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$

ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

ج) $y = 1 + |\cos x|$



۱۴: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = 3 \cos x$

۳) $y = 2 \sin x - 1$

۵) $y = -\sin x$

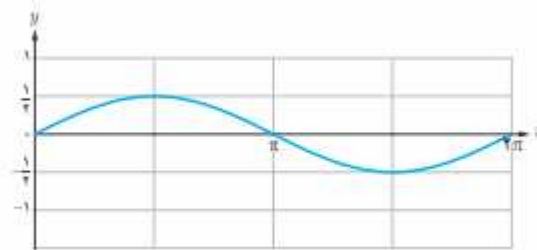
۲) $y = 1 + \sin x$

۴) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

۶) $y = |\sin x|$

۱۵: با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست اند؟

الف: شکل زیر نمودار تابع $y = \frac{1}{2} \sin x$ را نشان می دهد.



ب: شکل زیر نمودار تابع $y = \cos x - \frac{1}{2}$ را نشان می دهد.

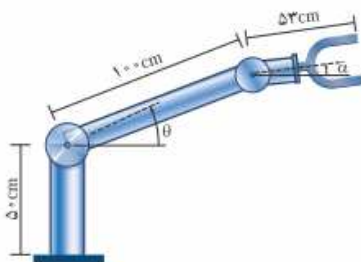


پ: برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است، نمودار تابع سینوس را به اندازه ی یک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.

ت: برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است، نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

۱۶: در طراحی روبات های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت

روبات ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبرو در نظر می گیرند.



الف: ارتفاع نوک گیره ی این روبات را از سطح زمین بر اساس توابع از زاویه های θ و α مدل سازی کنید.

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ و } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

ب : فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $۲۳/۵$ سانتی متر ، مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -۳۰$ درجه قرار داده است. تعیین کنید زاویه ی θ در این وضعیت چند درجه است؟

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان