

# فصل ۱

## آمار و احتمال

بنویسید، زیرا شما نمی‌توانید چیز با نگرش دانش را حفظ و از

آن نگهداری کنید. امام صادق (ع)

تمرین ۱: فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره روان شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روانشناسی یا تعلیم و تربیت مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

حل: واضح است که او می تواند یکی از ۳۰ کتاب روان شناسی یا ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند بنابراین تعداد انتخاب ها :

$$30 + 25 = 55$$

تمرین ۲: خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (س) است. او می تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود.

الف) خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟

ب) همه حالت های ممکن را که او می تواند به صورت رایگان یا پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید.

حل الف: واضح است که او می تواند یکی از ۲ راه رایگان یا ۳ راه پرداخت هزینه را انتخاب کند. بنابراین تعداد انتخاب ها:

$$2 + 3 = 5$$

حل ب: { سرویس بیمارستان، پیاده روی، تاکسی، اتوبوس، مترو }

**اصل جمع:** اگر کاری را بتوان به دو روش مجزا انجام داد، طوری که در روش اول  $m$  انتخاب و در روش دوم  $n$  انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر  $m + n$  روش وجود دارد.

به عبارت دیگر: اگر بتوان عملی را به  $m$  طریق و عمل دیگری را به  $n$  طریق انجام داد، و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به  $m + n$  طریق می توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)



**تمرین ۳ :** شخصی برای سفر از اهواز به مشهد در یک روز معین تابستان ، متوجه شد در این روز ۴ قطار متفاوت و ۳ پرواز متفاوت هواپیمای و ۲ اتوبوس متفاوت برای عزیمت به مشهد وجود دارد. تعداد حالت هایی که این شخص می تواند انتخاب کند را حساب کنید.



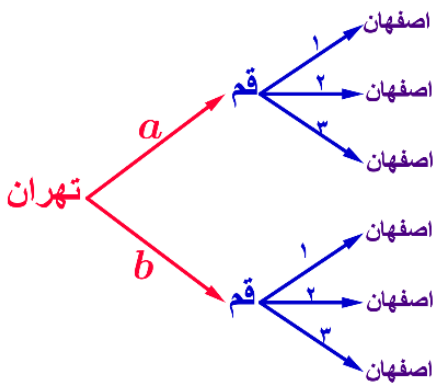
**تمرین ۴ :** امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران یا آب میوه فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود ، تنها یکی ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیبه را می تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از ۳ نوع آب میوه هویج ، سیب و پرتقال را می تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟



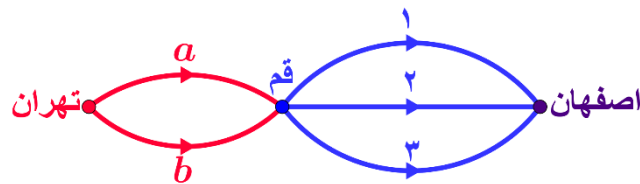
**تمرین ۵ :** شما به چند طریق می توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس را از بین چهار خودکار با رنگ های مختلف و پنج مداد با رنگ های متفاوت و سه روان نویس با رنگ های متمایز انتخاب کنید؟



**تمرین ۶ :** شخصی می خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد که از قم عبور کند. اگر از شهر تهران به قم ۲ مسیر (به نام های  $a$  و  $b$ ) و از قم به اصفهان ۳ مسیر (به نام های ۱، ۲ و ۳) وجود داشته باشد. این شخص به چند طریق می تواند از تهران به اصفهان (به شرط گذر از قم) سفر کند؟



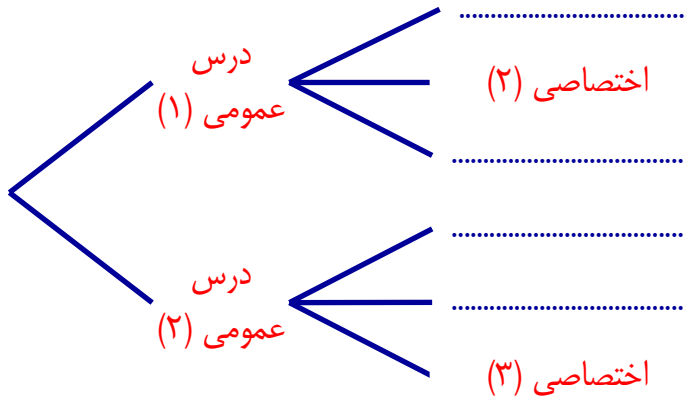
**حل :** به کمک شکل زیر می توان تعداد حالت های سفر از تهران به اصفهان را تعیین کرد.



به کمک رسم نمودار زیر می توان این نتیجه را نیز تأیید کرد. پنین نموداری را نمودار درختی می نامند. طبق این نمودار از تهران به اصفهان به شرط گذر از قم ۶ مسیر متفاوت وجود دارد.

تمرین ۷: فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟

حل: با کامل کردن نمودار زیر می توان به سؤال بالا پاسخ داد.



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی ..... راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به ..... = ..... × ..... طریق امکان پذیر است.



**اصل ضرب:** اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول  $m$  انتخاب و برای انجام هر کدام از این  $m$  انتخاب، در مرحله دوم  $n$  روش انجام وجود داشته باشد، در کل، کار مورد نظر با  $m \times n$  روش قابل انجام است.

به عبارت دیگر: اگر بتوان عملی را طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به  $m$  طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این  $m$  طریق به  $m$  روش انجام پذیر باشند، و در کل آن عمل از  $m \times n$  طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)



تمرین ۸: پشمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می کند. گل هایی که او در نظر دارد، عبارتند از: «مریم، گلایل، زنبق و رز». شیرینی هایی که او در نظر دارد، عبارتند از: «گردویی، نارگیلی و کشمش». او چند انتخاب دارد؟



**تمرین ۹:** مدیر عامل یک شرکت برای تصمیم گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام داران و هیئت امنای را در دو گروه A و B دسته بندی می کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می گیرند. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی و اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

**الف)** مدیر عامل به چند طریق می تواند فقط از یکی از اعضای این دو گروه مشورت بگیرد؟

**ب)** اگر مدیر عامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟



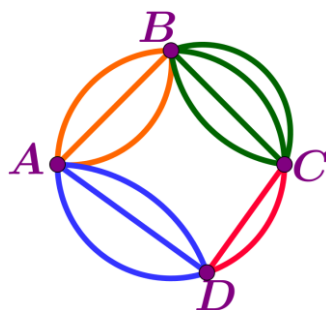
**تمرین ۱۰:** رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

**حل:** دو حرف اول و آخر فارسی و حرف وسط فارسی یا دو حرف اول و آخر انگلیسی و حرف وسط فارسی است.

$$\left. \begin{array}{l} 32 \times 26 \times 32 = \dots\dots\dots \\ 26 \times 32 \times 26 = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots + \dots\dots\dots =$$



**تمرین ۱۱:** مطابق شکل زیر میان چهار شهر A, B, C, D, E راه هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می توان:



**الف)** از شهر A به شهر C و B از طریق شهر سفر کرد؟

**حل:**  $A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} C \quad 3 \times 4 = 12$

**فصل ۱**



**۷**

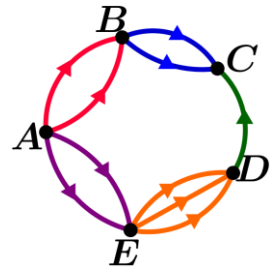
ب) از شهر A به شهر C شهر سفر کرد؟

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} C \quad 3 \times 4 = 12 \\ A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{2} C \quad 3 \times 2 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \times 4 + 3 \times 2 = 12 + 6 = 18 \quad \text{حل:}$$

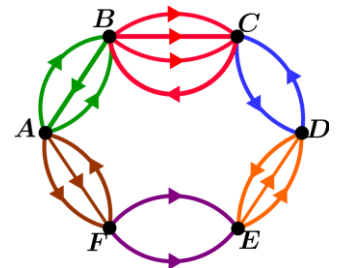
پ) از شهر B به شهر D شهر سفر کرد؟

$$\left. \begin{array}{l} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{3} D \quad 3 \times 3 = 9 \\ B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} D \quad 4 \times 2 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \times 3 + 4 \times 2 = 9 + 8 = 17 \quad \text{حل:}$$

تمرین ۱۲: اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهرهای A, B, C, D, E باشد و همه جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر C رفت؟



تمرین ۱۳: اگر شکل زیر نشان دهنده جاده های بین شهرهای A, B, C, D, E, F باشد و همه جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر D رفت؟



تمرین ۱۴: با حروف کلمه « خوزستان » چند کلمه سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می توان نوشت؟

## فاکتوریل

فرض کنید که  $n$  یک عدد صحیح نامنفی باشد. فاکتوریل  $n$  که با نماد  $n!$  نمایش داده می شود به شکل زیر تعریف می شود.

اگر  $n=0$  باشد. در این صورت  $0!=1$  اگر  $n=1$  باشد. در این صورت  $1!=1$

اگر  $n>1$  باشد. در این صورت  $n!$  برابر حاصل ضرب تمام اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی آن است.

$$n! = n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{یعنی:}$$

تمرین ۱۵: مانند نمونه، هر قسمت را کامل کنید.

الف)  $8! = 8 \times \overbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \dots \times 1}^{5!} = 8 \times 5! = 6!$

پ)  $10! =$                       ت)  $n! =$

تمرین ۱۶: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف)  $4! \times 2 = \overbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}^{4!} \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب)  $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times \overbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}^{3!}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!}} = 5 \times 4 = 20$

پ)  $\frac{10!}{7!} =$

ت)  $\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} =$

$$\text{ث) } \frac{12!}{8! \times 10} =$$

$$\text{ج) } \frac{n!}{(n-2)!} =$$

تمرین ۱۷: حاصل ضرب های زیر مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$\text{الف) } 9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$$

$$\text{ب) } 9 \times 8 \times 7 \times 6 =$$

$$\text{پ) } 11 \times 10 \times 9 =$$

$$\text{ت) } 8 =$$

$$\text{ث) } n(n-1) =$$

### جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می گوئیم.

تمرین ۱۸: اگر افراد  $A$ ،  $B$  و  $C$  بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

$A$  یا  $B$  یا  $C$

یکی از دو نفر باقی مانده

یک نفر باقی مانده

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

حل:

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن  $n$  شیء متمایز را یک جایگشت  $n$  تایی از آن  $n$  شیء می نامیم، و تعداد این جایگشت ها برابر است با  $n!$ .



تمرین ۱۹: ثابت کنید تعداد کل جایگشت های  $n$  تایی از  $n$  شیء متمایز، برابر است با  $n!$ .

حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم، برای مکان اول از سمت چپ (یا راست)  $n$  انتخاب داریم و برای مکان بعدی  $(n-1)$  انتخاب داریم و مکان بعدی  $(n-2)$  انتخاب و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابراین اصل ضرب، کل حالت ها برابر است با:

$n$ انتخاب	$(n-1)$ انتخاب	$(n-2)$ انتخاب	...	یک انتخاب باقی مانده
------------	----------------	----------------	-----	-------------------------

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 = n!$$



تمرین ۲۰: با ارقام ۲، ۷، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

یک رقم باقی مانده	یکی از رقم ۲ باقی مانده	یکی از رقم ۳ باقی مانده	یکی از رقم ۴ باقی مانده	یکی از رقم ۵ باقی مانده
-------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

حل:



تمرین ۲۱: ۸ نامه مختلف را به چند طریق می توان در ۸ پاکت مختلف قرار داد؟



تمرین ۲۲: با ارقام ۸، ۷، ۶، ۵، ۲ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۶۰۰ می توان نوشت؟



تمرین ۲۳: با حروف کلمه «دیرستان» بدون تکرار حروف،

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به شرط آنکه حرف اول ی باشد.

ب) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به شرط آنکه حرف اول ی نباشد.

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به شرط آنکه حرف اول ی و حرف آخر ت باشد.

تمرین ۲۴: با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵

الف) چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می توان نوشت؟

حل:

یکی از رقم ۵ که صفر نیست	یکی از رقم ۵ باقی مانده	یکی از رقم ۴ باقی مانده	یکی از رقم ۳ باقی مانده	یکی از رقم ۲ باقی مانده
--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5 \times 5! = 600$$

ب) چند عدد پنج رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

حل:

یکی از رقم ۴ که صفر نیست	یکی از رقم ۴ باقی مانده	یکی از رقم ۳ باقی مانده	یکی از رقم ۲ باقی مانده	یکی از رقم ۳ فرد
--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	------------------

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 288$$

پ) چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

حل:

روش اول (غیر مستقیم): تعداد اعداد پنج رقمی فرد - تعداد ارقام پنج رقمی = تعداد اعداد پنج رقمی زوج

$$600 - 288 = 312 = \text{تعداد اعداد پنج رقمی زوج}$$

روش دو ۴ (مستقیم): اعداد زوج را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم آنهایی که یکانشان صفر است و آنهایی که یکانشان اعداد زوج غیر صفر است.

یکان صفر باشد	یکی از ۲ رقم باقی مانده	یکی از ۳ رقم باقی مانده	یکی از ۴ رقم باقی مانده	یکی از ۵ رقم که صفر نیست
۱	۲	۳	۴	۵

$$= 120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

یکی از ۲ رقم زوج غیر صفر	یکی از ۲ رقم باقی مانده	یکی از ۳ رقم باقی مانده	یکی از ۴ رقم باقی مانده	یکی از ۴ رقم که صفر نیست
۲	۲	۳	۴	۴

$$= 192 = 2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4$$

۳۱۲ عدد زوج می‌توان ساخت

$$= 312 = 120 + 192 = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2)$$

پ) چند عدد پنج رقمی و مضرب پنج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟



تمرین ۲۵ : با ارقام ۰, ۶, ۹, ۷

الف) چند عدد سه رقمی (با تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟



تمرین ۲۶: با ارقام ۱ تا ۷ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست).



تمرین ۲۷: به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟



تمرین ۲۸: به چند طریق می توانیم ۳ شیء متمایز را از بین  $n$  شیء متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

حل: برای مکان اول از سمت چپ (یا راست)  $n$  انتخاب داریم و برای مکان بعدی  $(n-1)$  انتخاب داریم و مکان بعدی  $(n-2)$  انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت ها برابر است با:

$n$  انتخاب

$n-1$  انتخاب

$n-2$  انتخاب

$$n \times (n-1) \times (n-2) = n \times (n-1) \times (n-2)$$

حال می توانیم جواب  $n \times (n-1) \times (n-2)$  را طبق تمرین های قبلی به صورت زیر بنویسیم:

$$n \times (n-1) \times (n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$$

تمرین ۲۹: در حالت کلی نشان دهید تعداد انتخاب های  $r$  شیء متمایز را از بین  $n$  شیء متمایز ( $r \leq n$ )، که جا به جایی

شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد، برابر است با:  $\frac{n!}{(n-r)!}$

حل: برای مکان اول از سمت چپ (یا راست)  $n$  انتخاب داریم و برای مکان بعدی  $(n-1)$  انتخاب داریم و مکان بعدی  $(n-2)$  انتخاب و ... و آفرین مکان  $(n-r+1)$  داریم و بنابراین اصل ضرب، کل حالت ها برابر است با:

$$\boxed{n} \times \boxed{(n-1)} \times \boxed{(n-2)} \times \dots \times \boxed{(n-r+1)}$$

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$$

حال می توانیم جواب  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$  را طبق تمرین های قبلی به صورت زیر بنویسیم:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

## جایگشت $r$ شیء از $n$ شیء

تعداد جایگشت های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب های  $r$  شیء از بین  $n$  شیء متمایز را که ترتیب قرار گرفتن اشیا مهم باشد، با  $P(n, r)$  نمایش می دهیم و مقدار آن از دستور

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

زیر محاسبه می شود:

تمرین ۳۰: یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چین این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

حل: ۱۵

تمرین ۳۱: با ارقام ۱, ۲, ۴, ۶, ۷, ۸, ۹ چند عدد سه رقمی (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟



تمرین ۳۲: چند کلمه پنج حرفی با حروف عبارت «خوزستان پیروز» تشکیل می شود؟



تمرین ۳۳: از ۱۲ نفر کارمند یک اداره، به چند طریق می توان یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟



تمرین ۳۴: با استفاده از ۵ نقطه چند بردار می توان ساخت؟



تمرین ۳۵: تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی از مجموعه  $A = \{1, 2, 4, 6\}$  را به دست آورید.

**حل:** فرض کنید بفواهیم از میان ارقام ۱, ۲, ۴, ۶ سه رقم را انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، با به جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی را تولید نمی کند. و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت های سه تایی از ۴ رقم را بر ۶ تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱, ۲, ۴	۱, ۲, ۶	۱, ۴, ۶	۲, ۴, ۶
بایگشت های سه رقم انتخاب شده	۱, ۲, ۴	۱, ۲, ۶	۱, ۴, ۶	۲, ۴, ۶
	۱, ۴, ۲	۱, ۶, ۲	۱, ۶, ۴	۲, ۶, ۴
	۲, ۴, ۱	۲, ۶, ۱	۶, ۱, ۴	۶, ۲, ۴
	۲, ۱, ۴	۲, ۱, ۶	۶, ۴, ۱	۶, ۴, ۲
	۴, ۲, ۱	۶, ۲, ۱	۴, ۱, ۶	۴, ۲, ۶
	۴, ۱, ۲	۶, ۱, ۲	۴, ۶, ۱	۴, ۶, ۲
		$A_1 = \{1, 2, 4\}$	$A_2 = \{1, 2, 6\}$	$A_3 = \{1, 4, 6\}$

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$

## ترکیب $r$ شیء از $n$ شیء

تعداد انتخاب های  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با  $C_r^n = \binom{n}{r}$  نمایش می دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می شود:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

تمرین ۳۶: به چند طریق می توانیم سه کتاب از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوست خود هدیه بدهیم؟

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{3! \times \cancel{4!}} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

حل:

تمرین ۳۷: به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟



تمرین ۳۸: مجموعه ۸ عضوی  $A = \{a, b, c, d, e, p, m, h\}$  چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟



تمرین ۳۹: به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹ عددی پنج رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست).



تمرین ۴۰: در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟



تمرین ۴۱: در یک مسابقه شطرنج، ۵ شطرنج باز شرکت کرده اند. قرار است هر دو شطرنج باز یک بار با هم مسابقه بدهند. تعداد کل بازی ها چند تا است؟



تمرین ۴۲ : ۷ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارد:

الف) چند پاره خط مختلف می توان کشید که رئوس آن ها از بین ۷ نقطه انتخاب شده باشد؟

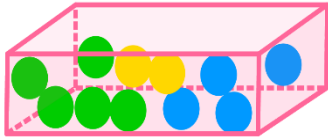
ب) چند مثلث می توان کشید که رئوس آن ها از بین ۷ نقطه انتخاب شده باشد؟

تمرین ۴۳ : به چند طریق می توان یک گروه ۷ نفری از بین ۵ زن و ۶ مرد تشکیل داد بطوری که :

الف) تعداد زن ها و مردها مهم نباشد.

ب) شامل ۴ زن و ۳ مرد باشد.

تمرین ۴۴ : از جعبه ای که شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم.  
مطلوب است احتمال آن که :

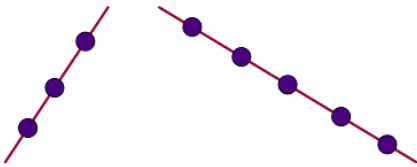


الف) هر ۳ مهره سبز باشند.

ب) هر ۳ مهره هم رنگ باشند.

پ) فقط ۲ مهره آبی باشد.

تمرین ۴۵ : هشت نقطه مطابق شکل روی دو خط قرار دارند. با این نقاط چند مثلث می توان رسم کرد.



پدیده هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت های ممکن در آنها اطلاع داریم.

تمرین ۴۶ :

- (الف) اگر تاسی را یک بار به هوا پرتاب کنیم پس از این که به زمین افتاد اعداد ..... را می بینیم .
- (ب) اگر سکه ای را یک بار به هوا پرتاب کنیم پس از این که به زمین افتاد ..... یا ..... سکه را می بینیم .
- (پ) قبل از تولد یک نوزاد برای جنسیت آن دو حالت ..... و ..... وجود دارد .

به پدیده ها یا آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می گویند.

در پدیده های تصادفی از همه نتیجه های ممکن اطلاع داریم اما اینکه کدام حالت قطعاً رخ می دهد، اطمینان نداریم.

به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می گوئیم.

تمرین ۴۷ : چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

حل: نتیجه یک مسابقه فوتبال، نتیجه یک امتحان، نتیجه یک پناستی، نتیجه یک قرعه کشی

به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش ها یا پدیده های قطعی می گوئیم.

تمرین ۴۸ : چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

هل: طلوع خورشید در پایان یک شب ، آمدن فصل بهار بعد از زمستان ، افتادن سیب بعد از جدا شدن از درخت



تمرین ۴۹ : کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

پ) مشاهده دو مهره سفید پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛

ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای پرتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟



تمرین ۵۰ : از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.

الف) آیا مجموعه دو عضوی { خودکار ، مداد } می تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟

ب) به نظر شما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

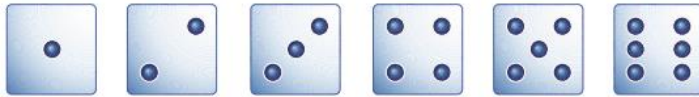
(اشیای مورد بحث را با شماره گذاری متمایز می کنیم.)



## فضای نمونه ای

مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه ای را تشکیل می دهد که به آن فضای نمونه ای می گوئیم و آن را با  $S$  نمایش می دهند.

مثال: در پرتاب یک تاس بعد از آن که به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت،



بنابراین، در پرتاب یک تاس فضای نمونه ای برابر است با:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

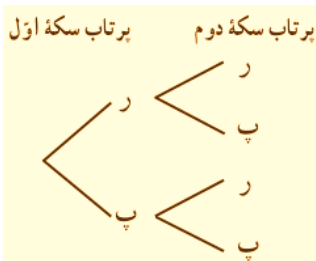
تمرین ۵۱: فضای نمونه ای هر یک از آزمایش های تصادفی زیر را بنویسید.

الف) پرتاب یک سکه



حل:  $n(S) = 2 \rightarrow S = \{پ, ر\}$

ب) پرتاب دو سکه هم زمان (یا یک سکه دو بار)



پ) پرتاب سه سکه هم زمان (یا یک سکه سه بار)

ت) پرتاب یک تاس و یک سکه همزمان



تمرین ۵۲: برای تعیین فضای نمونه پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)				
۳	(۳,۱)		(۳,۳)			
۴	(۴,۱)			(۴,۴)		
۵	(۵,۱)				(۵,۵)	
۶	(۶,۱)					(۶,۶)



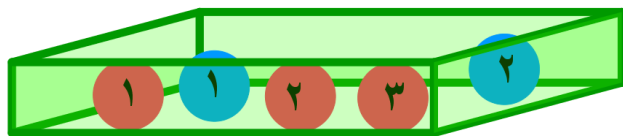
$$S = \{(1,1), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (2,6), (3,1), \dots, (3,6), (4,1), \dots, (4,6), (5,1), \dots, (5,6), (6,1), \dots, (6,6)\}$$

$$\rightarrow n(s) = 6 \times 6 = 36$$

تمرین ۵۳: سه دوست با نام های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

تمرین ۵۴: در جعبه ای ۳ مهره قرمز متفاوت (با شماره های ۱ تا ۳) و ۲ مهره آبی متفاوت (با شماره های ۱ و ۲) وجود دارد. تعداد حالت های ممکن در انتخاب ۳ مهره را حساب کنید. و فضای نمونه ای این آزمایش را بنویسید.

$$S = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$



حل:

$$S = \{(B_1, B_2, R_1), (B_1, B_2, R_2), (B_1, B_2, R_3), (B_1, R_1, R_2), (B_2, R_1, R_2), (B_1, R_1, R_3), (B_2, R_1, R_3), (B_1, R_2, R_3), (B_2, R_2, R_3), (R_1, R_2, R_3)\}$$

تمرین ۵۵: در کیسه ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.



## پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیر مجموعه در کلاس نهم آشنا شده اید. مجموعه  $A$  را زیر مجموعه  $B$  می گوئیم، هرگاه هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $B$  باشد؛ در این صورت می نویسیم:  $A \subseteq B$ .

برای مثال:  $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

و می دانیم  $A \subseteq A$  یعنی هر مجموعه ای زیر مجموعه خودش است و  $\emptyset \subseteq A$  یعنی مجموعه تهی زیر مجموعه همه مجموعه ها است.

تمرین ۵۶: تمام زیر مجموعه های  $A = \{a, b, c\}$  را بنویسید.

$$A_1 = \{ \} \quad A_2 = \{a\} \quad A_3 = \{b\} \quad A_4 = \{c\}$$

$$A_5 = \{a, b\} \quad A_6 = \{a, c\} \quad A_7 = \{b, c\} \quad A_8 = \{a, b, c\}$$

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای ( $S$ ) را **پیشامد تصادفی** می نامند و آنرا با یک حرف بزرگ لاتین مانند  $A$  نمایش می دهند.

از آنجا که  $\emptyset \subseteq S$ ، پس  $\emptyset$  یک پیشامد روی  $S$  است و آن را **پیشامد غیر ممکن (نشدنی)** می نامیم.

از آنجا که  $S \subseteq S$ ، پس  $S$  نیز یک پیشامد است که آن را **پیشامد حتمی** می نامیم.

تمرین ۵۷ : در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد بزرگ تر از ۷ ظاهر شود.      ب) عدد کوچک تر از ۷ ظاهر شود.

حل الف:  $A = \{ \}$       حل ب:  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

تمرین ۵۸ : سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم؛ می دانیم  $\{ر، پ\} = S$ . تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

تمرین ۵۹ : مریم، ملیکا و سوگند پول هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره دفاع مقدس از نایبگانه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هر کسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیر مجموعه های یک عضوی  $S$  را مشخص کنید.

اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

تمرین ۶۰ : تاسی را پرتاب می کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده اند؟

الف)  $A = \{3, 2, 5\}$

ب)  $B = \{2\}$

پ)  $C = \{2, 4, 6\}$



برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

تمرین ۶۱ : دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

(ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۷ باشد.

(پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

(ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

تمرین ۶۲ : یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم :

(الف) فضای نمونه ای آن را بنویسید این مجموعه چند عضو دارد؟

(ب) پیشامد آنکه « هر دو سکه رو و تاس زوج باشد » را تشکیل دهید.

پ) پیشامد آنکه « هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید » را تشکیل دهید.



تمرین ۶۳ : از جعبه ای که شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

الف) هر ۳ مهره سبز باشند.

ب) هر ۳ مهره هم رنگ باشند.

پ) فقط ۲ مهره آبی باشد.

ت) حداقل ۲ مهره آبی باشد.

ث) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

تمرین ۶۴: در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

(ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

(پ) ۳ دانش آموز هم پایه باشند.

تمرین ۶۵: از یک سبد محتوی ۵ سیب سالم و ۲ سیب فاسد، ۴ سیب به طور تصادفی بیرون می آوریم. تعداد عضوهای پیشامد «هر ۴ سیب سالم باشند» را مشخص کنید.

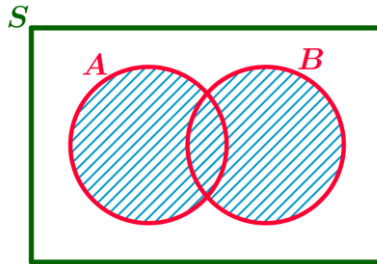
تمرین ۶۶: چهار لامپ از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب می باشند، انتخاب می کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) هیچکدام معیوب نباشند.

## اعمال روی پیشامدها

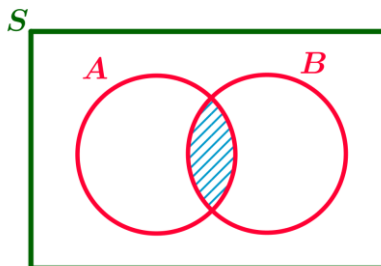
فرض کنید  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند:

اجتماع دو پیشامد: پیشامد  $A \cup B$  زمانی رخ می دهد که پیشامد  $A$  یا  $B$  یا هر دو رخ دهند. (حداقل یکی از دو پیشامد  $A$  یا  $B$  رخ دهد).



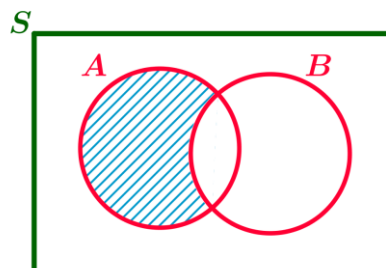
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

اشتراک دو پیشامد: پیشامد  $A \cap B$  زمانی رخ می دهد که پیشامد  $A$  و  $B$  با هم رخ دهند.



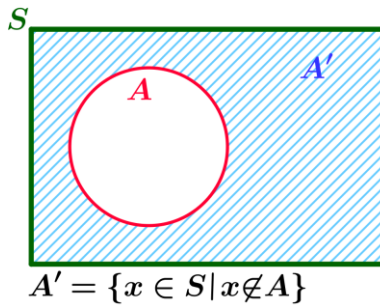
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

تفاضل دو پیشامد: پیشامد  $A - B$  زمانی رخ می دهد که پیشامد  $A$  رخ دهد ولی پیشامد  $B$  رخ ندهد.



$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

متمم یک پیشامد: پیشامد  $A'$  زمانی رخ می دهد که پیشامد  $A$  رخ ندهد.



$A$  و  $A'$  را دو پیشامد متمم می گوئیم و همواره داریم:  $A \cup A' = S$  ,  $A \cap A' = \emptyset$



هرگاه  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه  $S$  (یعنی  $A, B \subseteq S$ ) باشند و  $A \cap B = \emptyset$  در این صورت پیشامدهای  $A$  و  $B$  را دو پیشامد ناسازگار می گوئیم.

برای مثال ، در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن عدد روی تاس ، ناسازگارند.

اگر  $A \cap B = \emptyset$  آنگاه  $B - A = B$  ,  $A - B = A$



تمرین ۶۷: دو تاس را پرتاب می کنیم پیشامد آن را مشخص کنید، طوری که یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$$A = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}$$

حل:

$$B = \{(5,1), (1,5), (2,4), (4,2), (3,3)\} \Rightarrow A \cap B = \{(5,1), (1,5)\}$$

تمرین ۶۸: دو تاس را پرتاب می کنیم پیشامد آن را مشخص کنید، طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

حل:

$$B = \{(3,1), (1,3), (2,2)\} \Rightarrow A \cup B = \{(3,1), (1,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

تمرین ۶۹: تاسی را پرتاب می‌کنیم، هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

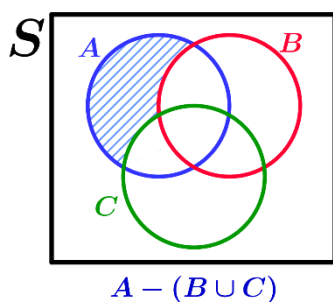
ب) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

پ) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

ت) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

ث) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

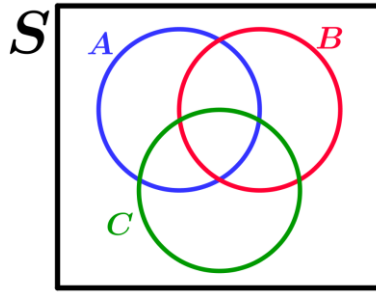
تمرین ۷۰: فرض کنید  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه پیشامد در فضای نمونه  $S$  باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه



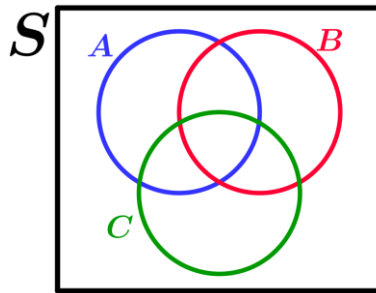
بزنید. سپس عبارت مجموعه‌ای مربوط به پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

الف) فقط پیشامد  $A$  رخ دهد و پیشامدهای  $B$  یا  $C$  رخ ندهد.

ب) پیشامدهای  $A$  و  $B$  رخ دهند ولی پیشامد  $C$  رخ ندهد.



پ) پیشامدهای  $A$  یا  $B$  رخ دهند ولی پیشامد  $C$  رخ ندهد.



تمرین ۷۱: خانواده ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

الف) پیشامد  $A$  اینکه همه فرزندان دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد  $B$  اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

پ) پیشامد  $C$  اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  به سوالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای  $A$  و  $B$  ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای  $C$  و  $B$  ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای  $A$  و  $C$  ناسازگارند؟

تمرین ۷۲: دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی بنویسید.

### احتمال یک پیشامد

فرض کنید  $S \neq \emptyset$  فضای نمونه یک پدیده تصادفی باشد. اگر  $S$ ،  $n$  برآمد برای وقوع داشته باشد و  $A$  پیشامدی در  $S$  باشد. در این صورت **احتمال وقوع** پیشامد تصادفی  $A$  را بانماد  $P(A)$  نمایش می دهیم

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

و مقدار آن طبق دستور روبرو محاسبه می کنیم:

تمرین ۷۳: از ۱۰۴ بار گزارش هوا شناسی ۲۶ بار پیش بینی هوا نادرست بوده است. احتمال نادرستی پیش بینی هوا را حساب کنید.

تمرین ۷۴: چنانچه پیشامد  $A$  نشدن باشد، یعنی  $A = \emptyset$ . در این صورت مقدار  $P(A)$  محاسبه کنید.



تمرین ۷۵: چنانچه پیشامد  $A$  حتی باشد یعنی  $A=S$ . در این صورت مقدار  $P(A)$  محاسبه کنید.

تمرین ۷۶: هرگاه  $A \subseteq B$  باشد، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

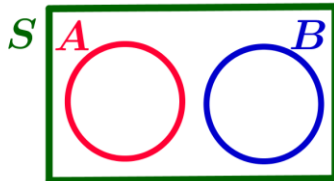
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq \boxed{\phantom{000}} \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

با توجه به تمرین های ۷۴، ۷۵ و ۷۶ نتیجه می گیریم

اگر  $A$  پیشامد دلخواهی در فضای نمونه  $S$  باشد. در این صورت داریم:  $0 \leq P(A) \leq 1$

تمرین ۷۷: هرگاه  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه  $S$  باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار  $P(A \cup B)$  را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + \boxed{\phantom{000}} \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{n(S)} + \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \Rightarrow P(A \cup B) = \boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}}$$



$$A \cap B = \phi \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

تمرین ۷۸: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) تاس زوج بیاید.

حل:  $S = \{(1,r), (2,r), (3,r), (4,r), (5,r), (6,r), (1,p), (2,p), (3,p), (4,p), (5,p), (6,p)\}$

$$A = \{(2,r), (4,r), (6,r), (2,p), (4,p), (6,p)\} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) سکه پشت بیاید.

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

تمرین ۷۹: یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

$$n(A) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1, \quad n(S) = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 12^5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5} \quad \text{حل:}$$

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

$$n(B) = 12 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 12, \quad n(S) = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 12^5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4} \quad \text{حل:}$$

پ) تولد هیچ دو تایی آنها در یک ماه نباشند.

تمرین ۸۰: در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره های ۲، ۳، ۴، ...، ۱۱، ۱۲ را نسبت می دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

ب) احتمال برنده شدن کدام شماره از همه کمتر است؟

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



تمرین ۸۱: در جعبه ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به طور تصادفی یک شیء خارج می کنیم. مطلوب است محاسبه:

الف) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد؛  $P(A)$ .

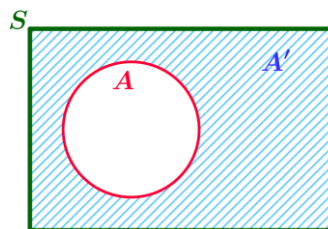
ب) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد؛  $P(B)$ .

پ) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد نباشد؛  $P(A')$ .

ت) پاسخ های قسمت های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه ای می گیرید؟

ث) حاصل  $P(A) + P(A')$  را پیدا کنید.

اگر  $P(A)$  احتمال وقوع پیشامد  $A$  در فضای نمونه  $S$  باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با  $P(A')$  نمایش می دهیم و داریم:  $P(A) + P(A') = 1$  یا  $P(A') = 1 - P(A)$ . در این حالت،  $A$  و  $A'$  را دو پیشامد متمم می گوئیم.



تمرین ۸۲ : احتمال اینکه فردا بارانی باشد  $\frac{1}{10}$  است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

تمرین ۸۳ : احتمال اینکه کپارش فردا به مدرسه نرود برابر با  $0.1$  است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کپارش به مدرسه برود.

تمرین ۸۴ : احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با  $\frac{32}{49}$  است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

تمرین ۸۵ : در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3!} = \frac{720}{6} = 120$$

الف) احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120}$$

حل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{120} + \frac{4}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

ب) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن از متفاوت باشند، محاسبه کنید.

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 4 \times 2}{120} = \frac{16}{120} = \frac{4}{15}$$

حل:

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

$$n(D) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 36 + 4 = 40 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

حل:

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

$$n(E) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 36 + 60 + 20 = 116 \Rightarrow$$

حل:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ث) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشند، محاسبه کنید.

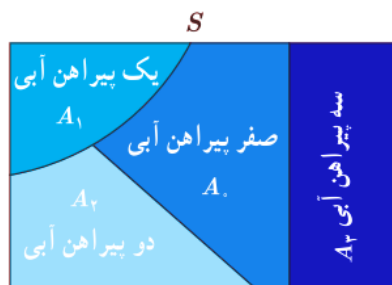
$$n(F) = \binom{4}{3} = 4 \Rightarrow P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

حل:

$$P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{30}{30} - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

ج) جواب های قسمت های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه ای می گیرید؟

حل:



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = P(S) = 1$$

دنایای امروز پر از اطلاعاتی است که ما در بخش های مختلف زندگی با آنها رو به رو می شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت های نتایج به دست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می خواهیم از شکل گیری یک مسئله در محیط زندگی مان تا یافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.



دانش آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن های هوشمند اختصاص می دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش آموزان به تلفن های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان چگونگی استفاده دانش آموزان از تلفن های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: « دانش آموزان پایه های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت هایی از تلفن های هوشمند خود استفاده می کنند؟ »



گروه اجرا کننده این پروژه، پرسش نامه ای طراحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش آموزان خواستند که این پرسش نامه را تکمیل کنند:

الف) به طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می کنید؟

ب) از میان گزینه های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه ها با تلفن هوشمند خود انجام می دهید، علامت بزنید.

- |  |   |                                |
|--|---|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> خواندن کتاب الکترونیک             | <input type="checkbox"/> شبکه های اجتماعی | <input type="checkbox"/> عکاسی |
| <input type="checkbox"/> تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی | <input type="checkbox"/> تماس تلفنی       | <input type="checkbox"/> بازی  |

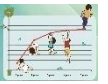
مشاوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میان و دامنه میان چارکی گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت ها را به صورت نمودار میله ای نمایش دهند.

- حدس می زنید دانش آموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت هایی از تلفن های هوشمند خود استفاده می کنند؟

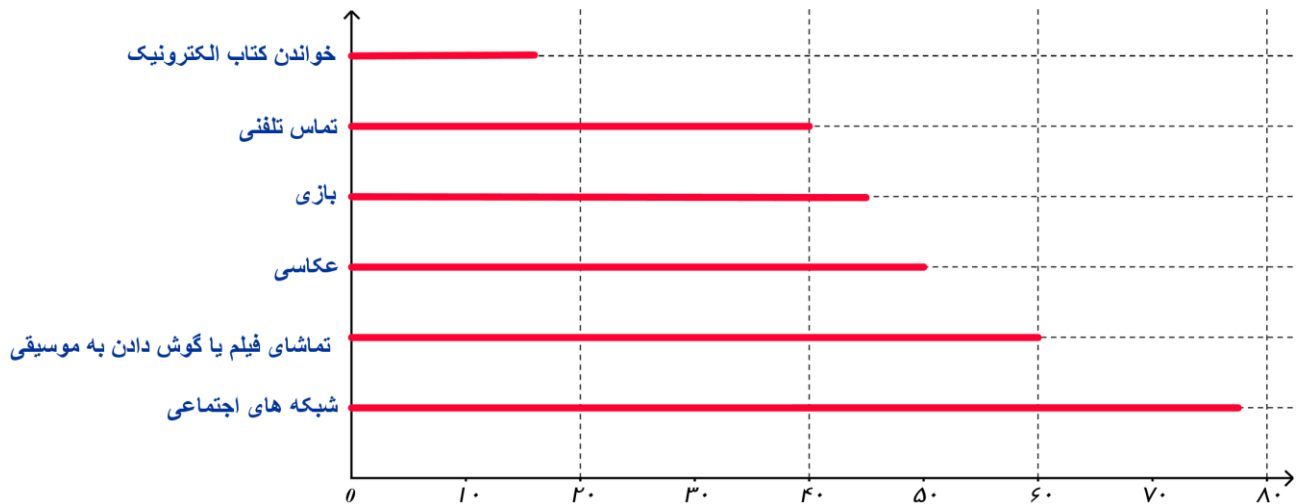


داده ها پس از گردآوری در نرم افزار وارد شدند. اشتباه های تایپی تا حد ممکن رفع و درستی داده های دور افتاده بررسی شد. پرسش نامه هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می رسید (مثلاً میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود!) کنار گذاشته شدند.

- در این پرسشنامه لازم نیست افراد نام خود را بنویسند. حفظ محرمانگی اطلاعات، چگونه مکم می کند داده های گردآوری شده به واقعیت نزدیک تر باشند؟ مثال دیگری بزنید که حفظ محرمانگی اطلاعات هنگام گردآوری داده ها مهم باشند.



نتایج این نظر سنجی درباره فعالیت های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانۀ میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷۰ دقیقه و دامنه میان چارکی آن ۳۵ ( $Q_1 = 65, Q_3 = 100$ ) دقیقه بود.



- با توجه به چارک های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می کنند؟

- چرا در این نمودار میله ای، مجموع درصد فراوانی ها از ۱۰۰ بیشتر می شود؟




باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش آموزان پایه های ..... این مدرسه (نه دانش آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از ..... (نه ابزارهای دیگر) صادق است.



• با توجه به نمودار میله ای صفحه پیش، دانش آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می کنند؟


• از میانه و دامنه میان چارگی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن های هوشمند چه نتیجه ای می گیرید یا به زبان آماری، آنها را چگونه تفسیر می کنید؟


 مشاوران آموزشی، به کمک دانش آموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی های دانش آموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که :

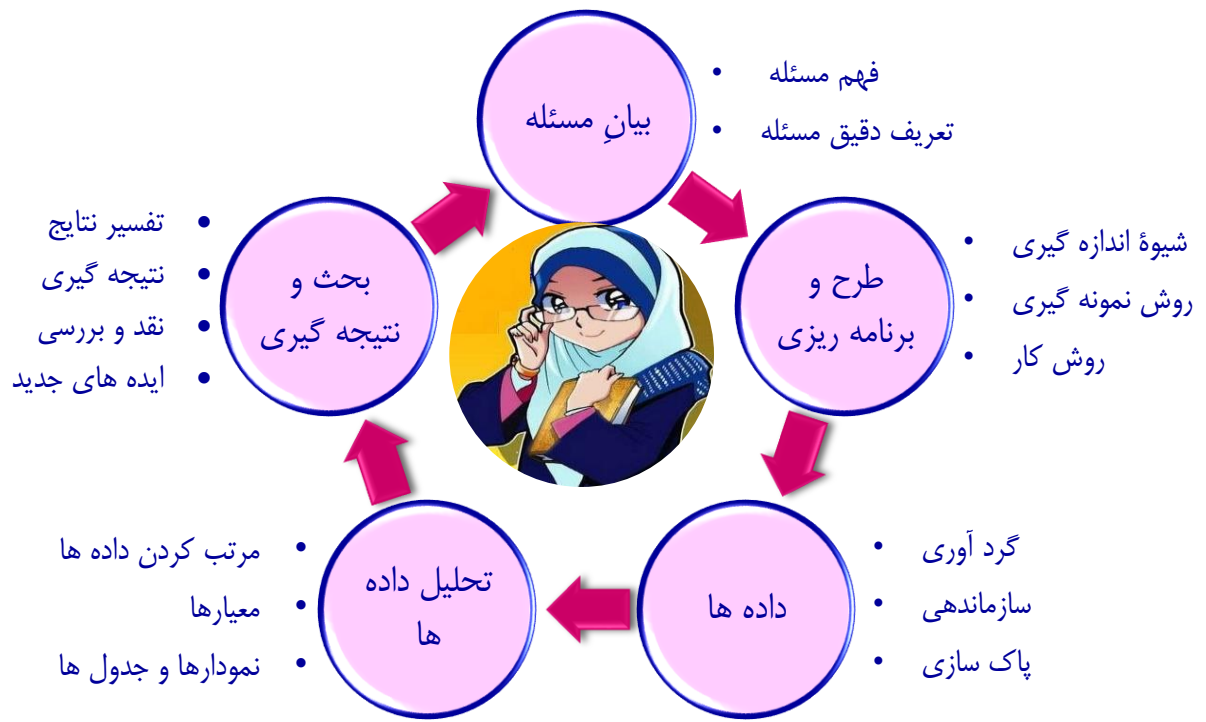
(۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه های اجتماعی می تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم ها و دانش آموزان را بهبود بخشد.

(۲) معلم ها می توانند با تهیه فیلم های آموزشی جذاب، محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش آموزان قرار دهند و دانش آموزان در ساعاتی از شبانه روز که آمادگی بیشتری دارند، فیلم ها را تماشا کنند و پرسش هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم ها در میان بگذارند.

(۳) با برگزاری دوره های آموزشی و نمایشگاهی از آثار دانش آموزان، می توان علاقه دانش آموزان به عکاسی و در نتیجه، استفاده از تلفن های هوشمند را هدفمند کرد.

 اکنون که مطلع شدیم دانش آموزان در طول روز به طور متوسط چه مقدار با تلفن هایشان کار می کنند و به چه فعالیت هایی مشغول هستند، می خواهیم برنامه ای داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانش آموزان بهتر شود. بدین منظور در یک نظر سنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش آموزان صرف کارهای مختلف می کنند، به تفکیک این فعالیت ها بدانیم.

 همان طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله های مرتبط با آمار به صورت چرخه ای کامل شامل گام های زیر است: (۱) بیان مسئله (۲) طرح و برنامه ریزی (۳) گرد آوری و پاک سازی داده ها (۴) تحلیل داده ها (۵) بحث و نتیجه گیری



تمرین ۸۶ : در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسید.

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
		راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می کنیم. به نمونه گیری، شیوه اندازه گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می اندیشیم.
		نتایج به دست آمده را تفسیر می کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می کنیم.
		با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته ایم، نتایج را متناسب با هدف های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی های داده ها گزارش می کنیم.
		داده ها را گردآوری می کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می شویم.

## گام های چرخه آمار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرآیند حل مسئله را چرخه می نامیم.»

گام های مختلف حل مسئله به ما کمک می کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام ها با روشن تر شدن ابعاد مختلف مسئله و بر اساس نتایج و تجربه به دست آمده، یک مسئله جدید دقیق تر شکل می گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازبینی می شود.

### ۱ بیان مسئله

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.

**مثال:** فرض کنید می خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم.

پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش های پهلوانی و...) یا توانایی ها و ناتوانی های جسمانی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه آماری نمی توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

بدین ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد در میان پسران ۱۳ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کرمانشاه» می تواند به عنوان یک مسئله مطرح شود.

چند مثال دیگر بزنید.

اندازه گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه گیری، در واقع سعی می کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی تبدیل کنیم.

انتخاب معیار اندازه گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دما آسان است؛ زیرا با ابزارهایی آشنا می توانیم توصیف هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه گیری همیشه این قدر آسان نیست. فرض کنید در مطالعه ای می خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه گیری کنیم. چه پرسش هایی می تواند برای اندازه گیری این متغیر به ما کمک کند؟ آیا اندازه گیری دارایی ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد دوستان و ... لزوماً مشخص می کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این طور نیست.

با توجه به اهمیت اندازه گیری می توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه گیری یا پرسش نامه ها را طوری طراحی می کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم.

بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه گیری و همچنین شیوه تحلیل داده ها تصمیم گیری می شود.

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می نامیم.

هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ تری نیاز داریم.

تمرین ۸۷: برای بررسی کدام یک از موارد به اندازه نمونه بزرگ تری نیاز است؟ توضیح دهید.

سن دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید.

معدل سال گذشته دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید.

تمرین ۸۹: علی و امید در یک پروژه دانش آموزی می خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ آبادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت هایی مشغول اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می کنند».

**علی پیشنهاد می کند:** «برای نمونه گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها پرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند.»

**امید پیشنهاد می کند:** «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه گیری فهرستی از دانش آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ آبادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش آموز پرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت هایی انجام می دهد و به صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت ها مشغول است.»

موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادهای امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است؟ یا امید؟

**الف)** کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند.

**ب)** نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند.

**پ)** اگر مثلاً به کتابخانه برویم از نوجوانان پرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند، میانگین داده های به دست آمده (آماره نمونه) بزرگ تر از میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه) می شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی روند در نظر گرفته نشده اند.



تمرین ۹۰: دو اشکال دیگر را که به نمونه علی وارد است، مطرح کنید.



تمرین ۹۱: برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نمونه گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور دارند؟ چرا؟

**الف)** انتخاب خانوارها بر اساس رقم اول تلفن خانه ها

**ب)** انتخاب خانوارها بر اساس رقم آخر تلفن خانه ها

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه گیری، یا ثبت داده ها و یا وارد کردن داده ها در نرم افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده ها می توان برخی از این اشتباه ها را تصحیح کرد.



**تمرین ۹۲:** آنچه در جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده های گردآوری شده در یک پروژه دانش آموزی پیش از بر طرف کردن اشتباهات است. چون برخی نرم افزارها نمی توانند داده های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می کنیم؛ مثلاً در این داده ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر « ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تعیین شده است. در این داده ها هر سطر نشان دهنده یک فرد و هر ستون نشان دهنده یک متغیر است.

ردیف	شماره دانش آموزی	سن	جنسیت	ورزش مورد علاقه	متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته	نمره ادبیات
۱	۱۴	۱۴	۱	۱	۲	۱۵
۲	۵	۱۵	۲	۱	۰	۱۴
۳	۱	۱۴	۱	۲	۳	۱۵
۴	۴۵	۱۵	۱	۲۲	۵	+
۵	۲	۵۱	۲	۲	۴۴	۱۷
۶	۱۷	۱۴	۲	۳	۶	۱۸
۷	۱۹	۱۵	۳	۷	۱۹	
۸	۳۴	۱۴	۲	۴	۴	۱۷
۹	۵۲	۱۴	۱	۳	۳	۱۵
۱۰	۱۲	۱۴	۱	۲	۰	۱۰
۱۱	۷	۱۴	۱	۲	۱	۱۲
۱۲	۳۵	۱۴	۲	۱	۲	۱۴
۱۳	۲۶	۱۵	۱	۴	۷	۲۰
۱۴	۲۱	۱۳	۲	۱	۵	۱۸

با توجه به جدول داده ها

(الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه شده است؟

ب) در داده های مربوط به کدام دانش آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده های متغیرهای یعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جا به جا شده اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش آموز چیست، نمره ادبیات او چند است؟

پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟

ت) در متغیر «متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده های دیگر تفاوت دارد؟

ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده های مربوط به کدام دانش آموز با واحد اندازه گیری متفاوتی ثبت شده است؟



## ۴ تحلیل داده ها

در این مرحله، داده ها را تحلیل می کنیم و نتایج را ارائه می دهیم.

منظور از تحلیل داده ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.



برای توصیف داده های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می کنند بدانیم داده ها در کجا متمرکزند. و معیارهای پراکندگی به ما کمک می کنند بدانیم داده ها چگونه متراکم یا پراکنده شده اند. به یاد دارید که اگر داده دور افتاد داشته باشم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده ها نخواهند بود. چرا؟

تمرین ۹۳ : با توجه به داده ها جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	داده ها											معیارهای گرایش به مرکز		معیارهای پراکندگی			
												میانگین	میانه	دامنه میان چارکی	انحراف معیار	دامنه تغییرات	
سن (سال)	۱۷	۱۸	۱۶	۱۷	۱۵	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۵	۱۹					
میزان تماشای تلویزیون	۴	۲۹	۴	۶	۷	۶/۵	۷	۸	۶	۳۰	۴	۵					

$$\bar{x} = \frac{۱۵+۱۵+۱۵+۱۶+۱۶+۱۷+۱۷+۱۷+۱۸+۱۸+۱۹+۱۹}{۱۲} = \frac{۲۰۲}{۱۲} = ۱۶/۸۳$$

حل:

$$m = \frac{۱۷+۱۷}{۲} = ۱۷ \quad ۱۵-۱۵-۱۵-۱۶-۱۶-۱۷-۱۷-۱۷-۱۸-۱۸-۱۹-۱۹$$

$$Q_1 = \frac{۱۵+۱۶}{۲} = ۱۵/۵ \quad Q_3 = \frac{۱۸+۱۸}{۲} = ۱۸ \quad IQR = ۱۸ - ۱۵/۵ = ۲/۵$$

$$S = \frac{۳(۱۵-۱۷)^2 + ۲(۱۶-۱۷)^2 + ۳(۱۷-۱۷)^2 + ۲(۱۸-۱۷)^2 + ۲(۱۹-۱۷)^2}{۱۲}$$

$$= \frac{۳ \times ۴ + ۲ \times ۱ + ۳ \times ۰ + ۲ \times ۱ + ۲ \times ۴}{۱۲} = \frac{۱۲ + ۲ + ۰ + ۲ + ۸}{۱۲} = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲ \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{۲} \approx ۱/۴۱$$



تمرین ۹۴ : با توجه به داده ها جدول تمرین قبل ، به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده های متغیر «سن» مناسب اند؟ چرا؟

با توجه به توزیع داده ها، برای متغیر «سن»، میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) معیارهای مناسبی هستند، چون داده دور افتاده مشاهده نمی کنیم.



ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده های متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» مناسب اند؟ چرا؟

میانه و دامنه میان پارکی، معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مناسبی هستند؛ زیرا چند داده دور افتاده وجود دارد.

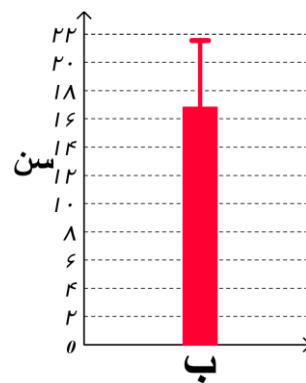
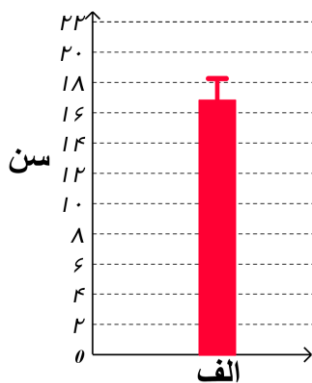
پ) انحراف کدام داده ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟

داده های ۲۹ و ۳۰ فاصله زیادی از میانگین دارند و هم‌طور این فاصله ها باعث بزرگ شدن واریانس و به تبع آن بزرگ شدن انحراف استاندارد (انحراف معیار) شده است.

ت) اگر برای توصیف داده های متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می شد، خوانندگانی که به داده های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می شدند؟

در واقع میانگین (۹/۷۱)، نماینده مناسبی برای داده های «میزان تماشای تلویزیون» نیست و به سمت داده های دور افتاده رفته است.

ث) با توجه به داده های جدول، کدام یک از نمودارهای زیر نشان دهنده میانگین و انحراف معیار سن است. نمودار الف یا ب؟

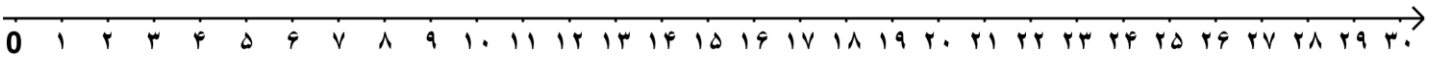


در داده هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص های مناسبی برای توصیف هستند، می توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان دهنده میانگین و میله خطی آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

اگر داده های دور افتاده داشته باشیم، نمی توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می تواند گمراه کننده باشد در این گونه موارد باید از نمودار جعبه ای استفاده کنیم.

نکته

تمرین ۹۵ : برای داده های متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» در تمرین ۹۳ نمودار جعبه ای رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می دهد که داده ها کجا متراکم تر و کجا پراکنده ترند؟ نمودار نمایش دهنده میانگین و انحراف معیار با نمودار جعبه ای؟

ب) اگر از الگوی توزیع داده ها و وجود داده های دور افتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن تر است؟



تمرین ۹۶ : دو شرکت به زرگس پیشنهاد کار داده اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً  $\frac{1}{6}$  میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می کند.

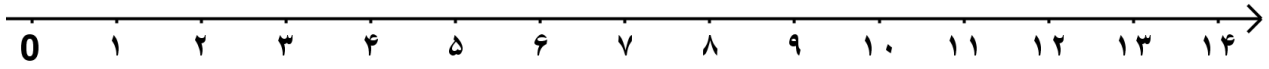
اعظم می گوید: « شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»

مریم می گوید: « به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکنده گی چه فایده ای دارد؟»

آنها تصمیم می گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می کنند.

	حقوق کارمندان								
شرکت اول	۱	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	۳	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}$
شرکت دوم	$\frac{0}{7}$	۱	۸	$\frac{12}{1}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{8}$

الف) با استفاده از داده های جدول بالا، نمودار جعبه ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را یک روی محور رسم کنید.



ب) با توجه به نمودار قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارات های زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از حقوق کارمندان شرکت اول است.
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را بر اساس شایستگی هایشان انتخاب کننده شرکت اول برای او مناسب است.
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است.



تمرین ۹۷: دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه ها و کادر آموزشی شان، وضعیت قبولی دانش آموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

ب) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی های قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است. (%۲۰۰ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است. (%۲۰ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می کنید؟

ت) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می تواند همراه کننده باشد؟



برای توصیف داده های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.



## ۵ بحث و نتیجه گیری

پس از تحلیل داده ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت های مطالعه ای که انجام داده ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه گیری، داده ها را به روش های مناسبی تحلیل کرده باشیم،

در بهترین حالت می توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده ایم. نتایج ما قطعی نیستند، چون در نمونه گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

## یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل

همان طور که دیدی، در تمامی گام های حل مسئله مرتبط با آمار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلاً اگر آمارگیران از اهداف کلی مطالعه با خبر نباشند یا فردی که داده ها را تحلیل می کند، ویژگی های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نشناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه ای انجام می شود که ویژگی های آن را به خوبی نمی شناسیم، در تمام گام ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم.

کیفیت اجرای هر یک از گام های چرخه آمار، گام های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می توانیم چرایی گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه گیری، شیوه اندازه گیری، نوع ورود داده ها و تمامی موارد گام های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.

مثالی واقعی از پروژه ای که با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا»، انجام شده، نشان می دهد که چگونه مشارکت ندادن تمامی اعضای گروه اجرا کننده می تواند ما را از پاسخ مسأله کاملاً دور کند. برای اجرای این پروژه کارشناسان طی جلساتی به طراحی و برنامه ریزی جزئیات کار پرداختند و سپس برای گردآوری داده ها چند نفر را استخدام کردند. آمارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل گیری مسأله و اهداف این پروژه، برای پرکردن پرسش نامه ها به منازل مختلف مراجعه کردند. هنگام وارد کردن داده ها در نرم افزار، در چندین پرسش نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته اند: «فوت شده است».

تمرین ۹۹: برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلان شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروه متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکی در قسمت کم عمق در حال راه رفتن در آب اند و در قسمت عمیق گاهی فقط چند نفر شنا می کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقهٔ احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟

ب) چه کسانی می‌توانستند پیش از احداث این استخر، دربارهٔ فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدهند؟

پ) چگونه مشورت با افراد بومی دربارهٔ اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟



تمرین ۱۰۰: در هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و برای کدام گام های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجرا کنندگان برداشت های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

ب) اندازه گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت ( کیلوگرم و پوند) انجام شده است.

پ) تمامی داده های دور افتاده حذف شده اند.

ت) براساس توزیع داده ها ، میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی بود. اما چون مقدار میانه با آنچه انتظار می رفت متفاوت بود، میانگین داده ها گزارش شد.

ث) نتایج را فقط افراد متخصص آمار تفسیر کرده اند.