

درس اول : شمارش

یکی از بحث های جالب ریاضیات، بحث ترکیبیات است. به کمک این بحث تعداد حالت های مختلف یک موضوع را بدون نوشتن آنها شمارش می کنیم. به همین جهت برخی، ترکیبیات را شمارش بدون شمردن نامیده اند. برای آشنایی دقیق با این مفهوم، شایسته است ابتدا اصل جمع و اصل ضرب را معرفی کنیم.

قسمت اول : اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع : اگر کاری را بتوان به دو روش مجزا انجام داد، طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m + n$ روش وجود دارد.

مثال : شخصی برای سفر از اهواز به مشهد در یک روز معین تابستان ، متوجه شد در این روز ۴ قطار متفاوت و ۳ پرواز متفاوت هواپیما برای عزیمت به مشهد وجود دارد. تعداد حالت هایی که این شخص می تواند انتخاب کند را حساب کنید.



تعمیم اصل جمع : اصل جمع برای تعداد محدودی روش مجزا انجام کار قابل تعمیم است.

مثال : شخصی برای سفر از اهواز به مشهد در یک روز معین تابستان ، متوجه شد در این روز ۴ قطار متفاوت و ۳ پرواز متفاوت هواپیما و ۲ اتوبوس متفاوت برای عزیمت به مشهد وجود دارد. تعداد حالت هایی که این شخص می تواند انتخاب کند را حساب کنید.

حل :

$$۴ + ۳ + ۲ = ۹$$

آموزش ریاضی ۱..... تهیه کننده : جابر عامری

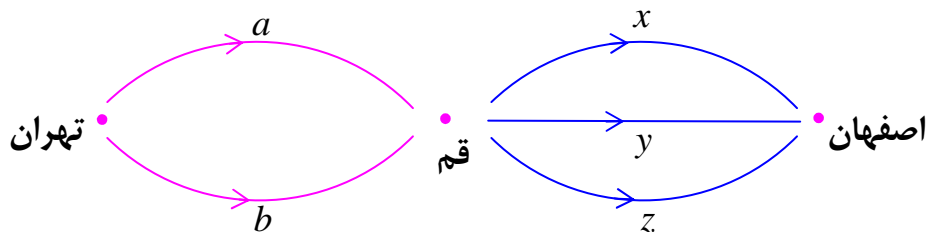
اصل ضرب : اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله ی اول m انتخاب و برای انجام هر کدام از این m انتخاب، در مرحله ی دوم n روش انجام وجود داشته باشد، در کل، کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

مثال : شخصی می خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد که از قم عبور کند. اگر از شهر تهران به قم ۲ مسیر (به نام های a و b) و از قم به اصفهان ۳ مسیر (به نام های x و y و z) وجود داشته باشد. این شخص به چند طریق می تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

حل : به کمک اصل ضرب می توان تعداد حالت های سفر از تهران به اصفهان را تعیین کرد.

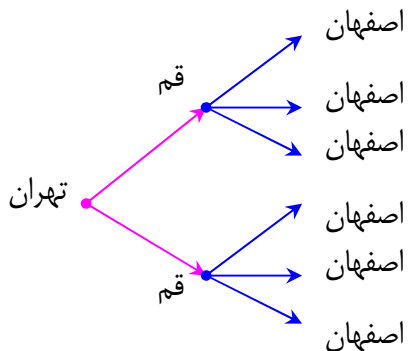


به نمودار زیر نیز توجه کنید که تعداد این مسیر ها را نشان می دهد.



نام مسیر ها نیز بدین شکل است.

(a, x)	(a, y)	(a, z)
(b, x)	(b, y)	(b, z)



توجه: به کمک رسم نمودار زیر می توان این نتیجه را نیز تأیید کرد. چنین نموداری را **نمودار درختی** می نامند.

طبق نمودار فوق از تهران به اصفهان به شرط گذر از قم ۶ مسیر متفاوت وجود دارد.

تمرین ۱: یک سکه و یک تاس را به هوا پرتاب می کنیم. تمام حالت های ممکن به زمین افتادن آنها را بنویسید. (از اصل ضرب و نمودار درختی کمک بگیرید).

تمرین ۲: با ارقام ۵ و ۷ چند عدد دو رقمی می توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد.

تمرین ۳: با ارقام ۵ و ۷ چند عدد دو رقمی می توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز باشد.

تعمیم اصل ضرب: اصل ضرب برای تعداد محدودی مرحله برای انجام یک کار قابل تعمیم است.

مثال: شخصی ۲ کفش و ۳ شلوار و ۴ پیراهن متفاوت دارد، حساب کنید که این شخص به چند حالت می تواند آنها را بپوشد.

حل:

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{2} & \times & \textcircled{3} & \times & \textcircled{4} & = & \textcircled{24} \\ \text{تعداد} & & \text{تعداد} & & \text{تعداد} & & \\ \text{کفش} & & \text{شلوار} & & \text{پیراهن} & & \end{array}$$

تمرین ۴: به کمک نمودار درختی نتیجه ی بدست آمده در مثال فوق را بررسی کنید.

تمرین ۵: با ارقام ۵ و ۸ و ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد.

تمرین ۶: با ارقام ۵ و ۸ و ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز باشد.

تمرین ۷: با ارقام ۷ و ۸ و ۰ و ۹ و ۶ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

تمرین برای حل:

۸: سه مهره (به نام های c و b و a) و دو تاس (به نام های y و x) در درون یک کیسه قرار دارند.

الف: شخصی می خواهد فقط یکی از اشیاء داخل کیسه را بردارد. تعیین کنید که به چند طریق این کار ممکن است؟

ب: شخصی می خواهد یک مهره و یک تاس بردارد، تعیین کنید که به چند حالت این کار ممکن است؟

۹: با حروف کلمه ی «خوزستان» چند کلمه ی سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می توان نوشت؟

آموزش ریاضی ۱..... تهیه کننده : جابر عامری

۱۰: با حروف کلمه‌ی «تهران» چند کلمه‌ی سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می توان نوشت؟

۱۱: یک برگ نظر خواهی مانند فرم زیر دارای ۵ سؤال چهار گزینه ای است. یک شخص نزد تصمیم گرفت که این فرم را به تصادف پاسخ دهد. حساب کنید که این شخص به چه تعداد حالت متفاوت می تواند پاسخ نامه را تکمیل نماید، به طوری که :

الف) تمام سئوالات پاسخ داده شوند. ب) می توان به سئوالات نیز پاسخ نداد.

فرم نظر خواهی				
سؤال	گزینه A	گزینه B	گزینه C	گزینه D
۱				
۲				
۳				
۴				
۵				

توجه : گاهی برای یک یا چند جایگاه یا خانه (رقم یا حرف و به طور کلی اشیاء) شرطی قرار داده می شود. در حل چنین مسائلی ابتدا باید خانه های مشروط تکمیل شود.

تمرین ۱۲: با ارقام ۷ و ۸ و ۱ و ۹ و ۶ و ۴ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

تمرین ۱۳: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

حل : چون قرار است اعداد حاصل بزرگتر از ۳۰۰۰ باشند، پس رقم سمت چپ فقط می تواند ۹ یا ۷ یا ۵ یا ۳ باشد. لذا:

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

۳

۵ ۵

۷ ۷ ۷

۹ ۹ ۹ ۹

تمرین ۱۴ : به چند روش می توان با حروف کلمه‌ی «سازندگی» کلمه های ۴ حرفی ساخت (بدون توجه به معنی و بدون تکرار حروف) که حرف اوّل آنها نقطه دار نباشد.

حل : کافی است ، مدلی مانند مثال زیر تشکیل دهیم.

$$4 \times 6 \times 5 \times 4 = 480$$

ی	ی	ی	ی
س			
ا	ا	ا	ا
د	د	د	د
گ	گ	گ	گ
ز	ز		
ن			

توجه : حرف « ی » در اوّل کلمه، نقطه دار می شود.

تمرین ۱۵ : مجموعه ی $S = \{a, b, c, d\}$ دارای چند زیر مجموعه است؟

نتیجه : تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر 2^n است.

تمرین ۱۶ : در هر مورد تعیین کنید که با حروف کلمه ی « Computer » چند کلمه ی ۸ حرفی با

معنی و بی معنی بدون تکرار حروف می توان نوشت،

الف : به شرط اینکه حروف **u** و **p** کنار هم باشند.

ب : به شرط اینکه حروف **u** و **p** به شکل « **pu** » کنار هم باشند.

توجه : گاهی لازم می شود که دو اصل ضرب و جمع را به صورت ترکیبی استفاده کنیم. به مثال های زیر

توجه کنید.

مثال : با ارقام ۷ و ۳ و ۰ و ۶

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

ج) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

د) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

حل :

الف) $3 \times 4 \times 4 = 48$

ب) $3 \times 3 \times 2 = 18$

ج) $2 \times 2 \times 2 = 8$

با توجه به دو حالت اینکه ، اگر صفر یکان باشد یا اینکه صفر یکان نباشد. می توان نوشت:

د) $(2 \times 2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 4 + 6 = 10$

راه حل دوم: با توجه به بند های ب و ج می توان نوشت.

$$۱۸ - ۸ = ۱۰$$

مثال: با ارقام ۷ و ۵ و ۸ چند عدد سه رقمی می توان نوشت. به طوری که حداقل یک رقم تکراری داشته باشند.

حل:

تعداد اعداد سه رقمی بدون تکرار $۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

تعداد کل اعداد سه رقمی (دارای تکرار و بدون تکرار) $۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$

تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم تکراری داشته باشند. $۲۷ - ۶ = ۲۱$

مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است. هر کدام از حروف مربوط به این رمز از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی می باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، حساب کنید که برای این رمز چند حالت وجود دارد؟

حل: مسئله دارای دو حالت است.

حالت اول: اولین حرف سمت چپ، فارسی باشد.

$$۳۲ \times ۲۶ \times ۳۲ = ۲۶۶۲۴$$

حالت دوم: اولین حرف سمت چپ، انگلیسی باشد.

$$۲۶ \times ۳۲ \times ۲۶ = ۲۱۶۳۲$$

لذا تعداد کل حالت های ممکن (رمز ها)

$$۲۶۶۲۴ + ۲۱۶۳۲ = ۴۸۲۵۶$$

تمرین برای حل:

۱۷: با ارقام ۷ و ۸ و ۰ و ۹ و ۶ و ۴ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

۱۸: ارقام ۷ و ۸ و ۵ و ۹ و ۶ و ۴ را در نظر بگیرید. حساب کنید که با ارقام متمایز

الف: چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

ب: چند عدد چهار رقمی فرد می توان نوشت؟

ج: چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۵۰۰ می توان نوشت؟

د: چند عدد سه رقمی می توان نوشت که رقم یکان عدد فرد و دهگان مضرب ۳ باشد؟

۱۹: با ارقام ۳ و ۵ و ۷ و ۸ چند عدد سه رقمی می توان نوشت، که حتماً رقم تکراری داشته باشد.

حل چند تمرین دیگر

۲۰: تعداد حالت های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت های زیر به دست آورید.

(الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده باشد، طوری که شامل یک عدد یا حرف فارسی است.

(ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است طوری که گزینه ی اول یک عدد و گزینه ی دوم یک حرف الفبای فارسی است.

(ج) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است طوری که یکی از گزینه ها یک عدد و گزینه ی دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

(د) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عدد هستند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی می باشند.

(هـ) این رمز از چهار گزینه تشکیل شده است که دو گزینه ی اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه ی دوم حروف انگلیسی غیر تکراری اند.

حل:

(الف) رمز یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و یا یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود، بنابراین تعداد حالت ها می شود:

$$۳۲ + ۱۰ = ۴۲$$

(ب) گزینه ی اول ۱۰ حالت و گزینه ی دوم ۳۲ حالت می شوند و لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت ها برابر:

$$۱۰ \times ۳۲ = ۳۲۰$$

(ج) گزینه ی اول ۱۰ حالت و گزینه ی دوم ۳۲ حالت یا گزینه ی اول ۳۲ حالت و گزینه ی دوم ۱۰ حالت می

شوند و لذا تعداد کل حالت ها برابر: $(۱۰) \times (۳۲) + (۳۲) \times (۱۰) = ۳۲۰ + ۳۲۰ = ۶۴۰$

(د) یا هر دو گزینه عدد، یا اینکه هر دو حرف الفبای انگلیسی می باشند. پس:

$$(۱۰ \times ۱۰) + (۲۶ \times ۲۶) = ۱۰۰ + ۶۷۶ = ۷۷۶$$

(هـ) دو گزینه ی اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه ی دوم حروف انگلیسی غیر تکراری

$$۱۰ \times ۹ \times ۲۶ \times ۲۵ = ۵۸۵۰۰$$

آموزش ریاضی ۱..... تهیه کننده : جابر عامری

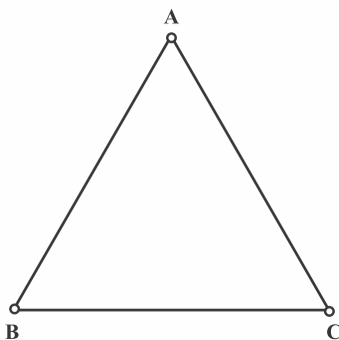
۲۱: در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، را تعیین کنید.

حل :

$$\text{حداقل} = 5 \times 8 \times 10 \times 20 = 8000$$

$$\text{حداکثر} = 5 \times 10 \times 12 \times 30 = 18000$$

۲۲: می خواهیم رأس های مثلث زیر را با سه رنگ قرمز و آبی و سبز رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که با هم وصل اند، هم رنگ نباشند.

حل :

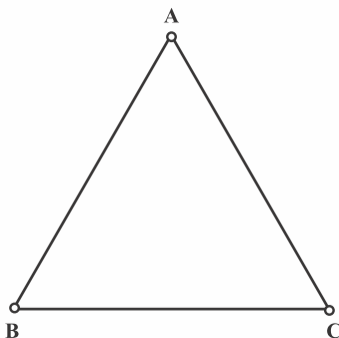
الف : هر رأس می تواند با یکی از سه حالت ، قرمز یا آبی یا سبز باشد. لذا هر رأس سه حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم.

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

ب : رأس A سه حالت انتخاب رنگ دارد. رأس B دو حالت و لذا رأس C فقط یک حالت دارد. پس :

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

۲۳: می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که با هم وصل اند، هم رنگ نباشند.

حل :

آموزش ریاضی ۱ پایه ی ۱۰ ریاضی و تجربی

الف : هر رأس می تواند با یکی از دو حالت ، قرمز یا آبی باشد. لذا هر رأس دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم.

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

ب : با توجه به اینکه هر رأس به رأس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی توان این کار را انجام داد.

$$2 \times 1 \times 0 = 0$$

$$A = \{11, 22, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{ي, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب\}$$

۲۴ : با پلاک هایی به صورت زیر عدد دو رقمی

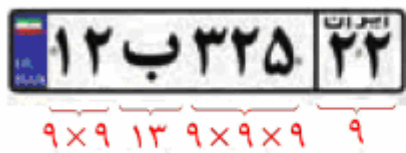
سمت راست آنها از مجموعه ی A انتخاب شوند و

سایر ارقام از مجموعه ی B انتخاب شوند و حرف

استفاده شده در آن از مجموعه ی C انتخاب شود، حساب کنید با

این شرایط چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟

حل :



$$A = \{11, 22, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{ي, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{عدد دو رقمی} & & \text{حرف} & & \text{عدد سه رقمی} & & \text{عدد دو رقمی} \\ \boxed{9 \times 9} & \times & \boxed{13} & \times & \boxed{9 \times 9 \times 9} & \times & \boxed{9} = \boxed{13 \times 9^6 = 690,8733} \end{array}$$

۲۵ : در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر

اتوماتیک) تولید می شود.



الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکلی باشد، چند

نوع از این اتومبیل با رنگ مشکلی تولید می شود؟

ج) چند نوع از این اتومبیل مشکلی دنده اتوماتیک تولید

می شود.

حل :

الف :

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{مدل} & & \text{رنگ} & & \text{حجم موتور} & & \text{دنده} \\ & \boxed{5} & \times & \boxed{10} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} = \boxed{300} \end{array}$$

ب :

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{مدل} & & \text{رنگ} & & \text{حجم موتور} & & \text{دنده} \\ & \boxed{5} & \times & \boxed{1} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} = \boxed{30} \end{array}$$

ج :

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{مدل} & & \text{رنگ} & & \text{حجم موتور} & & \text{دنده} \\ & \boxed{5} & \times & \boxed{1} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{1} = \boxed{15} \end{array}$$

۲۶: یک آزمون چندگزینه ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه ای و ۵ سؤال ۲ گزینه ای (بله _ خیر) ، فردی

قصد دارد به سؤال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد، اگر:

الف (مجبور باشد، به همه ی سؤال ها پاسخ دهد.

ب (بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد.

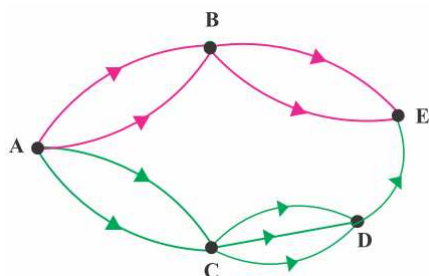
حل :

الف : برای هر یک از سئوالات چهارگزینه ای ۴ حالت و برای هر یک از سئوالات دو گزینه ای ۲ حالت داریم.

$$\begin{array}{ccc} \text{سئوالات دو گزینه ای (۵ بار)} & \times & \text{سئوالات چهارگزینه ای (۱۰ بار)} \\ \boxed{2 \times 2 \times \dots \times 2} & \times & \boxed{4 \times 4 \times \dots \times 4} = \boxed{4^{10} \times 2^5 = 2^{25}} \end{array}$$

ب : برای هر یک از سئوالات چهارگزینه ای ۵ حالت و برای هر یک از سئوالات دو گزینه ای ۳ حالت داریم.

$$\begin{array}{ccc} \text{سئوالات دو گزینه ای (۵ بار)} & \times & \text{سئوالات چهارگزینه ای (۱۰ بار)} \\ \boxed{3 \times 3 \times \dots \times 3} & \times & \boxed{5 \times 5 \times \dots \times 5} = \boxed{5^{10} \times 3^5} \end{array}$$



۲۷: اگر شکل مقابل، نشان دهنده ی جاده های بین

شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه ی جاده ها یک

طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت؟

حل :

$$ABE \text{ تعداد مسیرهای } = 2 \times 2 = 4$$

$$ACDE \text{ تعداد مسیرهای } = 2 \times 3 \times 1 = 6$$

$$\text{تعداد کل مسیرها} = 4 + 6 = 10$$

۲۸ : مسئله ی زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مسئله : چند عدد دو رقمی می توان نوشت، به طوری که؟

جواب : تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تا است و تعداد راه های نوشتن دهگان برابر ۴ تا است. لذا با

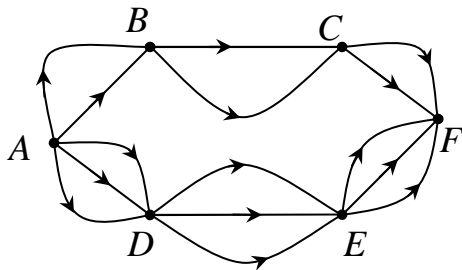
توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد شرایط مورد نظر وجود دارد.

حل : رقم یکان فرد و رقم دهگان عددی اول باشد.

۲۹ : مسئله ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن

به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



حل : اگر شکل مقابل نشان دهنده ی جاده های بین شهر

های A و B و C و D و E و F باشد و همه ی جاده ها

یک طرفه فرض شوند. در این صورت مسئله به صورت زیر

طرح می شود.

به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟

۳۰ : با حروف کلمه ی « گل پیرا » و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت که با « گل » شروع می شوند؟

حل :

الف :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

ب : طبق مسئله « گل » را با هم در نظر می گیریم.

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

۳۱: با حروف کلمه‌ی « گل پیرا » و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف « پ » و « ر » کنار هم آمده باشند؟

ج) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف « پ » و « ر » کنار نباشند؟

حل :

الف :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

ب : طبق مسئله دو حرف « پ » و « ر » باید باشند و کنار هم. برای حل مسئله در ابتدا حروف « پ » و « ر »

را با هم و به شکل « پر » در نظر می‌گیریم در این صورت

ی گ ل ا پ ر

اگر « پر » اول باشند. تعداد حالت‌ها می‌شود. پ ، ر ، ، ... ، ...

$$1 \times 4 \times 3 = 12$$

اگر « پر » وسط باشند. تعداد حالت‌ها می‌شود. ... ، پ ، ر ، ...

$$4 \times 1 \times 3 = 12$$

اگر « پر » آخر باشند. تعداد حالت‌ها می‌شود. ، ... ، پ ، ر

$$4 \times 3 \times 1 = 12$$

لذا تعداد حالت‌ها در این مورد می‌شود.

$$12 + 12 + 12 = 3 \times 12 = 36$$

ولی اگر حروف « پ » و « ر » را با هم و به شکل « رپ » در نظر می‌گیریم. باز ۳۶ حالت داریم. لذا در کل

تعداد حالت‌های می‌شود؟

$$36 + 36 = 2 \times 36 = 72$$

روش دوم

$$(2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 1) \times 3 = 72$$

(ج)

$$360 - 72 = 288$$

۳۲: با حروف کلمه ی « گل پیرا » و بدون تکرار حروف

الف: چند کلمه ی ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه ی « پیرا » کنار هم آمده باشند؟

ب: چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه ی « پیرا » کنار هم آمده باشند؟

حل:

الف: در این حالت ابتدا فرض می کنیم که « گ » و « پیرا » انتخاب شوند. پس

$$1 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1 = 24 + 24 = 48$$

و اگر « ل » و « پیرا » انتخاب شوند. باز داریم

$$1 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1 = 24 + 24 = 48$$

لذا در کل $48 + 48 = 2 \times 48 = 96$ حالت می شوند.

روش دوّم:

$$(1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 \times 2 = 96$$

ب: جابجایی کُلی « گ یا ل » و « پیرا »

$$(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 144$$

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس دوم : جایگشت

در ادامه‌ی این فصل ابتدا مفهوم جایگشت و سپس نحوه‌ی محاسبه‌ی تعداد جایگشت های اشیاء مختلف را بیان می کنیم.

قسمت اول : جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم ، یک جایگشت از آن اشیاء می گوییم.
مثال : سه فیش و سه درگاه مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می شوند. اگر فیش ها را a و b و c می نامیم. حالت های مختلف قرار دادن آنها در درگاه ها را ، در جدول زیر تنظیم کنید و سپس تعداد حالت ها را بنویسید.



a	b	c
a	c	b

تمرین ۱ : تعداد حالت های صف گرفتن چهار دانش آموز را بنویسید.

قسمت دوم : معرفی نماد فاکتوریل

فرض کنید که n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فاکتوریل n که با نماد $n!$ نمایش داده می شود، به شکل زیر تعریف می شود.

اگر $n = 0$ باشد. در این صورت $0! = 1$

اگر $n = 1$ باشد. در این صورت $1! = 1$

اگر $n > 1$ باشد. در این صورت $n!$ برابر حاصل ضرب تمام اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی آن است. یعنی

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

مثال :

الف) $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

ب) $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

تمرین ۲ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $5! =$

ب) $4! - 3! + 2! - 1! + 0! =$

تمرین ۳ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{5! + 3!}{9} =$

ب) $(3!)! =$

ج) $\frac{6! - 4!}{4(4!) + 5(5!)} =$

تمرین ۴ : عبارت های زیر را با نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$

ب) $8 \times 7 \times 6 \times 5 =$

ج) $5 \times 24 =$

نتیجه : با توجه به مفهوم فاکتوریل یک عدد طبیعی می توان نوشت که:

$$n! = n(n-1)!$$

برای مثال : $6! = 6 \times 5!$

تمرین ۵ : کسر های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{9!}{7!}$

ب) $\frac{(n+1)!}{n!}$

ج) $\frac{k!}{(k-3)!}$

د) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

نتیجه : تعداد جایگشت های n شیء n (نفر) متمایز برابر $n!$ است.

تمرین ۶ : با حروف کلمه‌ی «Computer» چند کلمه‌ی ۸ حرفی با معنی و بی معنی بدون تکرار حروف

می توان نوشت؟

تمرین ۷ : چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام با اعداد ۱ تا ۶ می توان نوشت که در آنها ارقام ۲ و ۳ کنار

هم نباشند؟

۷۲۰ (۴)

۴۸۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۳۴۰ (۱)

حل :

۷۲۰ = ۶! تعداد کل حالات

۲۴۰ = ۵! × ۲ تعداد حالاتی که ارقام ۲ و ۳ کنار هم باشند.

۴۸۰ = ۷۲۰ - ۲۴۰ تعداد حالاتی که ارقام ۲ و ۳ کنار هم نباشند.

تمرین ۸: با حروف کلمه‌ی «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

الف : چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟

ب : چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ: چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت : چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث : چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی «جهان» کنار هم باشند؟

ج: چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف :

۸! = تعداد کل کلمات

۷! = تعداد کلماتی که به «ی» ختم می‌شوند.

ب :

۲ × ۷!

پ:

$\frac{8!}{2!} = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$ تعداد کل کلمات ۶ حرفی

$12 = \frac{4!}{2!} = 3 \times 4$ تعداد کل کلماتی که به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت :

۴! × ۴!

ث :

۴! × ۵!

ج:

۳ × ۷!

تمرین برای حل :

۹: با پنج حرف الفبای متمایز چند کلمه ی (با معنی و بی معنی) بدون تکرار حروف می توان نوشت؟

۱۰: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{10!}{9!}$

ب) $\frac{8!}{6!}$

ج) $\frac{n!}{(n-2)!}$

۱۱: عبارت های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) 9×8

ب) ۵

ج) $n(n-1)!$

د) $n(n-1)(n-2)(n-3)$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس سوم: ترکیب و ترتیب

در این درس روش های تعیین تعداد جایگشت های اشیاء متمایز بدون تکرار اشیاء ولی در حالت های مهم بودن یا نبودن ترتیب آنها معرفی می کنیم.

ترتیب و ترکیب

در انتخاب k شیئی از n شیئی بدون تکرار اشیاء دو حالت وجود دارد.

الف: اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم باشد. این نوع انتخاب را **ترتیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

مثال: تعداد کلمات سه حرفی که با γ حرف کلمه «خوزستان» تشکیل می شوند، برابر است با:

$$P(\gamma, 3) = \frac{\gamma!}{(\gamma - 3)!} = \frac{\gamma!}{4!} = \frac{\gamma \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (حروف) مهم است. برای مثال کلمات «ستا» با «تاس» تفاوت دارند. به همین دلیل از ترتیب استفاده شد.

ب: اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم نباشد. این نوع انتخاب را **ترکیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه γ عضوی $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، برابر است با:

$$C(\gamma, 3) = \binom{\gamma}{3} = \frac{\gamma!}{3!(\gamma - 3)!} = \frac{\gamma!}{3! \times 4!} = \frac{\gamma \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (عضوها) مهم نیست. برای مثال زیر مجموعه های $\{a, b, c\}$ با $\{b, a, c\}$ تفاوت ندارد. به همین دلیل از ترکیب استفاده شد.

تمرین ۱: با ارقام عدد ۵۶۸۷۴ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

تمرین ۲: از میان شش کتاب مختلف

الف: به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب: به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل:

الف:

$$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360.$$

ب:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

تمرین ۳: هفت نقطه روی دایره‌ای قرار دارند. حساب کنید که با این هفت نقطه

الف) چند پاره خط ایجاد می‌شود.

ب) چند بردار ایجاد می‌شود.

ج) چند مثلث تشکیل می‌شود.

تمرین ۴: بر روی یک دایره ۸ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس یک

چهارضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، را به دست آورید.

حل:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = 70.$$

تمرین ۵: تعداد قطرهای یک ۱۲ ضلعی محدب را محاسبه کنید.

حل: اگر از تعداد حالات انتخاب ۲ نقطه از کل نقاط تعداد اضلاع را کم کنیم. تعداد قطرها به دست می‌آید.

$$\binom{n}{2} - n = \binom{12}{2} - 12 = 66 - 12 = 54$$

تمرین ۶: تعداد قطرهای یک ۸ ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین ۷: ثابت کنید که هر n ضلعی محدب دارای $\frac{1}{2}n(n-3)$ قطر است.

تمرین ۸: در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند. می خواهیم از بین آنها :

(الف) ۳ نفر انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است.

(ب) یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است. (هر نفر یک پست داشته باشد).

حل :

(الف)

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 220$$

(ب)

$$P(12,3) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 1320$$

تمرین ۹: درون قفسه‌ی یک کتابخانه یک کتاب درسی ، یک کتاب علمی و یک کتاب داستان گذاشته

شده است. اگر از بین ۷ نفر ۳ نفر به طرف قفسه رفته و هر کدام یک کتاب بردارند. به چند روش ممکن است کتاب ها توزیع شده باشند؟

حل :

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

تمرین ۱۰: راه های مختلفی که می توان از بین ۱۰ سؤال متفاوت به ۷ سؤال پاسخ داد، مساوی با

فاکتوریل چه عددی است؟

حل :

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

تمرین ۱۱: هفت نقطه‌ی A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث

مختلف می توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

حل :

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

تمرین ۱۲: با حروف کلمه ی « گل بهار » و بدون تکرار حروف

الف: چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت؟
ب: چند کلمه ی ۴ حرفی می توان نوشت؟

حل:

$$\text{الف) } P(6,6) = \frac{6!}{0!} = 6! = 720 \qquad \text{ب) } P(6,4) = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

تمرین ۱۳: در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی در هواپیما وجود دارد و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به

چند طریق می توان از بین آنان ۴ نفر را سوار کرد؟

حل:

$$C(9,4) = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 126$$

تمرین ۱۴: حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \binom{12}{7} - \binom{12}{5} = \qquad \text{ب) } \frac{\binom{9}{3} + \binom{6}{2}}{\binom{6}{4} + \binom{9}{6}} = \qquad \text{ج) } \frac{P(n, n-1)}{n!} =$$

تمرین ۱۵: به چند طریق می توانیم از بین ۵ مهره آبی و ۴ مهره سبز ، ۳ مهره انتخاب کنیم. به طوری که

الف) رنگ مهره ها مهم نباشد. ب) هر سه مهره آبی باشند.

ج) هر سه مهره سبز باشند. د) دو مهر آبی و یکی سبز باشد.

ه) هر سه مهره هم رنگ باشند.

تمرین ۱۶: به چند طریق می توان از بین ۸ دانش آموز پایه ی دهم ، ۷ دانش آموز از پایه ی یازدهم و ۵

دانش آموز از پایه ی دوازدهم به تعداد ۶ دانش آموز جهت مسابقات ورزشی انتخاب کرد به طوری که :

الف) پایه ی دانش آموزان مهم نباشد.

ب) ۳ دانش آموز دهم و ۱ دانش آموز یازدهم و بقیه دوازدهم باشند.

ج) هر ۶ دانش آموز همکلاس باشند!

1. توجه کنید که تعداد انتخاب $\binom{n}{k}$ اگر $k > n$ باشد، برابر صفر می باشد.

تمرین ۱۷: در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از این کیسه ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل ۲ مهره سیاه باشند؟

حل:

$$\binom{4}{2} \binom{1}{1} + \binom{4}{3} \binom{1}{0} = 6 \times 1 + 4 \times 1 = 10$$

تمرین ۱۸: به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، شش نفر انتخاب کرد به طوری که حداقل سه زن انتخاب شوند؟

حل:

$$\binom{4}{3} \binom{5}{3} + \binom{4}{4} \binom{5}{2} = 4 \times 10 + 1 \times 10 = 40 + 10 = 50$$

توجه: تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ است.

تمرین ۱۹: تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از یک مجموعه‌ی ۷ عضوی را به دست آورید.

تمرین ۲۰: تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه، برابر ۲۱ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

تمرین ۲۱: یک مجموعه‌ی n عضوی، ۵۵ زیر مجموعه‌ی $n-2$ عضوی دارد. عدد n را بیابید.

حل:

$$\binom{n}{n-2} = 55 \rightarrow \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = 55 \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 55$$

$$\rightarrow n(n-1) = 110 \rightarrow n = 11$$

تمرین ۲۲: تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e, f\}$ شامل عضو a را به دست آورید؟

حل: کافی است، تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی مجموعه‌ی $\{b, c, d, e, f\}$ را به دست آوریم.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

توجه: به هر کدام از زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه ی $\{b, c, d, e, f\}$ اگر عضو a را اضافه کنیم، یک زیر مجموعه از زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه ی $\{a, b, c, d, e, f\}$ شامل a به دست می آید.

نتیجه: به کمک تعیین تعداد زیر مجموعه ی یک مجموعه ی n عضوی نتیجه می شود که:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تمرین ۲۳: با حروف کلمه ی *Computer* چند کلمه ی ۵ حرفی می توان نوشت که در آن حروف p و u کنار هم قرار داشته باشند؟

حل: ابتدا باید ۳ حرف دیگر غیر از حروف p و u را از بین ۶ حرف باقی مانده انتخاب کنیم. سپس با شرط گفته شده در کنار هم بچینیم. اگر بخواهیم p و u در کنار هم باشند. لازم است p و u را یک حرف در نظر بگیریم (به چسبیده) در این صورت:

$$\text{تعداد حالت های انتخاب ۳ حرف از ۶ حرف (غیر از } p \text{ و } u) = \binom{6}{3} = 20$$

$24 = 4! =$ تعداد جایگشت های ۵ حرف که p و u کنار هم در نظر گرفته شده اند.

$2 =$ تعداد جایگشت های p و u با هم

و طبق اصل ضرب داریم:

$$20 \times 24 \times 2 = 960$$

چند تساوی مهم

نکته ۱: برخی از حالت های خاص ترتیب بصورت زیر می باشند.

۱) $P(n, 0) = 1$

۴) $P(n, n-1) = n!$

۲) $P(n, n) = n!$

۵) $P(n, 2) = n(n-1)$

۳) $P(n, 1) = n$

۶) $P(n, n-2) = \frac{n!}{2}$

نکته ۲: برخی از حالت های خاص ترکیب بصورت زیر می باشند.

$$۱) \binom{n}{\cdot} = \binom{n}{n} = ۱ \qquad ۵) \binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱} = \binom{n+۱}{k} \quad \text{اتحاد پاسکال}$$

$$۲) \binom{n}{۱} = \binom{n}{n-۱} = n \qquad ۶) \binom{n}{\cdot} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۳} + \dots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

$$۳) \binom{n}{۲} = \binom{n}{n-۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \qquad ۷) \binom{n}{\cdot} - \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} - \binom{n}{۳} + \dots + \binom{n}{n} = ۰$$

$$۴) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad ۸) P(n, r) = C(n, r).r!$$

توجه کنید که تمام تساوی های فوق به کمک مفهوم ترتیب یا ترکیب قابل اثبات هستند. برای مثال

$$P(n, n-۱) = \frac{n!}{(n-(n-۱))!} = \frac{n!}{(n-n+۱)!} = \frac{n!}{۱!} = \frac{n!}{۱} = n!$$

$$\binom{n}{n-۱} = \frac{n!}{(n-۱)!(n-(n-۱))!} = \frac{n!}{(n-۱)!(n-n+۱)!} = \frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!(۱)!} = \frac{n}{۱} = n$$

تمرین ۲۴: هر یک از تساوی های فوق را ثابت کنید.

تمرین ۲۵: از رابطه $C(n, n-۲) = ۱۲۰$ ، عدد n را تعیین کنید.

حل:

$$C(n, n-۲) = ۱۲۰ \rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = ۱۲۰ \rightarrow n(n-۱) = ۲۴۰ \rightarrow n = ۱۶$$

تمرین ۲۶: اگر $C(n, ۴) = P(n-۱, ۳)$ ، عدد n را بیابید.

حل:

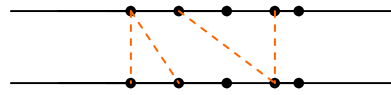
$$C(n, ۴) = P(n-۱, ۳) \\ \rightarrow \frac{n!}{۴!(n-۴)!} = \frac{(n-۱)!}{(n-۱-۳)!} \rightarrow \frac{n(n-۱)!}{۴!(n-۴)!} = \frac{(n-۱)!}{(n-۴)!} \rightarrow \frac{n}{۴!} = ۱ \rightarrow n = ۴! = ۲۴$$

تمرین ۲۷: دو خط موازی داده شده است و روی هر کدام از این دو خط ۵ نقطه قرار دارد. چند مثلث با این

نقاط می توان ساخت؟

حل: باید یکی از دو خط را انتخاب کنیم. سپس از آن خط دو نقطه و از خط دیگر یک نقطه بر داریم.

$$\binom{5}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 50 + 50 = 100$$



تمرین ۲۸: از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته ی دو نفره

انتخاب شود، به گونه ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. تعداد حالت های انجام این کار را به دست

آورید.

حل:

$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{0} + \binom{2}{1} \times \binom{2}{0} \times \binom{2}{1} + \binom{2}{0} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$$

تمرین ۲۹: معادلات زیر را حل کنید.

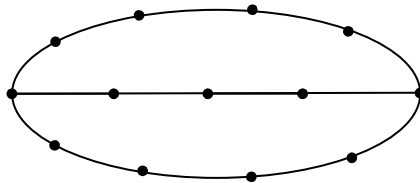
الف) $\binom{n}{1} = 5n - 8$

ب) $P(n, 5) = P(n, n - 1)$

ج) $P(5, 2) = 2n + C(5, 2)$

د) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{5} = 32$

تمرین ۳۰: به کمک نقاط موجود در شکل زیر و از به هم وصل کردن آنها چند مثلث ایجاد می شود.



حل: تعداد کل حالت هایی که می توان با ۱۳ نقطه، مثلث ایجاد کرد برابر $\binom{13}{3}$ می باشد. اما باید توجه

داشت که از این ۱۳ نقطه ۵ نقطه روی خط راست قرار دارند و با این ۵ نقطه مثلث تشکیل نمی شود، لذا

باید $\binom{5}{3}$ را از حاصل کم کرد.

$$\text{تعداد مثلث های حاصل} = \binom{13}{3} - \binom{5}{3} = 286 - 10 = 276$$

تمرین ۳۱: در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

حل:

$$P(18,3) = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!} = 4896$$

تمرین ۳۲: از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تا است؟

حل:

$$P(n,3) = 210 \rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 210 \rightarrow n(n-1)(n-2) = 210 \rightarrow n = 7$$

تمرین ۳۳: در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد (در بدترین حالت) و در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

حل:

$$2 \times P(20,3) = 2 \times \frac{20!}{17!} = 2 \times 6840 = 13680 \text{ ثانیه}$$

تمرین ۳۴: یک فروشندهی تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه ی کدو، تخمه ی ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. تعیین کنید که او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می تواند درست کند؟

حل:

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 21 + 7 + 1 = 29$$

تمرین ۳۵: یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود؟ هرگاه الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.
 ب) رئیس و دقیقاً معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.
 ج) رئیس و دقیقاً معاون و یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

حل:

الف)

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{14}{3} = 1 \times 3 \times 364 = 1092$$

ب)

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{2} = 1 \times 3 \times 3 \times 55 = 495$$

ج)

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{9}{1} = 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 9 = 162$$

تمرین ۳۶: به توجه به تمرین قبل به پرسش زیر پاسخ دهید.

به جهت وجود یک بحران، قرار شد که در کنار رئیس و یک معاون، از هر کارشناسی یک نفر حاضر شوند، تعداد حالت‌های مختلف شرکت اعضای این اداره را تعیین کنید.

تمرین ۳۷: در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

حل: فرض کنیم تعداد داوطلبان n نفر باشند. بنابراین.

$$\binom{n}{2} = 28 \rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \rightarrow n(n-1) = 56 \rightarrow n(n-1) = 8 \times 7 \rightarrow n = 8$$

تمرین ۳۸: یک گل فروش در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه

گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟

حل :

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 120 + 210 + 252 = 582$$

تمرین ۳۹: یک نقاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز ، آبی ، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند

قوطی از رنگ های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می شود، اما تعداد رنگ های حاصل بیشتر از

جواب شما است؟

حل :

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

چون ممکن است میزان ترکیب رنگ ها یکسان نباشد. به طور مثال یک بار ۵۰ درصد از یک رنگ و ۵۰

درصد از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰ درصد از یک رنگ و ۴۰ درصد از رنگ دیگر استفاده شود و

در این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.

تمرین ۴۱: یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست

می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند؟ هرگاه

الف: هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد.

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند.

ج) سه نوع ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند.

د) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته ی اول با هیچ یک از ادویه

های دسته ی دوم سازگاری ندارند.

حل :

(ف)

$$\binom{10}{3} = 120$$

(ب) اگر این دو ادویه استفاده شوند، ادویه سوم از ۸ ادویه باقی مانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه:
تعداد حالات وجود دو ادویه با هم = $\binom{8}{1}$
تعداد کل حالاتی که دو ادویه خاص با هم استفاده نشوند.

تعداد حالاتی که دو ادویه خاص با هم استفاده می شوند - تعداد کل حالات

$$= \binom{10}{3} - \binom{8}{1} = 120 - 8 = 112$$

(ج)

= تعداد کل حالاتی که هر سه ادویه خاص با هم استفاده نشوند.

تعداد حالاتی که هر سه ادویه خاص با هم استفاده می شوند - تعداد کل حالات

$$= \binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

(د) هر سه ادویه باید از دسته اول انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته دوم انتخاب شوند. بنابراین:

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

تمرین ۴۲: در هر مورد، مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف) $\binom{5}{3} \times \binom{6}{2}$

ب) $\binom{5}{3} + \binom{6}{2}$

حل:

الف) به چند طریق می توان از بین ۵ مرد و ۶ زن، پنج نفر انتخاب کرد به طوری که در این انتخاب ۲ زن و ۳ مرد وجود داشته باشد؟

ب) واضح است که

$$\binom{5}{3} + \binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$$

لذا مسئله را به صورت زیر طراحی می کنیم.

از بین ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی، دو مهره استخراج می کنیم. تعداد حالت هایی را تعیین کنید که این دو مهره هم رنگ باشند.

تمرین برای حل :

۴۳ : با حروف کلمه ی « گل بهار » چند کلمه ی ۴ حرفی می توان ساخت به طوری که:

الف) با حرف « گ » شروع و به حرف « ب » ختم شوند.

ب) در این کلمات حروف « ب » و « ه » موجود و در کنار هم باشند.

ج) در این کلمات حروف « ب » و « ه » و « ا » موجود و در کنار هم باشند.

۴۴ : از بین ۴ زن و ۳ مرد به چند حالت می توان یک گروه ۳ نفری انتخاب کرد که :

الف) ۲ مرد و یک زن باشد. ب) همگی زن باشند.

ج) نفر اول رئیس و نفر دوم معاون و نفر سوم خدمت کار باشند.

۴۵ : از بین ۵ نفر به چند حالت می توان

الف : یک نفر رئیس و یک نفر معاون انتخاب کرد. ب : دو نفر جهت شرکت در اردو انتخاب کرد.

۴۶ : با ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۶ و ۰ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان ساخت به طوری که :

الف) اعداد سه رقمی همگی فرد باشند.

ب) همگی با ۲ شروع شوند.

ج) دو عدد ۲ و ۳ همواره در کنار هم باشند.

د) دو رقم ۲ و ۳ به شکل «۲۳» کنار هم باشند.

۴۷ : به چند طریق می توان کمیته ای ۳ نفره از بین ۷ دانش آموز رشته ی ریاضی و ۵ دانش آموز رشته ی

تجربی انتخاب کرد؟

۴۸ : از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند

طریق این کمیته می تواند انتخاب شود؟ هرگاه

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

ج) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

۴۹: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $n! = 2 \cdot (n - 2)!$

ب) $P(n, 3) = 12C(n, 2)$

ج) $P(n, 2) + 9 = C(6, 4)$

۵۰: تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $P(n, r) = nP(n - 1, r - 1)$

ب) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

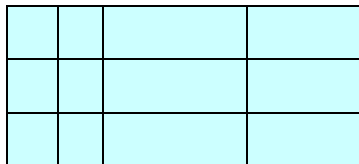
۵۱: از بین پنج گل آبی و سه گل سفید به چند طریق می توان سه گل انتخاب کرد که هر سه گل هم رنگ باشند.

۵۲: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} =$

ب) $\binom{8}{5} - \binom{8}{3} =$

۵۳: در شکل روبرو چند مستطیل وجود دارد؟

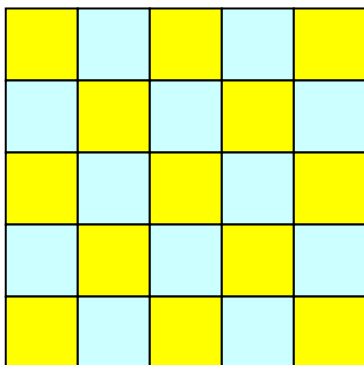


۵۴: با توجه به شکل مقابل به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف: چند مربع وجود دارد؟

ب: چند مستطیل وجود دارد؟

ج: چند مستطیل وجود دارد که مربع نباشند؟



نتیجه :

الف : در یک مربع به ضلع $n \times n$ ، تعداد کل مربع های موجود از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + n^۲ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{۶}$$

ب : در یک مستطیل به ابعاد $m \times n$ ، تعداد مستطیل های موجود برابر $\binom{m+1}{۲} \times \binom{n+1}{۲}$ است.

در این محاسبه مربع ها هم به عنوان مستطیل در نظر گرفته شده اند.

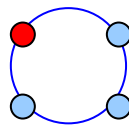
۵۵: روزی مدیر دبیرستان، چهار نفر از دانش آموزان موفق در مسابقات فرهنگی، در پایه دهم را جهت تقدیر

به دفتر دبیرستان دعوت کرد. مدیر که مدرس ریاضی هم هست، از این چهار دانش آموز پرسید:

الف : به چند طریق می توانید به صورت خطی کنار هم بنشینید؟



ب : به چند طریق می توانید به صورت دایره ای (دور یک میز) کنار هم بنشینید؟



شما چه جوابی برای این دو سؤال دارید؟

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان