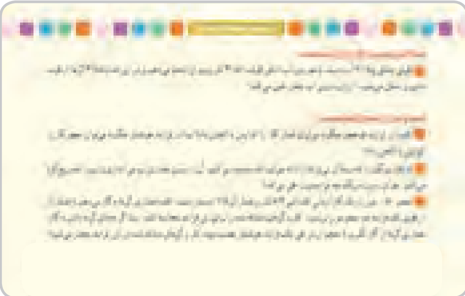
راهنمای پرسش‌ها و مسئله‌های فصل ۵



۱ از قانون اول ترمودینامیک داریم

$$\Delta U = Q + W = -۳۱\,\mathrm{kJ} + ۴۰\,\mathrm{kJ} = ۹\,\mathrm{kJ}$$

۲ (الف) همان‌طور که در متن درس اشاره شد اگر پیستون را با گیره‌های ثابت کنیم و دمای گاز را با استفاده از یک منبع گرما به‌تدریج افزایش یا کاهش دهیم، فشار گاز طی یک فرایند هم‌حجم ایستاوار، افزایش یا کاهش می‌یابد.

(ب) این مورد نیز در متن درس توضیح داده شد. در اینجا نیز با افزایش دمای کند و تدریجی توسط منبع گرما، در هر مرحله به علت اختلاف دمای جزئی بین منبع و دستگاه، مقدار کمی گرما به گاز منتقل می‌شود که در نتیجه آن گاز کمی منبسط می‌شود و پیستون را که حالا آزاد است اندکی به طرف بالا جابه‌جا می‌کند. اگر گرما دادن را به همین روش به‌صورت آهسته ادامه دهیم، گاز به‌کندی منبسط می‌شود و پیستون به‌طور ایستاوار به بالا حرکت می‌کند. شتاب حرکت پیستون چنان کم است که می‌توان گفت در طی گرما دادن همواره فشار گاز ثابت می‌ماند. برای کاهش حجم ایستاوار و هم فشار گاز نیز، به روش مشابه، دمای منبع گرما را به‌تدریج و به‌کندی کاهش می‌دهیم.

۳ این آزمایش مشابه حالتی است که گاز محبوس در استوانه‌ای با پیستون آزاد در تماس با یک منبع گرما با دمای قابل تنظیم است و دمای منبع به‌آرامی بالا می‌رود.

به علت اختلاف جزئی دمای بین منبع (آب) و هوای درون سرنگ، گرما به‌کندی به هوای محبوس درون سرنگ منتقل می‌شود و هوا به آرامی [در فشار ثابت] اندکی منبسط می‌گردد و پیستون، سرنگ را اندکی به جلو می‌راند. اگر گرما دادن را به همین روش تدریجی ادامه دهیم، ضمن افزایش دما و حجم هوای درون سرنگ، پیستون به‌آهستگی حرکت می‌کند. همان‌طور که گفتیم این فرایند در فشار ثابت رخ می‌دهد. زیرا وقتی سرنگ به‌طور افقی درون آب قرار گرفته است، اختلاف فشاری بین درون سرنگ و آب بیرون آن وجود ندارد و به محض اینکه یکی از این دو فشار اندکی افزایش یا کاهش یابد، پیستون جابه‌جا می‌گردد تا دوباره فشارها برابر شوند. و چون در اینجا فشار آب تغییر نمی‌کند، فشار درون سرنگ هم تغییر نخواهد کرد و انبساطی هم‌فشار خواهیم داشت.

۴ (الف) در فرایند هم‌حجم، کار برابر صفر است. برای محاسبهٔ گرمای مبادله شده از رابطهٔ $Q = nC_V\Delta T$ استفاده می‌کنیم و به جای ΔT از قانون گازهای آرمانی (کامل) جای‌گذاری خواهیم کرد. با نمو گرفتن از قانون گازهای کامل (با توجه به اینکه $\Delta V = ۰$ است) داریم

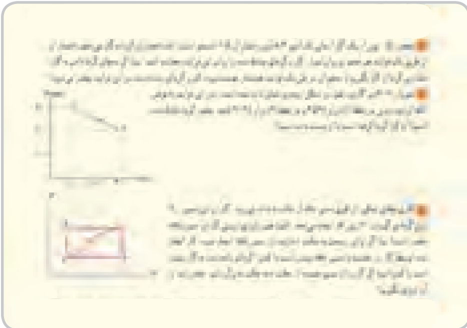
$$V\Delta P = nR\Delta T$$

و از آنجا $\Delta T = \dfrac{V\Delta P}{nR}$ می‌شود. با توجه به اینکه برای گاز کامل تک اتمی $C_V = \dfrac{۳}{۲}R$ است، داریم

$$Q = n(\frac{۳}{۲}R)(\frac{V\Delta P}{nR}) = \frac{۳}{۲}V\Delta P$$

که در یکاهای SI چنین به‌دست می‌دهد :

$$Q = \frac{۳}{۲}(۸/۳ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m^۳})(۳/۰ - ۱/۵)(۱۰^{۵}\,\mathrm{N/m^۲}) = ۱/۹ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{J}$$



توجه کنید که در حجم ثابت برای افزایش فشار باید به گاز گرما داد و علامت مثبت Q نیز نشان می‌دهد که این گرمایی است که گاز می‌گیرد تا افزایش فشار دهد.

ب) حال اگر حجم گاز را کم کنیم، برای کار در یکای SI خواهیم داشت :

$$W = -P\Delta V = -(۱/۵ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N/m^۲})(\frac{۸/۳}{۲} - ۸/۳) \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m^۳}$$
$$= ۶/۲ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{J}$$

توجه کنید که علامت W مثبت شده است و این به معنای آن است که کار روی دستگاه انجام شده است. برای محاسبهٔ گرمای مبادله شده از رابطهٔ $Q = nC_P\Delta T$ استفاده می‌کنیم. در این رابطه به‌جای ΔT دوباره از قانون گازهای کامل قرار می‌دهیم :

$$Q = nC_P\left(\frac{P\Delta V}{nR}\right)$$

با توجه به اینکه C_P برای گازهای کامل تک اتمی برابر $\frac{۵}{۲}R$ است، $Q = \frac{۵}{۲}P\Delta V$ می‌شود و از آنجا در یکاهای SI خواهیم داشت :

$$Q = \frac{۵}{۲}(۱/۵ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N/m^۲})(\frac{۸/۳}{۲} - ۸/۳) \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m^۳} = -۱/۶ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{J}$$

توجه کنید علامت Q منفی شده است و این به معنای آن است که گاز به محیط گرما داده است.

۵

$$\text{کار محیط} = -(\text{کار گاز}) = -(\text{مساحت ذوزنقه})$$
$$= -\frac{۱}{۲}[(۳/۰۰ + ۲/۰۰)(۱/۰۱ \times ۱۰^{۵}\mathrm{N/m^۲})](۲/۰۰ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{m^۳}) = -۵۰۵\mathrm{J}$$

و آنگاه با استفاده از قانون اول ترمودینامیک داریم

$$Q = \Delta U - W_{\text{محیط}} = (۹۱۲\mathrm{J} - ۴۵۶\mathrm{J}) + ۵۰۵\mathrm{J} = ۹۶۱\,\mathrm{J}$$

چون Q مثبت شده است این بدین معنی است که گاز گرما گرفته است.

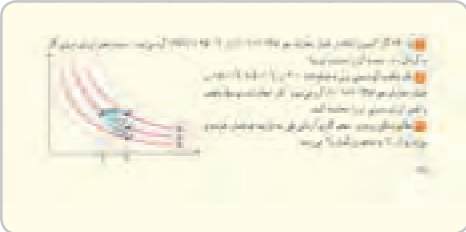
۶ الف) نخست قانون اول ترمودینامیک را برای مسیر abc می‌نویسیم :

$$\Delta U_{abc} = Q_{abc} + W_{abc} = ۹۰\,\mathrm{J} + (-۷۰\,\mathrm{J}) = ۲۰\,\mathrm{J}$$

ب) قدرمطلق کار انجام شده برابر با مساحت زیر نمودار فرایند در صفحهٔ $P-V$ است. بنابراین، بدیهی است که مساحت زیر مسیر adc کمتر از مساحت زیر مسیر abc است و در نتیجه مقدار کار در مسیر abc کمتر از مقدار کار در مسیر abc است. از طرفی در هر دو فرایند گاز انبساط یافته است و بنابراین کار محیط منفی و کار دستگاه (گاز) مثبت است. بنابراین کار گاز نیز در مسیر adc کمتر از مسیر abc است. برای مقایسهٔ گرمای داده شده به گاز، باید از قانون اول ترمودینامیک استفاده کنیم: $Q = \Delta U - W$. چون ΔU برای هر دو مسیر یکسان است باید W ها را با هم مقایسه کنیم. چون مقدار کار در مسیر adc کوچک است و از طرفی W کار محیط روی گاز و در هر دو مسیر منفی است پس $W_{adc} > W_{adc}$ است و درنتیجه Q در مسیر adc کوچک‌تر است.

پ) چرخهٔ بسته‌ای را درنظر بگیرید که شامل مسیر abc و مسیر خمیدهٔ بازگشت است. چون

$$\Delta U = \Delta U_{abc} + \Delta U_{ca} = ۰$$



نتیجه می‌گیریم که باید به اندازهٔ $\Delta U_{\text{abc}} = ۲۰\,\text{J}$ از گاز انرژی بگیریم. البته چون در این بخش، هنوز چرخه مطرح نشده است می‌توانیم این طور نیز استدلال کنیم:

$\Delta U_{\text{abc}} = U_c - U_a$ و $\Delta U_{\text{ca}} = U_a - U_c$

$\Rightarrow \Delta U_{\text{ca}} = -\Delta U_{\text{abc}} = -۲۰\,\text{J}$

۷ آنچه مورد نظر است نسبت $\Delta U/Q$ است. داریم

$\Delta U = nC_V\Delta T$ و $Q = nC_P\Delta T$

در نتیجه

$$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{C_V}{C_P} = \frac{۵}{۷} \approx ۰/۷$$

توجه کنید در این مسئله نیازی به جرم اکسیژن نداشتیم.

۸ با استفاده از تعریف کار و رابطهٔ انبساط حجمی داریم:

$$W_{\text{کار مکعب روی هوا}} = -W = P\Delta V = P(\beta V_0 \Delta T) = (۱/۰۱\times۱۰^{۵}\,\text{N/m}^۲)[(۳\times۲۳\times۱۰^{-۶}/^\circ\text{C})(۸/۰\times۱۰^{-۳}\,\text{m}^۳)(۱۰۰/۰\,^\circ\text{C})] = ۵/۸\,\text{J}$$

از طرفی

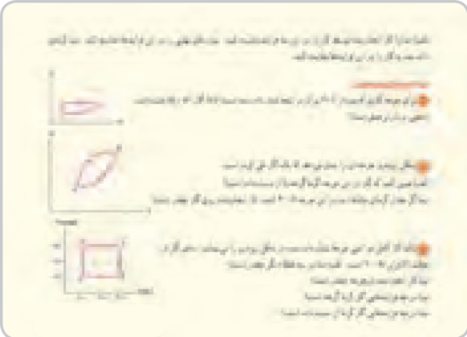
$$Q = mc\Delta T = (\rho V)c\Delta T$$
$$= (۲/۷\times۱۰^{۳}\,\text{kg/m}^۳)(۸/۰\times۱۰^{-۳}\,\text{m}^۳)(۹۰۰\,\text{J/kg.K})(۱۰۰/۰\,\text{K}) = ۱/۹۴\times۱۰^{۶}\,\text{J}$$
$$\Rightarrow \Delta U = Q + W = ۱/۹۴\times۱۰^{۶}\,\text{J} - ۵/۶\,\text{J} = ۱/۹۴\times۱۰^{۶}\,\text{J}$$

توجه کنید که کار انجام شده در برابر Q بسیار ناچیز و اهمیت ندارد که این فرایند در خلأ صورت گیرد ($W=۰$) یا خیر. تغییر انرژی درونی در دو حالت یکسان است.

۹ الف) قدرمطلق کار برابر با مساحت زیر نمودار فرایند ترمودینامیک‌ها در صفحهٔ $P-V$ است. از روی شکل دیده می‌شود که مساحت زیر نمودار فرایند هم‌فشار از همه بیشتر و مساحت زیر نمودار فرایند بی‌دررو از همه کمتر است. بنابراین مقدار کار انجام شده از کمترین تا بیشترین به ترتیب بی‌دررو، هم‌دما و هم‌فشار است. البته دراین سؤال از کار گاز روی محیط پرسیده شده است که با توجه به انبساطی بدون هر سه فرایند، برای هر فرایند مقداری مثبت است. پس همین مقایسه در مورد خودِ کارها نیز درست است.

ب) از قانون گازهای کامل درمی‌یابیم که در فرایند هم‌فشار با افزایش حجم، دما افزایش می‌یابد. در فرایند هم‌دما نیز بدیهی است که دما ثابت می‌ماند. در فرایند بی‌دررو نیز از قانون اول ترمودینامیک در می‌یابیم که در انبساط، کاهش دما داریم. این موارد همگی در شکل نیز مشخص شده است. بنابراین دمای نهایی در این سه فرایند از کمترین تا بیشترین به ترتیب بی‌دررو، هم‌دما و هم‌فشار می‌شود.

پ) در فرایند بی‌دررو $Q=۰$ و در فرایندهای هم‌دما و هم‌فشار $Q>۰$ است. برای مقایسهٔ فرایندهای هم‌دما و هم‌فشار نیز باید به قانون اول ترمودینامیک رجوع کنیم. با توجه به اینکه تغییر انرژی درونی و مقدار کار در فرایند هم‌دما از فرایند هم‌فشار کمتر است و نیز کار در هر دو فرایند منفی است، بنابراین در این مورد نیز ترتیب گرمای داده شده به ترتیب از کمترین تا بیشترین، بی‌دررو، هم‌دما و هم‌فشار می‌شود.



۱۰ از درس آموختیم که در چرخه‌های پادساعتگرد در صفحهٔ $P-V$ کار محیط (W) مثبت است. با این حال اینجا می‌خواهیم اثباتی برای این چرخه ارائه دهیم. از قانون اول ترمودینامیک داریم

$$\Delta U = Q + W$$

که در آن W کار محیط است. توجه کنید که در اینجا فرایندی چرخه‌ای داریم و $\Delta U = ۰$ است. در مورد علامت W نیز می‌توانیم این فرایند چرخه‌ای را به سه بخش تقسیم کنیم. بدیهی است که در فرایند هم‌حجم، کار صفر است. اما مساحت زیر فرایند هم‌فشاری که در آن حجم کاهش یافته است، بیشتر از فرایند دیگری است که در آن افزایش حجم داریم. بنابراین کار محیط مثبت و کار دستگاه منفی است. اکنون با توجه به قانون اول ترمودینامیک برای فرایند چرخه‌ای می‌دانیم $Q=-W$ است و بنابراین Q نیز منفی می‌شود.

۱۱ الف) در فرایند چرخه‌ای $\Delta U = ۰$ است و در نتیجه از قانون اول ترمودینامیک نتیجه می‌گیریم $Q=-\mathrm{W}$ است. با توجه به اینکه چرخه ساعتگرد طی شده است کار محیط منفی است. (توجه کنید که نیازی به حفظ کردن نیست و می‌توانید همواره با مقایسهٔ مساحت زیر منحنی‌ها به منفی یا مثبت بودن کار پی ببرید.) بنابراین Q مثبت می‌شود و دستگاه گرما می‌گیرد.

ب) در قسمت الف دیدیم که Q مثبت است و در نتیجه داریم

$$\mathrm{W} = -Q = -۴۰۰\,\mathrm{J}$$

۱۲ الف) با استفاده از قانون گازهای کامل داریم :

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲}$$

با جای‌گذاری $P_۱ = ۱/۰\,\mathrm{atm}$، $P_۲ = ۳/۰\,\mathrm{atm}$، $V_۱ = V_۲$ و $T_۱ = ۲۰۰\,\mathrm{K}$ به $T_۲ = ۶۰۰\,\mathrm{K}$ می‌رسیم. که با توجه قواعد محاسبهٔ ارقام معنی‌دار باید به‌صورت $۶/۰ \times ۱۰^۲\mathrm{K}$ بیان شود. اکنون با استفاده از قانون گازهای کامل $T_۳$ و $T_۴$ را نیز به‌دست می‌آوریم.

$$T_۳ = T_۲\frac{P_۳V_۳}{P_۲V_۲} = T_۲\frac{V_۳}{V_۲} = (۶۰۰\,\mathrm{K})(\frac{۳۰۰\,\mathrm{L}}{۱۰۰\,\mathrm{L}}) = ۱۸۰۰\,\mathrm{K} = ۱/۸ \times ۱۰^۳\mathrm{K}$$

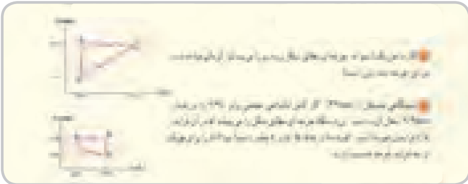
$$T_۴ = T_۳\frac{P_۴V_۴}{P_۳V_۳} = T_۳\frac{P_۴}{P_۳} = (۱۸۰۰\,\mathrm{K})(\frac{۱/۰\,\mathrm{atm}}{۳/۰\,\mathrm{atm}}) = ۶۰۰\,\mathrm{K} = ۶/۰ \times ۱۰^۲\mathrm{K}$$

ب) مقدار کار انجام شده برابر با مساحت محصور در چرخه است که چنین می‌شود.

$$|W| = [(۳۰۰-۱۰۰)(۱۰^{-۳}\mathrm{m}^۳)(۳/۰-۱/۰)(۱۰^۵\,\mathrm{N/m}^۲)] = ۴/۰ \times ۱۰^۴\mathrm{J}$$

پ) در فرایندهای ۲←۱ و ۳←۲ دمای گاز زیاد شده است و با توجه به رابطه‌های $Q = nC_V\Delta T$ و $Q = nC_P\Delta T$ درمی‌یابیم گاز گرما می‌گیرد.

ت) در فرایندهای ۴←۳ و ۱←۴ دمای گاز کم شده است و با توجه به رابطه‌های $Q = nC_V\Delta T$ و $Q = nC_P\Delta T$ درمی‌یابیم گاز گرما از دست می‌دهد.



توجه : می‌توانیم مقدار این گرماها را نیز محاسبه کنیم. مثلاً برای قسمت پ) انجام می‌دهیم. برای این گرما داریم

$$Q_{in}=Q_H=Q_{۱۲}+Q_{۲۳}=nC_V\Delta T_{۱۲}+nC_P\Delta T_{۲۳}$$
$$=\frac{۵}{۲}nR\Delta T_{۱۲}+\frac{۷}{۲}nR\Delta T_{۲۳}$$

برای محاسبهٔ nR از قانون گازهای کامل استفاده می‌کنیم :

$$nR=\frac{P_۱V_۱}{T_۱}=\frac{(۱/۰\,\mathrm{atm})(۱۰۰\,\mathrm{L})}{۲۰۰\,\mathrm{K}}=۰/۵۰\,\mathrm{L.atm/K}$$

در نتیجه داریم

$$Q_{in}=[\frac{۵}{۲}(۶۰۰\,\mathrm{K}-۲۰۰\,\mathrm{K})+\frac{۷}{۲}(۱۸۰۰\,\mathrm{K}-۶۰۰\,\mathrm{K})(۰/۵۰\,\frac{\mathrm{L.atm}}{\mathrm{K}})=۲/۶\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{atm.L}$$
$$=(۲/۶\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{atm.L})(۱/۰۱\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N/m^۲})(۱۰^{-۳}\,\mathrm{m^۳})=۲/۶\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{J}$$

۱۳ چون فرایندی چرخه‌ای داریم $\Delta U=۰$ است. بنابراین $Q=-W$ می‌شود که در آن W کار محیط است. از طرفی می‌دانیم مقدار کار انجام شده در چرخه برابر مساحت محصور در چرخه است و در چرخه‌های ساعتگرد کار انجام شده بر روی دستگاه منفی است. بنابراین

$$W=-S_{\mathrm{ABC}}=-\frac{۱}{۲}[(۳۰/۰-۱۰/۰)\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N/m^۲}][(۴/۰-۱/۰)\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m^۳}]$$
$$=-۳/۰\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{J}$$

و از آنجا $Q=۳/۰\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{J}$ می‌شود.

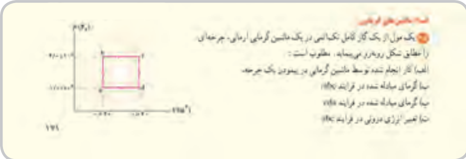
۱۴ الف)

$$T_C=T_A=\frac{P_\mathrm{A}V_\mathrm{A}}{nR}$$
$$=\frac{(۲/۴\times ۱/۰۱\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N/m^۲})(۲/۲\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m^۳})}{(۰/۳۲\,\mathrm{mol})(۸/۳۱۴\,\mathrm{J/mol.K})}$$
$$=۲۰۰/۴\,\mathrm{K}\simeq ۲/۰\times ۱۰^{۲}\,\mathrm{K}$$

$$T_B=\frac{P_\mathrm{B}V_\mathrm{B}}{nR}=\frac{P_\mathrm{A}(۲V_\mathrm{A})}{nR}=\frac{۲P_\mathrm{A}V_\mathrm{A}}{nR}$$
$$=۲T_A=۴۰۰/۹\,\mathrm{K}\approx ۴/۰\times ۱۰^{۲}\,\mathrm{K}$$

ب) فرایند $\mathrm{A\to B}$ را با شاخص پایین ۱ و فرایند $\mathrm{B\to C}$ را با شاخص پایین ۲ و فرایند $\mathrm{C\to A}$ را با شاخص پایین ۳ نشان می‌دهیم.

$$\Delta U_۱=Q_۱+W_۱$$
$$Q_۱=nC_P\Delta T=\frac{۵}{۲}nR\Delta T$$
$$=\frac{۵}{۲}(۰/۳۲\,\mathrm{mol})(۸/۳۱۴\,\mathrm{J/mol.K})(۲۰۱\,\mathrm{K})$$
$$=۱۳۳۷\,\mathrm{J}\approx ۱/۳\,\mathrm{kJ}$$
$$W_۱=-P_\mathrm{A}\Delta V=-P_\mathrm{A}(V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A})$$
$$=(-۲/۴\times ۱/۰۱\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{Pa})(۲/۲\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m^۳})$$
$$=-۵۳۳/۳\,\mathrm{J}\approx -۰/۵۳\,\mathrm{kJ}$$
$$\Rightarrow \Delta U_۱=Q+W_۱=۱/۳\,\mathrm{kJ}-۰/۵۳\,\mathrm{kJ}=۰/۷۷\,\mathrm{kJ}\simeq ۰/۸\,\mathrm{kJ}$$



(که البته این نتیجه را می‌توانیم از رابطهٔ $\Delta U = nC_V\Delta T$ نیز به‌دست آوریم.)

$$W_۲ = ۰ \qquad \text{و} \qquad \Delta U_۲ = Q_۲ + W_۲$$

$$Q_۲ = nC_V\Delta T = \frac{۳}{۲}\, nR\Delta T$$
$$= \frac{۳}{۲}(۰/۳۲\ \text{mol})(۸/۳۱۴\ \text{J/mol.K})]\,(-۲۰۰/۵\ \text{K}) = -۸۰۰/۱\ \text{J} \simeq -۰/۸۰\ \text{kJ}$$
$$\Rightarrow \Delta U_۲ = ۰ + (-۸۰۲\ \text{J}) \approx -۰/۸۰\ \text{kJ}$$

(توجه کنید که $\Delta U_۲$ را می‌توانستیم به‌طور مستقیم، با توجه به اینکه در چرخه انرژی درونی کل برابر صفر است و فرایند C→A فرایندی هم‌دما است ($\Delta U_۳ = ۰$) برابر قرینهٔ $\Delta U_۱$ بگیریم.) توجه کنید تفاوت $\Delta U_۱$ و $\Delta U_۲$ به‌دست آمده، با درنظر گرفتن محاسبات با ارقام معنی‌دار رخ داده است.

۱۵ الف) مقدار کار انجام شده روی دستگاه برابر با مساحت محصور در چرخه است و چون چرخه به‌صورت ساعتگرد پیموده شده است، علامت آن منفی است.

$$W = -S_{\text{abcd}} = -[(۲/۰ \times ۱۰^۵ - ۱/۰ \times ۱۰^۵)\text{N/m}^۲ \times (۰/۰۴ - ۰/۰۲)\text{m}^۳]$$
$$= -۲/۰ \times ۱۰^۳\text{J} = -۲/۰\,\text{kJ}$$

کار انجام شده توسط ماشین قرینهٔ این مقدار و برابر $|W| = ۲/۰\,\text{kJ}$ می‌شود.

ب) فرایند abc از دو فرایند ab (هم‌حجم) و bc (هم‌فشار) تشکیل شده است. بنابراین

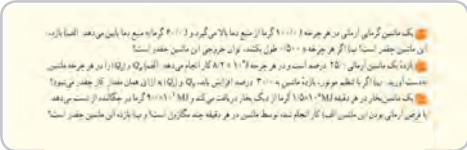
$$Q_{\text{abc}} = Q_{\text{ab}} + Q_{\text{bc}} = nC_V\Delta T_{\text{ab}} + nC_P\Delta T_{\text{bc}}$$
$$= n(\frac{۳}{۲}R)(\frac{V\Delta P}{nR})_{\text{ab}} + n(\frac{۵}{۲}R)(\frac{P\Delta V}{nR})_{\text{bc}} = \frac{۳}{۲}(\text{V}\Delta\text{P})_{\text{ab}} + \frac{۵}{۲}(\text{P}\Delta\text{V})_{\text{bc}}$$
$$= \frac{۳}{۲}(۰/۰۲۰\,\text{m}^۳)(۱/۰ \times ۱۰^۵\text{N/m}^۲) + \frac{۵}{۲}(۲/۰ \times ۱۰^۵\text{N/m}^۲)(۰/۰۲\text{m}^۳) = ۱/۳ \times ۱۰^۴\text{J} = ۱۳\text{kJ}$$

پ) فرایند cda از دو فرایند cd (هم‌حجم) و da (هم‌فشار) تشکیل شده است. بنابراین

$$Q_{\text{cda}} = Q_{\text{cd}} + Q_{\text{da}} = nC_V\Delta T_{\text{cd}} + nC_P\Delta T_{\text{da}}$$
$$= n(\frac{۳}{۲}R)(\frac{V\Delta P}{nR})_{\text{cd}} + n(\frac{۵}{۲}R)(\frac{P\Delta V}{nR})_{\text{da}}$$
$$= \frac{۳}{۲}(\text{V}\Delta\text{P})_{\text{cd}} + \frac{۵}{۲}(\text{P}\Delta\text{V})_{\text{da}}$$
$$= \frac{۳}{۲}(۰/۰۴\text{m}^۳)(-۱/۰ \times ۱۰^۵\text{N/m}^۲) + \frac{۵}{۲}(۱/۰ \times ۱۰^۵\text{N/m}^۲)(-۰/۰۲\text{m}^۳)$$
$$= -۱۱۰۰۰\,\text{J} = -۱/۱ \times ۱۰^۴\text{J} = -۱۱\,\text{kJ}$$

ت) تغییر انرژی درونی در فرایند abc برابر است با

$$\Delta U_{\text{abc}} = Q_{\text{abc}} + W_{\text{abc}}$$



Q_{abc} را در قسمت (ب) به‌دست آوردیم. کافی است W_{abc} را محاسبه کنیم.

$$W_{abc} = -P\Delta V$$
$$= -(۲/۰ \times ۱۰^{۵} N/m^{۲})(۰/۰۲ m^{۳}) = -۴/۰ \times ۱۰^{۳} J = -۴/۰ kJ$$

بنابراین داریم

$$\Delta U_{abc} = ۱/۳ \times ۱۰^{۴} J - ۴/۰ \times ۱۰^{۳} J = ۹ \times ۱۰^{۳} J = ۹ kJ$$

۱۶ الف) بازده ماشین گرمایی آرمانی برابر است با

$$\frac{|W|}{Q_H} = \eta = ۱ - \frac{|Q_L|}{Q_H} = ۱ - \frac{۶۰/۰}{۱۰۰/۰} = ۰/۴۰۰ = ٪۴۰/۰$$

ب)

$$P = \frac{|W|}{t} = \frac{۱}{t}(\eta Q_H)$$
$$= \frac{Q_H}{t}\eta = (۰/۴۰۰)(\frac{۱۰۰/۰ J}{۰/۵۰۰ s}) = ۸۰/۰ W$$

۱۷ الف) با استفاده از رابطهٔ بازده برای ماشین دمای گرمایی داریم

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

و از آنجا

$$Q_H = \frac{|W|}{\eta} = \frac{۸/۲ \times ۱۰^{۳} J}{۰/۲۵} = ۳/۲۸ \times ۱۰^{۴} J$$

حال با استفاده از قانون اول ترمودینامیک $|Q_L|$ را برای ماشین گرمایی آرمانی به‌دست می‌آوریم.

$$|Q_L| = Q_H - |W| = ۳/۳۸ \times ۱۰^{۴} J - ۸/۲ \times ۱۰^{۳} J = ۲/۴۶ \times ۱۰^{۳} J \simeq ۲/۵ \times ۱۰^{۴} J$$

ب) اکنون Q_H چنین می‌شود

$$Q_H = \frac{|W|}{\eta} = \frac{۸/۲ \times ۱۰^{۳} J}{۰/۳۰} = ۲/۷۳ \times ۱۰^{۴} J$$

و از آنجا

$$|Q_L| = Q_H - |W| = ۲/۷ \times ۱۰^{۴} J - ۸/۲ \times ۱۰^{۳} J = ۱/۹۱ \times ۱۰^{۳} J \simeq ۱/۹ \times ۱۰^{۴} J$$

۱۸ الف) چون ماشین بخار یک فرایند چرخه‌ای را طی می‌کند، از قانون اول ترمودینامیک داریم :

$$W = -Q$$

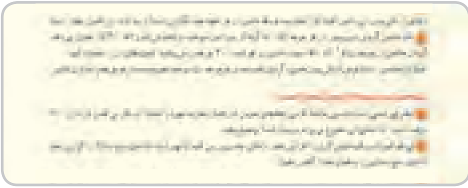
توجه کنید که این کار محیط است. چون مسئله کار دستگاه (ماشین) را خواسته این رابطه به‌صورت $W_{ماشین} = Q$ در می‌آید. از طرفی $Q = Q_H - |Q_L|$ است. بنابراین داریم :

$$W_{ماشین} = ۱/۵ \times ۱۰^{۵} MJ - ۹/۰ \times ۱۰^{۴} MJ$$
$$= ۶/۰ \times ۱۰^{۴} MJ$$

ب) با استفاده از رابطهٔ ۵ــ۷ داریم :

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{۶/۰ \times ۱۰^{۴} MJ}{۱/۵ \times ۱۰^{۵} MJ} = ۰/۴۰$$

بنابراین بازده این ماشین بخار ٪۴۰ است.



۱۹ الف) از رابطهٔ ۵ـ۷ برای بازده ماشین داریم :

$$\eta = \frac{|\ \ |}{Q} = \frac{۲\ \ ۰۰\mathrm{kJ}}{۸/۰۰\mathrm{kJ}} = ۰\ \ ۲۵۰$$

پس بازده ۲۵/۰٪ است.

ب) اکنون با استفاده از رابطهٔ ۵ـ۹، $|Q_L|$ را به‌دست می‌آوریم :

$$|Q_L| = (۱-\eta)Q_H = (۱-۲۵۰)(۸۰۰۰)$$
$$= ۶۰۰۰\mathrm{J}$$

که آن را با استفاده از قانون اول ترمودینامیک نیز می‌توانیم به‌دست آوریم :

$$|Q_L| = Q_H - W = ۸۰۰۰\mathrm{J} - ۲۰۰۰\mathrm{J} = ۶۰۰۰\mathrm{J}$$

پ) گرمای حاصل از سوخت $۵/۰ \times ۱۰^۴\ \mathrm{J/g}$ است. بنابراین، مقدار سوخت مصرف‌شده در هر چرخه چنین می‌شود :

$$m = \frac{۸۰۰۰\mathrm{J}}{۵/۰ \times ۱۰^۴\ \mathrm{J/g}} = ۰/۱۶\mathrm{g}$$

ت) ماشین در هر ثانیه ۴۰ چرخه را می‌پیماید. بنابراین، زمان پیمودن یک چرخه، $\frac{۱}{۴۰}$ s می‌شود. پس توان ماشین برابر است با :

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۲/۰۰\mathrm{kJ}}{\frac{۱}{۴۰}\mathrm{s}} = ۸۰۰۰۰\mathrm{W} = ۸۰\mathrm{kW}$$

۲۰ باید از بازدهٔ ماشین کارنو (معادلهٔ ۵ـ۱۰) استفاده کنیم :

$$\eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H}$$

توجه کنید که در این رابطه T_L و T_H برحسب کلوین هستند. بنابراین، باید نقطهٔ انجماد و نقطهٔ جوش را به کلوین تبدیل کنیم :

$$\eta = ۱ - \frac{T_C}{T_H} = ۱ - \frac{(۰+۲۷۳)\mathrm{K}}{(۱۰۰+۲۷۳)\mathrm{K}} \approx ۰/۲۷$$

بنابراین، بازدهٔ ماشین کارنو ۲۷٪ است و ادعای مخترع درست نیست؛ زیرا بازدهٔ ماشین او از بیشترین بازدهٔ محتمل بیشتر است.

۲۱ این مسئله راه حلی کلی دارد که در ادامه به آن خواهیم پرداخت. ولی چون در اینجا مثالی عددی خواسته است، مثلاً فرض کنید دماهای منبع‌های دماـبالا و دماـپایین به ترتیب ۳۰۰K و ۲۰۰K باشد و بنابراین بازدهٔ ماشین کارنو چنین می‌شود :

$$\eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۲۰۰\mathrm{K}}{۳۰۰\mathrm{K}} = ۰/۳۳۳$$

حال فرض کنید دمای منبع دماـبالا را ۵۰K افزایش دهیم

$$\eta = ۱ - \frac{۲۰۰\mathrm{K}}{۳۵۰\mathrm{K}} = ۰/۴۲۸$$

و اگر دمای منبع دماـپایین را ۵۰K کاهش دهیم

$$\eta = ۱ - \frac{۱۵۰\mathrm{K}}{۳۰۰\mathrm{K}} = ۰/۵۰۰$$

پس کاهش دمای منبع دماـپایین مؤثرتر است.

اثبات کلی : اگر دمای منبع دما ــ پایین را به اندازهٔ ΔT بکاهیم، $\eta_۱=۱-\dfrac{T_L-\Delta T}{T_H}$ و اگر دمای منبع دما ــ بالا را به اندازهٔ ΔT بیافزاییم $\eta_۲=۱-\dfrac{T_L}{T_H+\Delta T}$ می‌شود. برای آنکه $\eta_۱$ و $\eta_۲$ را مقایسه کنیم، دو روش داریم. یکی این است که جمله‌های دوم را مقایسه کنیم. جملهٔ دوم هر کدام که بزرگ‌تر بود، بازدهٔ آن کمتر است. فرض کنید $\eta_۲>\eta_۱$ باشد :

$$\frac{T_L-\Delta T}{T_H}>\frac{T_L}{T_H+\Delta T}$$

چون T_H و $T_H+\Delta T$ مقادیر مثبتی هستند می‌توانیم طرفین را در مقدار مثبت $T_H(T_H+\Delta T)$ ضرب کنیم. آنگاه پس از محاسبهٔ ساده‌ای خواهیم داشت

$$T_L>T_H+\Delta T$$

که غیرممکن است. پس حتماً جملهٔ دوم $\eta_۱$ کوچک‌تر از جملهٔ دوم $\eta_۲$ است و بنابراین $\eta_۱>\eta_۲$. یعنی برای افزایش بازده ماشین کارنو، کاهش دمای منبع دما ـ پایین از افزایش دمای منبع دما ـ بالا مؤثرتر است. **روش دیگر** آن بود که مخرج مشترک بگیریم و کلّ جمله‌ها را با هم مقایسه کنیم :

$$\eta_۱=۱-\frac{T_L-\Delta T}{T_H}=\frac{T_H-T_L+\Delta T}{T_H}$$

و افزایش دمای منبع دما ـ بالا به رابطهٔ زیر :

$$\eta_۲=۱-\frac{T_L}{T_H-\Delta T}=\frac{T_H-T_L+\Delta T}{T_H+\Delta T}$$

اگر توجه کنید، صورت‌های این دو کسر یکسان است، ولی مخرج $\eta_۲$ بزرگ‌تر از مخرج $\eta_۱$ است و بنابراین

$$\eta_۲>\eta_۱$$

۲۲ الف) چون ماشین‌ها یک چرخه را طی می‌کنند، قانون اول ترمودینامیک برای ماشین‌های آرمانی به‌صورت $Q+W=۰$ درمی‌آید که در آن $Q=Q_L+Q_H$ است. برای ماشین A داریم :

$$Q_L+Q_H=-۱۷۵۰\,\mathrm{J}+۲۰۰۰\,\mathrm{J}=۲۵۰\,\mathrm{J}$$

بنابراین این ماشین قانون اول را نقض می‌کند.

برای ماشین B داریم :

$$Q_L+Q_H=-۲۰۰\,\mathrm{J}+۵۰۰\,\mathrm{J}=۳۰۰\,\mathrm{J}$$

بنابراین ماشین B هم قانون اول را نقض می‌کند.

برای ماشین C داریم :

$$Q=-۲۰۰\,\mathrm{J}+۶۰۰\,\mathrm{J}=۴۰۰\,\mathrm{J}$$

پس ماشین C قانون اول را نقض نمی‌کند.

برای ماشین D داریم :

$$Q=-۹۰\,\text{J}+۱۰۰\,\text{J}=۱۰\,\text{J}$$

بنابراین این ماشین نیز قانون اول را نقض نمی‌کند.

ب) بدیهی است ماشین‌هایی که قانون اول ترمودینامیک را نقض می‌کنند قابل ساختن نیستند و بنابراین آنها را کنار می‌گذاریم. پس می‌ماند ماشین‌های C و D. برای آنکه ماشینی قابل ساخت باشد، بازدهٔ ماشین نباید از بازدهٔ بیشینه (بازدهٔ ماشین کارنو) بیشتر باشد. بازده ماشین کارنو از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\eta_{\text{کارنو}}=۱-\frac{T_L}{T_H}=۱-\frac{۳۰۰\,\text{K}}{۴۰۰\,\text{K}}=۰/۲۵$$

بنابراین بازدهٔ ماشین کارنویی که بین این دو دما عمل می‌کند ۲۵٪ است. حال ببینیم بازدهٔ ماشین‌های C و D چقدر است؟

$$\eta_{\text{C}}=۱-\frac{|Q_L|}{Q_H}=۱-\frac{۲۰۰\,\text{K}}{۶۰۰\,\text{K}}=۰/۶۶$$

پس بازدهٔ این ماشین بیشتر از ماشین کارنو است و آن نیز قابل ساختن نیست. تنها می‌ماند ماشین D. برای این ماشین داریم :

$$\eta_{\text{D}}=۱-\frac{|Q_L|}{Q_H}=۱-\frac{۹۰\,\text{J}}{۱۰۰\,\text{J}}=۰/۱۰$$

یعنی بازدهٔ این ماشین ۱۰٪ و کمتر از بازدهٔ ماشین کارنو است و بنابراین تنها این ماشین قابل ساختن است.

۲۳ الف) نخست بازده را برای این ماشین کارنو محاسبه می‌کنیم :

$$\eta_{\text{کارنو}}=۱-\frac{T_L}{T_H}=۱-\frac{۲۸۰/۰\,\text{K}}{۳۶۰/۰\,\text{K}}=۰/۲۲۲۲۲\simeq ۰/۲۲۲۲$$

بنابراین بازدهٔ این ماشین کارنو حدوداً ۲۲٪ است. توجه کنید رابطهٔ $\eta=|W|/Q_H$ برای هر ماشینی برقرار است و آن را می‌توان برای ماشین کارنو نیز به‌کار برد.

$$|W|=(\eta)\,Q_H=(۰/۲۲۲۲)\,(۷۵۰/۰\,\text{J})=۱۶۶/۶۷\,\text{J}\simeq ۱۶۶/۶۷\,\text{J}$$

ب) این‌بار از رابطهٔ $\eta=۱-|Q_L|/Q_H$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$|Q_L|=(۱-\eta)\,Q_H=(۱-۰/۲۲۲۲۲)\,(۷۵۰/۰\,\text{J})=۵۸۳/۳۳\,\text{J}\simeq ۵۸۳/۳\,\text{J}$$

به این نتیجه با استفاده از قانون اول ترمودینامیک نیز می‌توانیم برسیم :

$$|Q_L|=Q_H-|W|=۷۵۰/۰\,\text{J}-۱۶۶/۶۷\,\text{J}=۵۸۳/۳۳\,\text{J}\simeq ۵۸۳/۳\,\text{J}$$

۲۴ از تعریف توان داریم

$$P=\frac{W}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=W/P$$

از طرفی ضریب عملکرد برابر است با

$$K=\frac{Q_L}{W}\Rightarrow \Delta t=Q_L/PK$$

پس باید Q_L را محاسبه کنیم

$$Q_L = |Q_{\text{سردشدن}}| + |Q_{\text{یخ بستن}}| = mc|\Delta T| + mL_F$$
$$= (۱/۰۰\,\text{kg})(۴/۱۸۷\,\text{kJ/kg.K})(۱۰/۰\,\text{K})$$
$$+ (۱/۰۰\,\text{kg})(۳۳۳/۳\,\text{kJ/kg}) \simeq ۳۷۶\,\text{kJ}$$

از آنجا Δt را محاسبه می‌کنیم :

$$\Delta t = \frac{۳۷۶ \times ۱۰^{۳}\,\text{J}}{(۱۱۰/۰\,\text{J/s})(۴/۰)} = ۸۵۴/۵\,\text{s} = ۱۴/۲۴\,\text{min} \simeq ۱۴\,\text{min}$$

۲۵ توان از رابطهٔ $P = W/t$ به‌دست می‌آید. به این منظور باید نخست W را محاسبه کنیم. از قانون اول ترمودینامیک داریم :

$$|Q_H| = W - Q_L$$

و در نتیجه

$$W = |Q_H| - Q_L = ۱/۳ \times ۱۰^{۵}\text{J} - ۹/۰ \times ۱۰^{۴}\text{J} = ۱۳ \times ۱۰^{۴}\text{J} - ۹/۰ \times ۱۰^{۴}\text{J} = ۴ \times ۱۰^{۴}\text{J}$$

بنابراین توان چنین می‌شود

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۴/۰ \times ۱۰^{۴}\,\text{J}}{۶۰\,\text{s}} = ۶/۷ \times ۱۰^{۲}\text{W} \approx ۷ \times ۱۰^{۲}\text{W}$$

ب) ضریب عملکرد برابر است با

$$K = \frac{Q_L}{W} = \frac{۹/۰ \times ۱۰^{۴}\,\text{J}}{۴ \times ۱۰^{۴}\,\text{J}} = ۲/۲۵ \approx ۲$$

۲۶ بیشترین ضریب عملکرد ممکن مربوط به یخچال کارنو است.

$$K_{\max} = K = \frac{Q_L}{W} = \frac{T_L}{T_H - T_L}$$

مقدار گرمایی که باید از آب گرفته شود تا یخ ببندد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$Q = mL_F$$

در نتیجه W چنین می‌شود

$$W = Q_L \frac{T_H - T_L}{T_L} = (mL_F)\left(\frac{T_H - T_L}{T_L}\right)$$

$$= (۰/۲۵۰۰\,\text{kg})(۳۳۳/۷\,\text{kJ/kg}) \frac{(۲۷۳/۱۵ + ۲۲/۰)\text{K}(۲۳۷/۱۵ - ۵/۰)\text{K}}{(۲۷۳/۱۵ - ۵/۰)\text{K}} \simeq ۸/۴۰\,\text{kJ}$$